Верхние и нижние оценки хвостовых вероятностей для частичных максимумов случайного числа случайных блужданий при тяжёлом хвосте распределения приращений

Павел Игоревич Тесемников[1] и Сергей Георгиевич Фосс[2]

Боровковские Чтения
25 августа 2022 г.

[1]Новосибирский Государственный Университет и Институт Математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск, Россия

[2]Университет Хериот-Ватта, Эдинбург, Великобритания и Институт Математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск, Россия

Структура доклада

ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Рассмотрим семейство $\{\xi, \xi_{i,j}\}_{i,j\geq 1}$ **i.i.d.** ($\xi \sim F$) случайных величин (с.в.) с **нулевым средним**

$$\mathbb{E}\xi = 0. \tag{1}$$

ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Рассмотрим семейство $\{\xi, \xi_{i,j}\}_{i,j\geq 1}$ **i.i.d.** ($\xi \sim F$) случайных величин (с.в.) с **нулевым средним**

$$\mathbb{E}\xi = 0. \tag{1}$$

Для любой $g : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ определим семейства (по i) **g-смещённых случайных блужданий**:

$$\boxed{S^g_{i,0} = 0, \qquad S^g_{i,k} = \sum_{j=1}^{k} \xi_{i,j} - g(k), \;\; k \geq 1}$$

ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Рассмотрим семейство $\{\xi, \xi_{i,j}\}_{i,j\geq 1}$ **i.i.d.** ($\xi \sim F$) случайных величин (с.в.) с **нулевым средним**

$$\mathbb{E}\xi = 0. \tag{1}$$

Для любой $g : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ определим семейства (по i) **g-смещённых случайных блужданий**:

$$\boxed{S^g_{i,0} = 0, \qquad S^g_{i,k} = \sum_{j=1}^{k} \xi_{i,j} - g(k), \;\; k \geq 1}$$

и соответствующих **частичных максимумов**:

$$\boxed{M^g_{i,n} = \max_{0\leq k\leq n} S^g_{i,k}, \;\; n \geq 1.}$$

ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Пусть

ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Пусть

- Z – **положительная целочисленная** с.в. такая, что

$$Z \text{ не зависит от } \{\xi_{i,j}\}_{i,j\geq 1} \tag{2}$$

и

$$\mathbb{E}Z < \infty. \tag{3}$$

ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Пусть

- Z – **положительная целочисленная** с.в. такая, что

$$Z \text{ не зависит от } \{\xi_{i,j}\}_{i,j\geq 1} \tag{2}$$

  и

$$\mathbb{E}Z < \infty. \tag{3}$$

- $\mu \leq \infty$ – **неотрицательная целочисленная** с.в.

Описание модели

Пусть

- Z – **положительная целочисленная** с.в. такая, что

$$Z \text{ не зависит от } \{\xi_{i,j}\}_{i,j\geq 1} \tag{2}$$

и

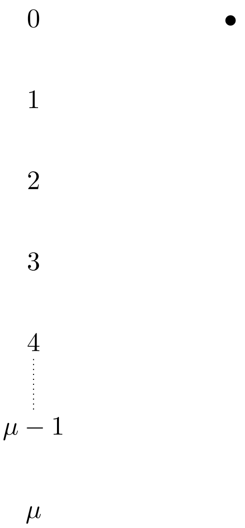
$$\mathbb{E}Z < \infty. \tag{3}$$

- $\mu \leq \infty$ – **неотрицательная целочисленная** с.в.

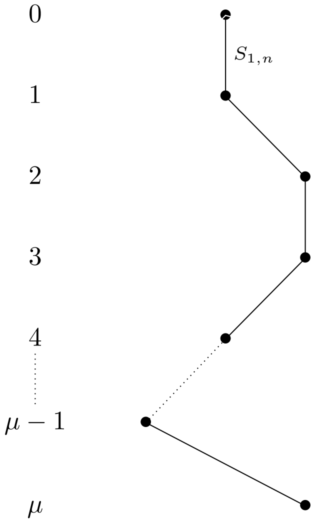
Мы изучаем **асимптотику хвоста распределения**

