Inequalities for the characteristics of the CUSUM procedure in a change point problem

V.I. Lotov, A.S. Tarasenko

Sobolev Institute of Mathematics
Novosibirsk State University
Novosibirsk

August 24-26, 2022
Novosibirsk

Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин и

$$W_{n+1} = \max\{0,\, W_n + X_{n+1}\}, \qquad W_0 = 0.$$

Введём момент первого достижения последовательностью $\{W_n,\, n \geq 1\}$ уровня b:

$$T = \inf\{n \geq 1 :\, W_n \geq b\}, \qquad b > 0.$$

Нашей целью является получение двусторонних неравенств для $\mathbf{E}T$ в случаях, когда $\mathbf{E}X > 0$ и $\mathbf{E}X < 0$.

Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин и

$$W_{n+1} = \max\{0, W_n + X_{n+1}\}, \qquad W_0 = 0.$$

Введём момент первого достижения последовательностью $\{W_n, n \geq 1\}$ уровня b:

$$T = \inf\{n \geq 1 : W_n \geq b\}, \qquad b > 0.$$

Нашей целью является получение двусторонних неравенств для $\mathbf{E}T$ в случаях, когда $\mathbf{E}X > 0$ и $\mathbf{E}X < 0$. Исследование мотивировано изучением точности хорошо известной процедуры кумулятивных сумм (CUSUM procedure) в задаче о разладке. Эта процедура была предложена E. Page (Biometrika, 1954).

Предположим, что мы наблюдаем последовательность независимых случайных величин $Y_1, Y_2, \ldots$, и

$$\mathbf{P}(Y_i < x) = F_1(x), \qquad i < m,$$

$$\mathbf{P}(Y_i < x) = F_2(x), \qquad i \geq m.$$

Предполагается, что функции F_1 и F_2 известны, но момент разладки m неизвестен.

Предположим, что мы наблюдаем последовательность независимых случайных величин $Y_1, Y_2, \ldots$, и

$$\mathbf{P}(Y_i < x) = F_1(x), \qquad i < m,$$

$$\mathbf{P}(Y_i < x) = F_2(x), \qquad i \geq m.$$

Предполагается, что функции F_1 и F_2 известны, но момент разладки m неизвестен.

Задача состоит в скорейшем определении момента смены распределений. Это типично для многих приложений (контроль качества, радиолокация, гидроакустика, фильтрация спама, медицинская диагностика и т.д.) и на этот счет существует большое количество работ.

Рассмотрим вспомогательное случайное блуждание $\{S_n,\, n \geq 1\}$, в котором

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n, \qquad X_i = \log \frac{f_2(Y_i)}{f_1(Y_i)}.$$

Здесь f_1 и f_2 суть плотности F_1 и F_2 относительно некоторой меры μ. Это случайное блуждание S_n имеет отрицательный снос при $n < m$, так как

$$\mathbf{E}X_n = \int \log \frac{f_2}{f_1} f_1 d\mu = \int \log \left(1 + \frac{f_2}{f_1} - 1\right) f_1 d\mu$$

$$< \int \left(\frac{f_2}{f_1} - 1\right) f_1 d\mu = 0.$$

Похожие рассуждения показывают, что $\mathbf{E}X_n > 0$ для $n \geq m$.

E. Page предложил алгоритм, который получил название процедуры кумулятивных сумм. Он состоит в следующем. Решение о том, что разладка имела место, принимается в тот момент времени T, когда траектория введенного в случайного блуждания S_n после достижения своего минимума продвинется вверх на значительную величину. Более точно,

$$T = T(b) = \min\{n \geq 1 : \; S_n - \min_{0 \leq k \leq n} S_k \geq b\}$$

при подходящем выборе числа $b > 0$. Поскольку движение траектории вниз нас не должно беспокоить, то каждый раз на n-м шаге S_n сравнивается с уже достигнутым минимумом траектории. Это эквивалентно тому, что каждый раз при достижении минимума траектории начало координат перемещается в эту уже достигнутую точку минимума, и относительно нее отслеживается движение вверх.

Момент T можно также задать как

$$T = \inf\{n \geq 1 : W_n \geq b\}.$$

Уровень b должен быть выбран так, чтобы до момента m величина $\mathbf{E}T$ (среднее время до ложного срабатывания) оказывалась достаточно большой, но начиная с момента m задержка до срабатывания детектора была малой. Процедура CUSUM исследовалась многими авторами (D. Siegmund (1985), M. Pollak (1985, 1987), G. Moustakides (1986), and others). Асимптотические разложения для характеристик CUSUM процедуры были найдены В.И. Лотовым в 1992 (прямая и обратная теоремы).