$$\boxed{R^g_{\mu,Z} = \max_{1\leq i\leq Z} M^g_{i,\mu}.}$$

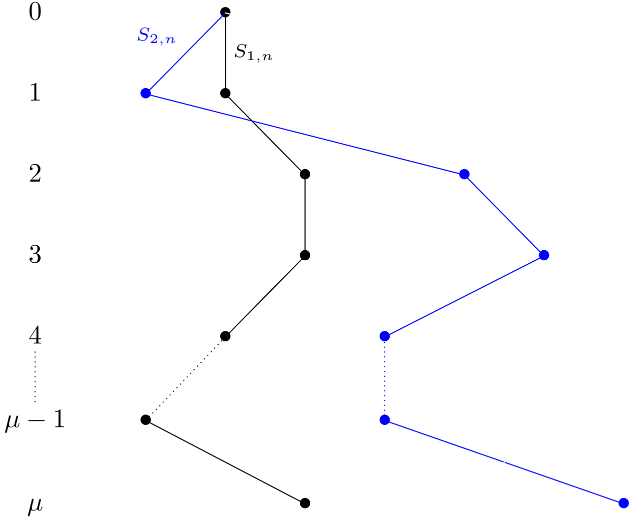
КАРТИНКА



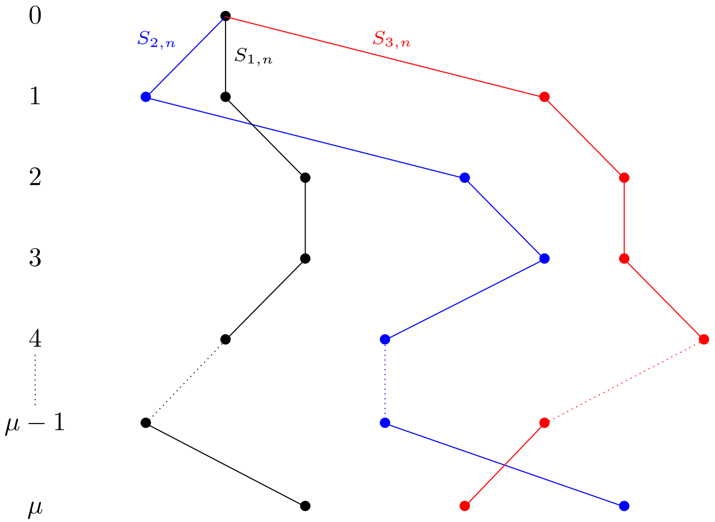
КАРТИНКА



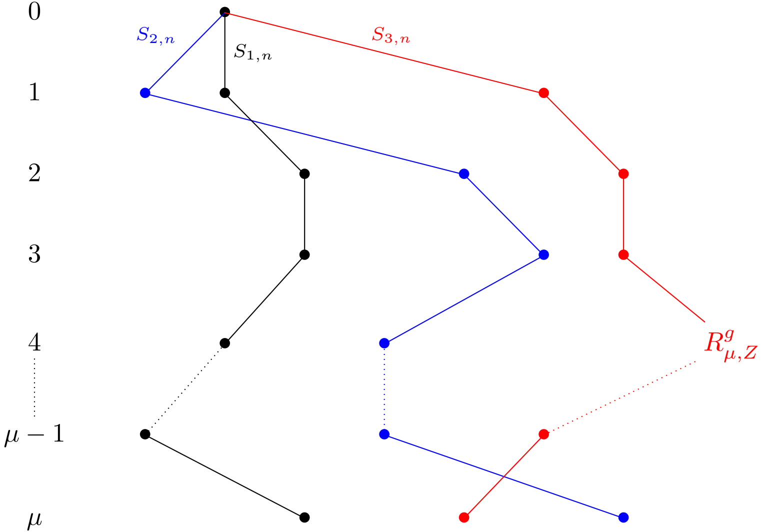
КАРТИНКА



КАРТИНКА



КАРТИНКА



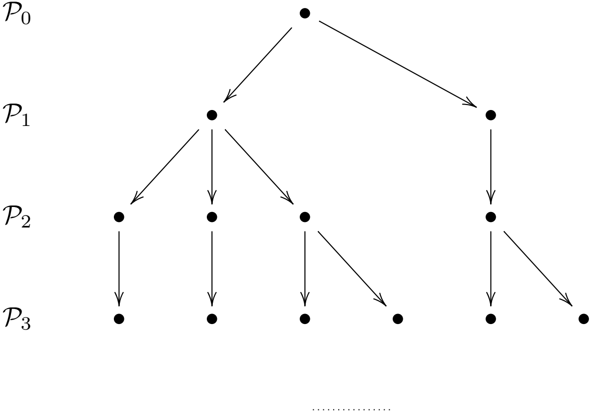
МОТИВАЦИЯ

Рассмотрим **затухающее ветвящееся случайное блуждание в меняющейся среде:**

МОТИВАЦИЯ

Рассмотрим **затухающее ветвящееся случайное блуждание в меняющейся среде:**

Z_n — ВПМС



Мотивация

Предполагаем, что

$$\nu = \inf\{n \geq 1 : Z_n = Z_{n+1} = \ldots\} < \infty \text{ п.н.}$$

МОТИВАЦИЯ

Предполагаем, что

$$\nu = \inf\{n \geq 1 : Z_n = Z_{n+1} = \ldots\} < \infty \text{ п.н.}$$

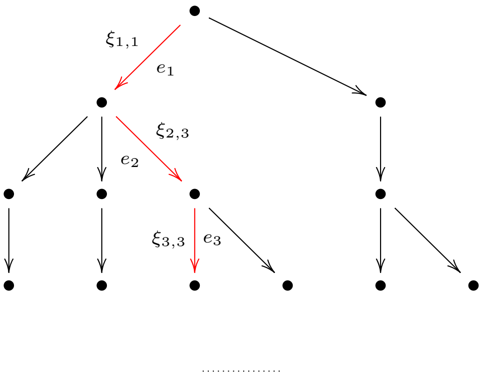
$\{Z_n\}$

МОТИВАЦИЯ

Предполагаем, что

$$\nu = \inf\{n \geq 1 : Z_n = Z_{n+1} = \ldots\} < \infty \text{ п.н.}$$

$\{Z_n\} \leftrightarrow \mathcal{T} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$



$\pi = (e_1, e_2, \ldots)$ – путь.

$e \in \mathcal{E} \leftrightarrow \xi_{n(e),j(e)} \sim F$, $\mathbb{E}\xi_{1,1} = 0$.

$\xi_{n,j}, n, j \geq 1$ независимы.

$\{\xi_{n,j}\}$ и $\{\zeta_{n,j}\}$ независимы.

g-смещённое ВСБ:

$$S^g(\pi) = \sum_{e \in \pi} \xi_{n(e),j(e)} - g(|\pi|).$$

МОТИВАЦИЯ

Положим

$$R_n^g = \sup_{\pi:|\pi|\le n} S^g(\pi).$$

МОТИВАЦИЯ

Положим

$$R_n^g = \sup_{\pi : |\pi| \le n} S^g(\pi).$$

Задача: для «произвольного» момента времени $\mu \le \infty$ исследовать

$$\boxed{\mathbb{P}\left(R_\mu^g > x\right) \sim \, ? \qquad \text{при } x \to \infty.}$$

МОТИВАЦИЯ

Положим

$$R_n^g = \sup_{\pi:|\pi|\le n} S^g(\pi).$$

Задача: для «произвольного» момента времени $\mu \le \infty$ исследовать

$$\boxed{\mathbb{P}\left(R_\mu^g > x\right) \sim \, ? \qquad \text{при } x \to \infty.}$$

Рассматриваемая модель:

- **Частный случай** модели ВСБ.

МОТИВАЦИЯ

Положим

$$R_n^g = \sup_{\pi:|\pi|\leq n} S^g(\pi).$$

Задача: для «произвольного» момента времени $\mu \leq \infty$ исследовать

$$\boxed{\mathbb{P}\left(R_\mu^g > x\right) \sim ? \qquad \text{при } x \to \infty.}$$

Рассматриваемая модель:

- **Частный случай** модели ВСБ.
- С помощью **соображений каплинга** позволяет получать ответ для модели ВСБ в случае «больших» μ.

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ С ТЯЖЁЛЫМИ ХВОСТАМИ

Пусть η, η_1, η_2 – i.i.d., $\eta \sim G$, $\overline{G}(x) := 1 - G(x)$.

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ С ТЯЖЁЛЫМИ ХВОСТАМИ

Пусть η, η_1, η_2 – i.i.d., $\eta \sim G$, $\overline{G}(x) := 1 - G(x)$.

Распределение G имеет **тяжёлый правый хвост**, если

$$\mathbb{E}e^{\lambda\eta} = \infty \text{ для любого } \lambda > 0.$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ С ТЯЖЁЛЫМИ ХВОСТАМИ

Пусть η, η_1, η_2 – i.i.d., $\eta \sim G$, $\overline{G}(x) := 1 - G(x)$.

Распределение G имеет **тяжёлый правый хвост**, если

$$\mathbb{E}e^{\lambda\eta} = \infty \text{ для любого } \lambda > 0.$$

Распределение G имеет **длинный правый хвост** $(G \in \mathcal{L})$, если $\overline{G}(x) > 0$ при всех $x > 0$ и при любом $y > 0$ справедливо

$$\overline{G}(x+y) \sim \overline{G}(x) \quad \text{при } x \to \infty.$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ С ТЯЖЁЛЫМИ ХВОСТАМИ

Пусть η, η_1, η_2 – i.i.d., $\eta \sim G$, $\overline{G}(x) := 1 - G(x)$.

Распределение G имеет **тяжёлый правый хвост**, если

$$\mathbb{E}e^{\lambda\eta} = \infty \text{ для любого } \lambda > 0.$$

Распределение G имеет **длинный правый хвост** ($G \in \mathcal{L}$), если $\overline{G}(x) > 0$ при всех $x > 0$ и при любом $y > 0$ справедливо

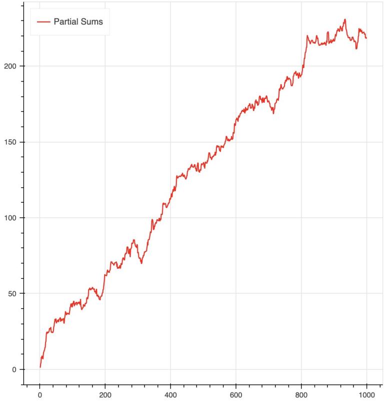
$$\overline{G}(x+y) \sim \overline{G}(x) \quad \text{при } x \to \infty.$$

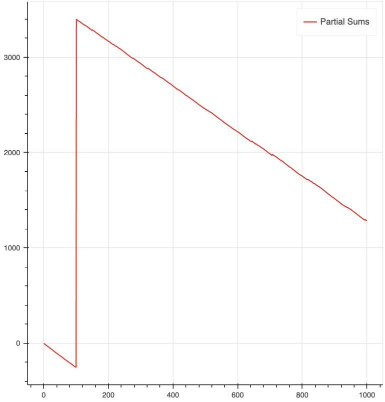
Распределение G – **субэкспоненциально** ($G \in \mathcal{S}$), если $G \in \mathcal{L}$ и

$$\mathbb{P}\left(\eta_1 + \eta_2 > x\right) \equiv \overline{G * G}(x) \sim 2\overline{G}(x) \equiv 2\mathbb{P}\left(\eta_1 > x\right) \quad \text{при } x \to \infty.$$

$$\mathcal{S} \subsetneq \mathcal{L} \subsetneq \mathcal{H}$$

ПРИНЦИП ОДНОГО БОЛЬШОГО СКАЧКА





РАСПРЕДЕЛЕНИЯ С ТЯЖЁЛЫМИ ХВОСТАМИ: ПРИМЕРЫ

- **Правильно меняющиеся** распределения:

$$\overline{F}(x) \sim L(x)x^{-\alpha} \qquad \text{при } x \to \infty,$$

где L – ММФ, а $\alpha > 0$.

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ С ТЯЖЁЛЫМИ ХВОСТАМИ: ПРИМЕРЫ

- **Правильно меняющиеся** распределения:

  $$\overline{F}(x) \sim L(x)x^{-\alpha} \qquad \text{при } x \to \infty,$$

  где L – ММФ, а $\alpha > 0$.

- Распределение **Вейбулла**:

  $$\overline{F}(x) = e^{-x^{\beta}}, x > 0$$

  при $\beta \in (0, 1)$.

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ С ТЯЖЁЛЫМИ ХВОСТАМИ: ПРИМЕРЫ

- **Правильно меняющиеся** распределения:

$$\overline{F}(x) \sim L(x)x^{-\alpha} \qquad \text{при } x \to \infty,$$

  где L – ММФ, а $\alpha > 0$.

- Распределение **Вейбулла**:

$$\overline{F}(x) = e^{-x^{\beta}}, x > 0$$

  при $\beta \in (0, 1)$.

- **Логнормальное** распределение.

АСИМПТОТИКА ХВОСТА САМОЙ ПРАВОЙ ТОЧКИ

Всюду далее мы предполагаем, что F имеет **тяжёлый правый хвост**.