Известно, что нахождение явных выражений для распределений разного сорта граничных функционалов для случайных блужданий доступно только в некоторых частных ситуациях. То же самое относится и к изучению распределения T и $\mathbf{E}T$. По этой причине акцент в исследованиях обычно перемещается на построение аппроксимационных формул, и, в частности, на изучение асимптотики изучаемых величин в тех случаях, когда асимптотический анализ возможен.

Известно, что нахождение явных выражений для распределений разного сорта граничных функционалов для случайных блужданий доступно только в некоторых частных ситуациях. То же самое относится и к изучению распределения T и $\mathbf{E}T$. По этой причине акцент в исследованиях обычно перемещается на построение аппроксимационных формул, и, в частности, на изучение асимптотики изучаемых величин в тех случаях, когда асимптотический анализ возможен.

Ясно, что любые асимптотические результаты неизбежно содержат остаточные члены. Обычно указывается порядок убывания этих остаточных членов, однако оценка их реальной величины требует дополнительных рассмотрений.

Известно, что нахождение явных выражений для распределений разного сорта граничных функционалов для случайных блужданий доступно только в некоторых частных ситуациях. То же самое относится и к изучению распределения T и $\mathbf{E}T$. По этой причине акцент в исследованиях обычно перемещается на построение аппроксимационных формул, и, в частности, на изучение асимптотики изучаемых величин в тех случаях, когда асимптотический анализ возможен.

Ясно, что любые асимптотические результаты неизбежно содержат остаточные члены. Обычно указывается порядок убывания этих остаточных членов, однако оценка их реальной величины требует дополнительных рассмотрений.

В связи с этим естественным дополнением к имеющимся асимптотическим результатам является нахождение неравенств для $\mathbf{E}T$.

Перейдём к рассмотрению собственно случайного блуждания $\{S_n\}$.
Обозначим

$$N = N(b) = \inf\{n \geq 1 : \ S_n \notin [0, b)\}.$$

Легко показать, что $T = N_1 + \cdots + N_\nu, \quad N_i \stackrel{d}{=} N$, где

$$\mathbf{P}(\nu = k) = \big(\mathbf{P}(S_N < 0)\big)^{k-1}\mathbf{P}(S_N \geq b), \quad \mathbf{E}\nu = \frac{1}{\mathbf{P}(S_N \geq b)}.$$

и, согласно тождеству Вальда, имеем

$$\mathbf{E}T = \mathbf{E}N\mathbf{E}\nu = \frac{\mathbf{E}N}{\mathbf{P}(S_N \geq b)}.$$

Пусть τ это перескок за границы полосы:

$$\tau = \begin{cases} S_N, & \text{if } S_N < 0, \\ \\ S_N - b, & \text{if } S_N \geq b. \end{cases}$$

Пусть τ это перескок за границы полосы:

$$\tau = \begin{cases} S_N, & \text{if } S_N < 0, \\ S_N - b, & \text{if } S_N \geq b. \end{cases}$$

Обозначим $a = \mathbf{E}X$ и снова применим тождество Вальда. Тогда

$$a\mathbf{E}\,N = \mathbf{E}\,S_N = \mathbf{E}\,(b + \tau;\, S_N \geq b) + \mathbf{E}\,(\tau;\, S_N < 0)$$

и

$$a\mathbf{E}T = \frac{a\mathbf{E}N}{\mathbf{P}(S_N \geq b)} = b + \frac{\mathbf{E}\,(\tau;\, S_N \geq b)}{\mathbf{P}(S_N \geq b)} - \frac{\mathbf{E}\,(|\tau|;\, S_N < 0)}{\mathbf{P}(S_N \geq b)}.$$

Далее нам необходимо оценить два последних слагаемых.

В задачах с двумя границами, первый шаг обычно состоит в выражении исследуемых характеристик через функционалы (от траекторий), возникающие в одностраничных задачах. Таких, как например, перескок через границу и супремум или инфимум траектории.

В задачах с двумя границами, первый шаг обычно состоит в выражении исследуемых характеристик через функционалы (от траекторий), возникающие в одноограничных задачах. Таких, как например, перескок через границу и супремум или инфимум траектории. Положим сначала, что $a = \mathbf{E}X > 0$ и попытаемся оценить $\mathbf{E}T$ сверху. Начнем с $\mathbf{P}(S_N \geq b)$.