АСИМПТОТИКА ХВОСТА САМОЙ ПРАВОЙ ТОЧКИ

Всюду далее мы предполагаем, что F имеет **тяжёлый правый хвост**.

Типичный ответ в этом случае:

$$\boxed{\mathbb{P}\left(R^g_{\mu,Z} > x\right) \sim H^g_{\mu,Z}(x) \qquad \text{при } x \to \infty,}$$

где

$$H^g_{\mu,Z}(x) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{E}\left[Z\mathbb{I}(\mu \geq n)\right] \overline{F}(x + g(n)).$$

КЛАСС МОМЕНТОВ μ

Мы рассматриваем моменты μ, **условно не зависящие от будущего** приращений $\{\xi_{i,j}\}$ при фиксации Z.

КЛАСС МОМЕНТОВ μ

Мы рассматриваем моменты μ, **условно не зависящие от будущего** приращений $\{\xi_{i,j}\}$ при фиксации Z.

Т.е. μ такие, что для любого $n \geq 1$, и для любых событий

$$A \in \sigma(\xi_{i,j}, i \leq n, j \geq 1;\ \mathbb{I}(\mu \leq n);\ Z),$$
$$B \in \sigma(\xi_{i,j}, i > n, j \geq 1;\ Z)$$

справедливо

$$\mathbb{P}\left(AB|Z\right) = \mathbb{P}\left(A|Z\right)\mathbb{P}\left(B|Z\right) \text{ п.н.}$$

КЛАСС МОМЕНТОВ μ

Мы рассматриваем моменты μ, **условно не зависящие от будущего** приращений $\{\xi_{i,j}\}$ при фиксации Z.

Т.е. μ такие, что для любого $n \geq 1$, и для любых событий

$$A \in \sigma(\xi_{i,j}, i \leq n, j \geq 1;\ \mathbb{I}(\mu \leq n);\ Z),$$
$$B \in \sigma(\xi_{i,j}, i > n, j \geq 1;\ Z)$$

справедливо

$$\mathbb{P}\left(AB|Z\right) = \mathbb{P}\left(A|Z\right)\mathbb{P}\left(B|Z\right) \text{ п.н.}$$

Обозначаем класс таких моментов $\mathcal{F}(Z)$, а через

$$\mathcal{F}_\varphi(Z) = \{\mu \in \mathcal{F}(Z) : \mu \leq \varphi \text{ п.н.}\}$$

КЛАСС МОМЕНТОВ μ

Типичная ситуация: $\mu = f(Z, \{\xi_{i,j}\}_{i,j\geq 1})$, например,

$$\tau_{c,Z} = \inf\{n \geq 1 : S_{i,n}^{\widehat{c}} \leq 0 \text{ при всех } i = 1, 2, \ldots, Z\},$$

где $c > 0$.

КЛАСС МОМЕНТОВ μ

Типичная ситуация: $\mu = f(Z, \{\xi_{i,j}\}_{i,j\geq 1})$, например,

$$\tau_{c,Z} = \inf\{n \geq 1 : S^{\widehat{c}}_{i,n} \leq 0 \text{ при всех } i = 1, 2, \ldots, Z\},$$

где $c > 0$. Эти моменты используются для получения нижней оценки!

КЛАСС МОМЕНТОВ μ

Типичная ситуация: $\mu = f(Z, \{\xi_{i,j}\}_{i,j\geq 1})$, например,

$$\tau_{c,Z} = \inf\{n \geq 1 : S_{i,n}^{\widehat{c}} \leq 0 \text{ при всех } i = 1, 2, \ldots, Z\},$$

где $c > 0$. Эти моменты используются для получения нижней оценки!

Утверждение (ПТ&СФ, 2022)

Пусть выполнено условие (1), $c > 0$ *и* $N \geq 1$ *– произвольное целое число. Тогда при всех* $k \geq 1$, *если* $\mathbb{E}|\xi|^k < \infty$, *то*

$$\mathbb{E}\tau_{c,N}^k < \infty.$$

Структура доклада

«ОДНОМЕРНЫЙ» СЛУЧАЙ

Пусть $Z = 1$ п.н.

$$\boxed{R^g_{\mu,1} = M^g_\mu,}$$

где M соответствует случаю **классического случайного блуждания $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ с i.i.d. приращениями.**

ВЕРАВЕРБЕКЕ (1977)

Обозначим через $\widehat{c}(n) := cn$ и $\overline{F}_I(x) = \min\{1, \int_x^\infty \overline{F}(y)dy\}$ – интегральный хвост.

ВЕРАВЕРБЕКЕ (1977)

Обозначим через $\widehat{c}(n) := cn$ и $\overline{F}_I(x) = \min\{1, \int_x^\infty \overline{F}(y)dy\}$ – интегральный хвост.

Важное свойство: $\overline{F}(x) = o(\overline{F}_I(x))$.

ВЕРАВЕРБЕКЕ (1977)

Обозначим через $\widehat{c}(n) := cn$ и $\overline{F}_I(x) = \min\{1, \int_x^\infty \overline{F}(y)dy\}$ – интегральный хвост.

Важное свойство: $\overline{F}(x) = o(\overline{F}_I(x))$.

Теорема (N. Veraverbeke, 1977)

Пусть выполнено (1) и $F_I \in \mathcal{S}$. Тогда при всех $c > 0$

$$\mathbb{P}\left(M_\infty^{\widehat{c}} > x\right) \sim \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq 1}\{\xi_n > x + cn\}\right) \sim \sum_{n\geq 1}\overline{F}(x+cn) \sim \frac{1}{c}\cdot\overline{F}_I(x)$$

при $x \to \infty$.

АСИМПТОТИКА МАКСИМУМА ПО КОНЕЧНОМУ ИНТЕРВАЛУ ВРЕМЕНИ

- $\mu = n$ п.н.

АСИМПТОТИКА МАКСИМУМА ПО КОНЕЧНОМУ ИНТЕРВАЛУ ВРЕМЕНИ

- $\mu = n$ п.н.: $\mathbb{P}(M_n^{\widehat{c}} > x) \sim n\overline{F}(x)$ при $x \to \infty$ при всех $c \in \mathbb{R}$ – **прямое следствие определения.**

АСИМПТОТИКА МАКСИМУМА ПО КОНЕЧНОМУ ИНТЕРВАЛУ ВРЕМЕНИ

- $\mu = n$ п.н.: $\mathbb{P}(M_n^{\widehat{c}} > x) \sim n\overline{F}(x)$ при $x \to \infty$ при всех $c \in \mathbb{R}$ – **прямое следствие определения.**
- μ **не зависит** от $\{\xi_i,\ i \geq 1\}$ и $\mathbb{E}e^{\lambda\mu} < \infty$ для некоторого $\lambda > 0$:

АСИМПТОТИКА МАКСИМУМА ПО КОНЕЧНОМУ ИНТЕРВАЛУ ВРЕМЕНИ

- $\mu = n$ п.н.: $\mathbb{P}(M_n^{\widehat{c}} > x) \sim n\overline{F}(x)$ при $x \to \infty$ при всех $c \in \mathbb{R}$ – **прямое следствие определения.**
- μ **не зависит** от $\{\xi_i,\ i \geq 1\}$ и $\mathbb{E}e^{\lambda\mu} < \infty$ для некоторого $\lambda > 0$:

Kesten's bound

Для любого $\varepsilon > 0$ существует $c(\varepsilon) > 0$ такая, что для всех x, n,

$$\overline{F^{*n}}(x) \leq c(\varepsilon)(1+\varepsilon)^n \cdot \overline{F}(x).$$

АСИМПТОТИКА МАКСИМУМА ПО КОНЕЧНОМУ ИНТЕРВАЛУ ВРЕМЕНИ

- $\mu = n$ п.н.: $\mathbb{P}(M_n^{\widehat{c}} > x) \sim n\overline{F}(x)$ при $x \to \infty$ при всех $c \in \mathbb{R}$ – **прямое следствие определения.**
- μ **не зависит** от $\{\xi_i,\ i \geq 1\}$ и $\mathbb{E}e^{\lambda\mu} < \infty$ для некоторого $\lambda > 0$:

Kesten's bound

Для любого $\varepsilon > 0$ существует $c(\varepsilon) > 0$ такая, что для всех x, n,

$$\overline{F^{*n}}(x) \leq c(\varepsilon)(1+\varepsilon)^n \cdot \overline{F}(x).$$

$\Downarrow$ (при всех $c \in \mathbb{R}$)

$$\boxed{\mathbb{P}\left(M_\mu^{\widehat{c}} > x\right) \sim \mathbb{E}\mu \cdot \overline{F}(x) \qquad \text{при } x \to \infty.}$$

АСМУССЕН (1998)

Положим

$$\tau = \inf\{n \geq 1 : S_n^{\widehat{c}} < 0\}.$$

АСМУССЕН (1998)

Положим

$$\tau = \inf\{n \geq 1 : S_n^{\widehat{c}} < 0\}.$$

Справедлива

Теорема (S. Asmussen, 1998)

Пусть выполнено (1) и $F \in \mathcal{S}^*$. Тогда, для любого $c > 0$,

$$\mathbb{P}\left(M_\tau^{\widehat{c}} > x\right) \sim \mathbb{E}\tau \cdot \overline{F}(x) \qquad \text{при } x \to \infty.$$

ФОСС И ЗАХАРИ (2003)

Пусть μ **не зависит от будущего** приращений ξ_k $(\mu \in \mathcal{F} = \mathcal{F}(1))$

ФОСС И ЗАХАРИ (2003)

Пусть μ **не зависит от будущего** приращений ξ_k ($\mu \in \mathcal{F} = \mathcal{F}(1)$), т.е. при любом $n \geq 1$ сигма алгебры

$$\sigma(\{\xi_k, k \leq n; \mathbb{I}(\mu \leq n)\}) \text{ и } \sigma(\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots)$$

независимы.

ФОСС И ЗАХАРИ (2003)

Пусть μ **не зависит от будущего** приращений ξ_k $(\mu \in \mathcal{F} = \mathcal{F}(1))$, т.е. при любом $n \geq 1$ сигма алгебры

$$\sigma(\{\xi_k, k \leq n; \mathbb{I}(\mu \leq n)\}) \text{ и } \sigma(\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots)$$

независимы.

Теорема (S. Foss, S. Zachary, 2003)

Пусть выполнено (1).

(i) *Если* $F \in \mathcal{S}^*$, *то для любого* $\mu \in \mathcal{F}$ *такого, что* $\mathbb{E}\mu < \infty$ *и любого* $c > 0$,

$$\mathbb{P}\left(M_\mu^{\widehat{c}} > x\right) \sim \mathbb{E}\mu \cdot \overline{F}(x) \qquad \text{при } x \to \infty. \tag{4}$$

ФОСС И ЗАХАРИ (2003)

Пусть μ **не зависит от будущего** приращений ξ_k ($\mu \in \mathcal{F} = \mathcal{F}(1)$), т.е. при любом $n \geq 1$ сигма алгебры

$$\sigma(\{\xi_k, k \leq n; \mathbb{I}(\mu \leq n)\}) \text{ и } \sigma(\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots)$$

независимы.

Теорема (S. Foss, S. Zachary, 2003)

Пусть выполнено (1).