Обозначим

$$Q(x) := \mathbf{P}(\sup_{n\geq 0}(-S_n) > x), \qquad x \geq 0, \qquad p := Q(0) < 1.$$

Theorem

Пусть $\mathbf{E}X > 0$. *Тогда*

$$\mathbf{P}(S_N \geq b) \leq \beta(b) := \frac{1-p}{1-Q(b)}. \qquad (1)$$

Если дополнительно $\mathbf{E}(X^+)^2 < \infty$ *и функция* $Q(x)$ *является выпуклой вниз при* $x > 0$, *то*

$$\mathbf{P}(S_N \geq b) \geq \alpha(b) := \frac{1-p}{1-Q(b+d)}, \quad d := \frac{\mathbf{E}(X^+)^2}{\mathbf{E}X}. \qquad (2)$$

Явные формулы для распределения супремума траектории доступны далеко не всегда. В то же время, если дополнительно предположить, что левый хвост распределения случайной величины X удовлетворяет условию Крамéра, то функция $Q(x)$ оказывается зажатой между двумя экспонентами.

Явные формулы для распределения супремума траектории доступны далеко не всегда. В то же время, если дополнительно предположить, что левый хвост распределения случайной величины X удовлетворяет условию Крамéра, то функция $Q(x)$ оказывается зажатой между двумя экспонентами.
Действительно, обозначим $\psi(\lambda) := \mathbf{E}e^{\lambda(-X)}$ и предположим, что

$$\psi(\lambda_+) < \infty \quad \text{для некоторого } \lambda_+ > 0, \qquad \psi(\lambda_+) \geq 1. \tag{3}$$

Тогда можно показать, что существуют такие константы $\mu > 0$ и $s \leq 1$, что

$$se^{-\mu x} \leq Q(x) \leq e^{-\mu x}, \qquad x > 0.$$

Таким образом получаем менее точные, но гораздо более наглядные границы.

Тем самым приходим к следующему утверждению.

Theorem

Пусть $\mathbf{E}X > 0$, $\mathbf{E}(X^+)^2 < \infty$ *и левый хвост распределения случайной величины* X *удовлетворяет условию Крамéра. Тогда*

$$\mathbf{P}(S_N \geq b) \leq \beta(b) \leq \frac{1-p}{1-e^{-\mu b}}$$

$$\mathbf{P}(S_N \geq b) \geq \alpha(b) \geq \frac{1-p}{1-se^{-\mu(b+d)}}, \qquad d = \frac{\mathbf{E}(X^+)^2}{\mathbf{E}X}.$$

Заметим, что мы можем также рассматривать случайное блуждание из "обрезанных" слагаемых $S'_n = X'_1 + \dots + X'_n$, где

$$X'_i = X_i I_{\{-c_1 < X_i < -c_2\}} - c_1 I_{\{X_i \le -c_1\}} + c_2 I_{\{X_i \ge c_2\}},$$

для произвольных $c_i \ge b$, $i = 1, 2$.
Положив

$$N' = \inf\{n \ge 1 : S'_n \notin [0, b)\}.$$

Lemma

С вероятностью единица $N = N'$, а также $\mathbf{P}(S_N \ge b) = \mathbf{P}(S'_{N'} \ge b)$.

Это означает, что мы также можем пользоваться формулой

$$\mathbf{E}T = \frac{\mathbf{E}N'}{\mathbf{P}(S'_{N'} \ge b)},$$

Вспомним, что

$$a\mathbf{E}T = \frac{a\mathbf{E}N}{\mathbf{P}(S_N \geq b)} = b + \frac{\mathbf{E}\left(\tau;\ S_N \geq b\right)}{\mathbf{P}(S_N \geq b)} - \frac{\mathbf{E}\left(|\tau|;\ S_N < 0\right)}{\mathbf{P}(S_N \geq b)},$$

где τ есть перескок через границу. Нас остаётся оценить числители двух последних слагаемых.
Для оценки $\mathbf{E}\left(\tau;\ S_N \geq b\right)$ сверху, мы вводим

$$\eta_+ = \min\{n \geq 1 :\ S_n \geq b\}, \qquad \chi_+ = S_{\eta_+} - b,$$

Здесь через χ_+ обозначен перескок в однограничной задаче.