(i) *Если $F \in \mathcal{S}^*$, то для любого $\mu \in \mathcal{F}$ такого, что $\mathbb{E}\mu < \infty$ и любого $c > 0$,*

$$\mathbb{P}\left(M_\mu^{\widehat{c}} > x\right) \sim \mathbb{E}\mu \cdot \overline{F}(x) \qquad \text{при } x \to \infty. \tag{4}$$

(ii) *Если эквивалентность (4) выполнена для некоторых $\mu \in \mathcal{F}$ и $c > 0$ таких, что $\mathbb{P}(S_\mu^{\widehat{c}} \leq 0) = 1$, то $F \in \mathcal{S}^*$.*

ФОСС, ПАЛЬМОВСКИ, ЗАХАРИ (2005)

Теорема (S. Foss, Z. Palmowski, S. Zachary, 2005)

Пусть выполнено (1) и $F \in \mathcal{S}^*$. Тогда

$$\mathbb{P}\left(M_\mu^g > x\right) = (1 + o(1))H_\mu^g(x) \qquad \text{при } x \to \infty$$

равномерно по всем $\mu \in \mathcal{F}$ и $g \in \mathcal{G}$, где

$$H_\mu^g(x) \equiv H_{\mu,1}^g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\mu \geq n)\overline{F}(x + g(n)),$$

а $\mathcal{G}$ – некоторый класс функций.

ФОСС, ПАЛЬМОВСКИ, ЗАХАРИ (2005)

Теорема (S. Foss, Z. Palmowski, S. Zachary, 2005)

Пусть выполнено (1) и $F \in \mathcal{S}^*$. Тогда

$$\mathbb{P}\left(M_\mu^g > x\right) = (1 + o(1))H_\mu^g(x) \qquad \text{при } x \to \infty$$

равномерно по всем $\mu \in \mathcal{F}$ и $g \in \mathcal{G}$, где

$$H_\mu^g(x) \equiv H_{\mu,1}^g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\mu \geq n)\overline{F}(x + g(n)),$$

а $\mathcal{G}$ – некоторый класс функций.

- Если $\widehat{c}(n) = cn$ и $\mu = \infty$ п.н., то $H_\mu^{\widehat{c}}(x) \sim \frac{1}{c}\overline{F}_I(x)$ при $x \to \infty$.

Фосс, Пальмовски, Захари (2005)

Теорема (S. Foss, Z. Palmowski, S. Zachary, 2005)

Пусть выполнено (1) и $F \in \mathcal{S}^*$. Тогда

$$\mathbb{P}\left(M_\mu^g > x\right) = (1 + o(1))H_\mu^g(x) \qquad \text{при } x \to \infty$$

равномерно по всем $\mu \in \mathcal{F}$ и $g \in \mathcal{G}$, где

$$H_\mu^g(x) \equiv H_{\mu,1}^g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\mu \geq n)\overline{F}(x + g(n)),$$

а $\mathcal{G}$ – некоторый класс функций.

- Если $\widehat{c}(n) = cn$ и $\mu = \infty$ п.н., то $H_\mu^{\widehat{c}}(x) \sim \frac{1}{c}\overline{F}_I(x)$ при $x \to \infty$.
- Если $\widehat{c}(n) = cn$ и $\mathbb{E}\mu < \infty$, то $H_\mu^{\widehat{c}}(x) \sim \mathbb{E}\mu \cdot \overline{F}(x)$ при $x \to \infty$.

Структура доклада

КЛАСС $\mathcal{G}$

Пусть $0 < c_1 < c_2 < \infty$.

КЛАСС $\mathcal{G}$

Пусть $0 < c_1 < c_2 < \infty$.

Класс $\mathcal{G}_{c_1,c_2}$ **содержит все функции** g такие, что

- $\lim\limits_{n\to\infty} g(n)/n = c_g \in [c_1, c_2]$.
- $\sup\limits_{g} \sup\limits_{m \ge n} |g(m)/m - c_g| \to 0$ при $n \to \infty$.

КЛАСС $\mathcal{G}$

Пусть $0 < c_1 < c_2 < \infty$.

Класс $\mathcal{G}_{c_1,c_2}$ **содержит все функции** g такие, что

- $\lim\limits_{n\to\infty} g(n)/n = c_g \in [c_1, c_2]$.
- $\sup\limits_{g} \sup\limits_{m\geq n} |g(m)/m - c_g| \to 0$ при $n \to \infty$.

Типичный пример: $g(n) = cn$ для некоторого $c > 0$.

РАВНОМЕРНАЯ ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА

Пусть выполнены условия (1), (2) $F \in \mathcal{S}^*$, $\mu \in \mathcal{F}(Z)$ и $g \in \mathcal{G}_{c_1,c_2}$. Тогда

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(R^g_{\mu,Z} > x|Z\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{Z}\{M^g_{i,\mu} > x\}|Z\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{Z}\mathbb{P}\left(M^g_{i,\mu} > x|Z\right) \\
&\leq (1+\alpha(x))\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[Z\mathbb{I}(\mu \geq n)|Z\right]\overline{F}(x+g(n)),
\end{aligned}
$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to \infty$ и не зависит от μ, g и Z.

РАВНОМЕРНАЯ ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА

Утверждение (ПТ&СФ, 2022)

Пусть условия (1), (2) *и* (3) *выполнены, и* $F \in \mathcal{S}^*$. *Тогда при любых* $0 < c_1 < c_2 < \infty$,

$$\mathbb{P}\left(R^g_{\mu,Z} > x\right) \le (1 + o(1)) H^g_{\mu,Z}(x) \quad \text{при } x \to \infty$$

равномерно по $\mu \in \mathcal{F}(Z)$ *и* $g \in \mathcal{G}_{c_1,c_2}$.

РАВНОМЕРНАЯ НИЖНЯЯ ОЦЕНКА

Теорема (ПТ&СФ, 2022)

Пусть условия (1), (2) и (3) выполнены, и $F \in \mathcal{L}$. Предположим также, что выполнено одно из двух условий

(i) *Z не зависит от $\sigma(\xi_{i,j}, i, j \geq 1; \mu)$;*

(ii) *$Z \leq N$, для некоторого целого $N \geq 1$.*

Тогда при любых $0 < c_1 < c_2 < \infty$,

$$\mathbb{P}\left(R^g_{\mu,Z} > x\right) \geq (1 + o(1)) H^g_{\mu,Z}(x) \quad \text{при } x \to \infty$$

равномерно по $\mu \in \mathcal{F}(Z)$ и $g \in \mathcal{G}_{c_1,c_2}$.

Можно ли перейти от ограниченных Z к неограниченным?

Попробуем срезать Z на уровне $N \geq 1$:

$$\mathbb{P}\left(R^g_{\mu,Z} > x\right) \geq \mathbb{P}\left(R^g_{\mu,Z\wedge N} > x\right)$$
$$= (1 + o(1))H_{\mu,Z\wedge N}(x).$$

МОЖНО ЛИ ПЕРЕЙТИ ОТ ОГРАНИЧЕННЫХ Z К НЕОГРАНИЧЕННЫМ?

Попробуем срезать Z на уровне $N \geq 1$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(R^g_{\mu,Z} > x\right) &\geq \mathbb{P}\left(R^g_{\mu,Z\wedge N} > x\right) \\ &= (1+o(1))H_{\mu,Z\wedge N}(x).\end{aligned}$$

Если $\mathbb{E}\left[\mu Z\right] = \infty$, то

$$\overline{F}(x) = o\left(H_{\mu,Z}(x)\right), \quad \text{но} \quad H_{\mu,Z\wedge N}(x) \asymp \overline{F}(x)$$

МОЖНО ЛИ ПЕРЕЙТИ ОТ ОГРАНИЧЕННЫХ Z К НЕОГРАНИЧЕННЫМ?

Попробуем срезать Z на уровне $N \geq 1$:

$$\mathbb{P}\left(R^g_{\mu,Z} > x\right) \geq \mathbb{P}\left(R^g_{\mu,Z\wedge N} > x\right) = (1 + o(1))H_{\mu,Z\wedge N}(x).$$

Если $\mathbb{E}\left[\mu Z\right] = \infty$, то

$$\overline{F}(x) = o\left(H_{\mu,Z}(x)\right), \quad \text{но} \quad H_{\mu,Z\wedge N}(x) \asymp \overline{F}(x)$$

Эта техника не работает в нашем случае!

НЕРАВНОМЕРНАЯ НИЖНЯЯ ОЦЕНКА

Теорема (ПТ&СФ, 2022)

Пусть условия (1), (2) *и* (3) *выполнены, и* $F \in \mathcal{L}$. *Пусть* $\varphi \in \mathcal{L}$ *и* $\mathbb{E}[\varphi Z] < \infty$. *Тогда при любых* $0 < c_1 < c_2 < \infty$,

$$\mathbb{P}\left(R^g_{\mu,Z} > x\right) \geq (1 + o(1)) H^g_{\mu,Z}(x) \quad \text{при } x \to \infty$$

равномерно по $\mu \in \mathcal{F}_\varphi(Z)$ *и* $g \in \mathcal{G}_{c_1,c_2}$.

В частности, если $F \in \mathcal{S}^*$ *и* $\mathbb{E}[\mu Z] < \infty$, *то справедлив неравномерный результат*

$$\mathbb{P}(R_{\mu,Z} > x) \sim H^g_{\mu,Z}(x) \quad \text{при } x \to \infty.$$

НЕРАВНОМЕРНАЯ НИЖНЯЯ ОЦЕНКА

Теорема (ПТ&СФ, 2022)

Пусть условия (1), (2) и (3) выполнены, и $F \in \mathcal{L}$. Пусть $\varphi \in \mathcal{L}$ и $\mathbb{E}\left[\varphi Z\right] < \infty$. Тогда при любых $0 < c_1 < c_2 < \infty$,

$$\mathbb{P}\left(R^g_{\mu,Z} > x\right) \geq (1 + o(1)) H^g_{\mu,Z}(x) \quad \text{при } x \to \infty$$

равномерно по $\mu \in \mathcal{F}_\varphi(Z)$ и $g \in \mathcal{G}_{c_1,c_2}$.

В частности, если $F \in \mathcal{S}^*$ и $\mathbb{E}\left[\mu Z\right] < \infty$, то справедлив неравномерный результат

$$\mathbb{P}\left(R_{\mu,Z} > x\right) \sim H^g_{\mu,Z}(x) \quad \text{при } x \to \infty.$$

С помощью этой теоремы можно получить лишь самую тонкую асимптотику!

Структура доклада

- ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ
- ОБЗОР ИЗВЕСТНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ
- ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ
- ПРИМЕРЫ

ВАЖНОСТЬ УСЛОВИЯ $\mathbb{E}Z < \infty$

Пусть

ВАЖНОСТЬ УСЛОВИЯ $\mathbb{E}Z < \infty$

Пусть

- $\mathbb{P}(Z > N) = N^{-\alpha}, \alpha \in (0, 1)$.

ВАЖНОСТЬ УСЛОВИЯ $\mathbb{E}Z < \infty$

Пусть

- $\mathbb{P}(Z > N) = N^{-\alpha}, \alpha \in (0, 1)$.
- $\mu = n \in [0, \infty]$ п.н.

ВАЖНОСТЬ УСЛОВИЯ $\mathbb{E}Z < \infty$

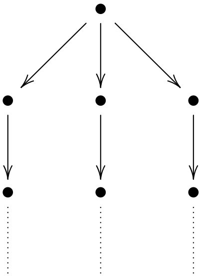
Пусть

- $\mathbb{P}(Z > N) = N^{-\alpha}, \alpha \in (0, 1)$.
- $\mu = n \in [0, \infty]$ п.н.
- $F \in \mathcal{S}^*$.

ВАЖНОСТЬ УСЛОВИЯ $\mathbb{E}Z < \infty$

Пусть

- $\mathbb{P}(Z > N) = N^{-\alpha}, \alpha \in (0,1)$.
- $\mu = n \in [0, \infty]$ п.н.
- $F \in \mathcal{S}^*$.