Мы имеем

$$\mathbf{E}\,(\tau;\, S_N \geq b) = \mathbf{E}\,(\chi_+;\, S_N \geq b) = \mathbf{E}\chi_+ I_{\{S_N \geq b\}},$$

и, по неравенству Коши—Буняковского,

$$\mathbf{E}\,(\tau;\, S_N \geq b) \leq \sqrt{\mathbf{E}(I_{\{S_N \geq b\}})^2 \mathbf{E}\chi_+^2} = \sqrt{\mathbf{P}(S_N \geq b)\mathbf{E}\chi_+^2}.$$

Применим далее неравенство G. Lorden (1970). Если $\mathbf{E}(X^+)^3 < \infty$, то

$$\mathbf{E}\chi_+^2 \leq l := \frac{4\mathbf{E}(X^+)^3}{3\mathbf{E}X}$$

равномерно по b. А значит,

$$\frac{\mathbf{E}\,(\tau;\, S_N \geq b)}{\mathbf{P}(S_N \geq b)} \leq \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{\mathbf{P}(S_N \geq b)}}.$$

Для оценки $\mathbf{E}\,(|\tau|;\, S_N < 0)$ снизу введем события

$$A_1 = \{X_1 < 0\}, \quad A_2 = \{0 \le X_1 < b,\, X_1 + X_2 < 0\}, \ \ldots .$$

Легко показать, что

$$\{S_N < 0\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Таким образом, для любого $n \ge 1$,

$$\mathbf{E}\big(|\tau|; S_N < 0\big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{E}\big(|\tau|; A_i\big) \ge m(n) := \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}\big(|\tau|; A_i\big).$$

Таким образом, имеем

$$a\mathbf{E}T \le b + \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{\mathbf{P}(S_N \ge b)}} - \frac{m(n)}{\mathbf{P}(S_N \ge b)}.$$

Применяя также оценки $\alpha(b) \le \mathbf{P}(S_N \ge b) \le \beta(b)$ мы получаем:

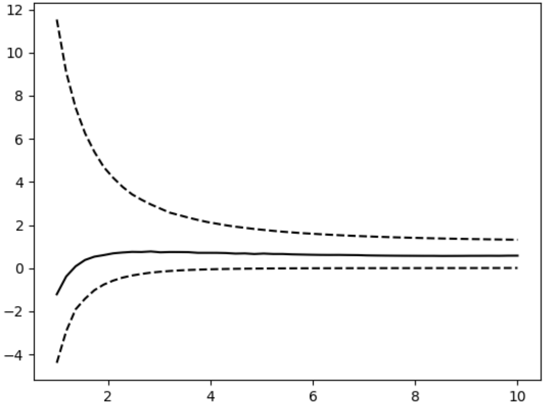
Theorem

Пусть $a = \mathbf{E}X > 0$ *и* $\mathbf{E}(X^+)^{2+\delta} < \infty$. *Тогда для любого* $n \ge 1$ *имеет место оценка*

$$a\mathbf{E}T \le b + \left(\frac{l}{\alpha(b)}\right)^{1/(1+\delta)} - \frac{m(n)}{\beta(b)}, \qquad (4)$$

где $l := \frac{3+\delta}{2+\delta} \cdot \frac{\mathbf{E}(X^+)^{2+\delta}}{\mathbf{E}X}$.

Похожие рассуждения приводят к нижней оценке для $\mathbf{E}T$. В презентации мы опускаем их выражения, но в замен приводим иллюстрирующие их графики.
Этот график показывает точность двусторонних оценок для $\mathbf{E}T - b/a$ в зависимости от $a = \mathbf{E}X$ с фиксированным уровнем b в случае нормального распределения скачков с фиксированной дисперсией 10.



Большие значения $\mathbf{E}X$ обычно соответствуют большой разнице между распределениями F_1 and F_2 в задаче о разладке.

Theorem

Пусть $\mathbf{E}X < 0$, $\mathbf{E}(X^-)^2 < \infty$ *и правый хвост распределения случайной величины* X *удовлетворяет условию Краме́ра. Тогда*

$$\mathbf{P}(S_N \geq b) \leq \frac{e^{-\nu b}(1 - re^{-\nu h})}{1 - re^{-\nu(b+h)}}, \qquad h := \frac{\mathbf{E}(X^-)^2}{|\mathbf{E}X|}, \tag{5}$$

где

$$r^{-1} = \sup_{0<t<b} \mathbf{E}(e^{\nu(X-t)}|X > t) \geq 1,$$

а $\nu > 0$ *такая, что* $\mathbf{E}e^{\nu X} = 1$.

Theorem

Пусть $\mathbf{E}X < 0$, *и* $\mathbf{E}(X^-)^2 < \infty$ *и* $\mathbf{P}(X \le b) = 1$. *Тогда для любого* $n \ge 1$

$$|a|\mathbf{E}T \ge \frac{m(n)}{\mathbf{P}(S_N \ge b)} - 2b \ge \frac{m(n)e^{\nu b}(1 - re^{-\nu(b+h)})}{1 - re^{-\nu h}} - 2b, \tag{6}$$

числа ν, r *и* h *определены в предыдущей теореме.*