Тогда

$$\mathbb{P}\left(R_{\mu}^{\widehat{c}} > x\right) = \mathbb{E}(1 - (1-y)^Z),$$

где $y = \mathbb{P}\left(M_{1,\mu}^{\widehat{c}} > x\right)$.

ВАЖНОСТЬ УСЛОВИЯ $\mathbb{E}Z < \infty$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(R_{\mu}^{\widehat{c}} > x\right) &= y \sum_{k=0}^{\infty} (1-y)^k \mathbb{P}\left(Z > k\right) \\
&\sim y \int_0^{\infty} (1-y)^t t^{-\alpha} dt \\
&\sim \Gamma(1-\alpha) y^{\alpha} \\
&= \Gamma(1-\alpha) \left(\mathbb{P}\left(M_{1,\mu}^{\widehat{c}} > x\right)\right)^{\alpha}.
\end{aligned}
$$

ВАЖНОСТЬ УСЛОВИЯ $\mathbb{E}Z < \infty$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(R_\mu^{\widehat{c}} > x\right) &= y\sum_{k=0}^{\infty}(1-y)^k\mathbb{P}\left(Z > k\right) \\
&\sim y\int_0^{\infty}(1-y)^t t^{-\alpha}dt \\
&\sim \Gamma(1-\alpha)y^\alpha \\
&= \Gamma(1-\alpha)\left(\mathbb{P}\left(M_{1,\mu}^{\widehat{c}} > x\right)\right)^\alpha.
\end{aligned}$$

Полученная асимптотика тяжелее, чем $H_{\mu,Z}^g(x)$!

ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АСИМПТОТИКА

Можно получать **за счёт** μ:

Пусть

ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АСИМПТОТИКА

Можно получать **за счёт** μ:

Пусть

- (μ, Z) не зависит от $\{\xi_{i,j}, i, j \geq 1\}$;

ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АСИМПТОТИКА

Можно получать **за счёт** μ:

Пусть

- (μ, Z) не зависит от $\{\xi_{i,j}, i, j \geq 1\}$;
- $\mathbb{P}(\mu \geq n) = K_1 n^{-\alpha}$ для некоторого $\alpha \in (0,1)$;

ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АСИМПТОТИКА

Можно получать **за счёт** μ:

Пусть

- (μ, Z) не зависит от $\{\xi_{i,j}, i, j \geq 1\}$;
- $\mathbb{P}(\mu \geq n) = K_1 n^{-\alpha}$ для некоторого $\alpha \in (0, 1)$;
- $Z = \mu \wedge N$ для некоторого целого $N \geq 1$;

ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АСИМПТОТИКА

Можно получать **за счёт** μ:

Пусть

- (μ, Z) не зависит от $\{\xi_{i,j}, i, j \geq 1\}$;
- $\mathbb{P}(\mu \geq n) = K_1 n^{-\alpha}$ для некоторого $\alpha \in (0,1)$;
- $Z = \mu \wedge N$ для некоторого целого $N \geq 1$;
- $\overline{F}(x) = K_2 x^{-\beta}$, где $\beta > 1$.

ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АСИМПТОТИКА

Можно получать **за счёт** μ:

Пусть

- (μ, Z) не зависит от $\{\xi_{i,j}, i, j \geq 1\}$;
- $\mathbb{P}\left(\mu \geq n\right) = K_1 n^{-\alpha}$ для некоторого $\alpha \in (0,1)$;
- $Z = \mu \wedge N$ для некоторого целого $N \geq 1$;
- $\overline{F}(x) = K_2 x^{-\beta}$, где $\beta > 1$.

Тогда, согласно полученным результатам:

$$\mathbb{P}\left(R^{\widehat{c}}_{\mu,Z} > x\right) \sim H^{g}_{\mu,Z}(x)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[(\mu \wedge N)\mathbb{I}(\mu \geq n)\right] \overline{F}(x+cn)$$

ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АСИМПТОТИКА

Далее,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[(\mu \wedge N)\mathbb{I}(\mu \geq n)\right] \overline{F}(x+cn) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[(\mu \wedge N)\mathbb{I}(\mu \geq n, \mu \geq N)\right] \overline{F}(x+cn) \\
&\qquad + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[(\mu \wedge N)\mathbb{I}(\mu \in [n, N))\right] \overline{F}(x+cn) \\
&= \sum_{n=1}^{N-1} \mathbb{E}\left[(\mu \wedge N)\mathbb{I}(\mu \geq N)\right] \overline{F}(x+cn) \\
&\qquad + \sum_{n=N}^{\infty} \mathbb{E}\left[(\mu \wedge N)\mathbb{I}(\mu \geq n)\right] \overline{F}(x+cn) \\
&\qquad + \sum_{n=1}^{N-1} \mathbb{E}\left[(\mu \wedge N)\mathbb{I}(\mu \in [n, N))\right] \overline{F}(x+cn)
\end{aligned}
$$

ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АСИМПТОТИКА

Получаем, что

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[(\mu \wedge N)\mathbb{I}(\mu \geq n)\right] \overline{F}(x+cn) \\
\sim &N \sum_{n=N}^{\infty} \mathbb{P}\left(\mu \geq n\right) \overline{F}(x+cn) \\
\sim &N \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\mu \geq n\right) \overline{F}(x+cn) \\
= &N K_1 K_2 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}(x+cn)^{-\beta} \\
\sim &N K_1 K_2 \int_0^{\infty} t^{-\alpha}(x+ct)^{-\beta} dt \\
\sim &C x^{1-\alpha-\beta}
\end{aligned}$$

Литература

1. N. Veraverbeke, *Asymptotic behavior of Wiener-Hopf factors of a random walk*, Stochastic Processes and their Applications, **5** (1977), 27–37.
2. C. Klüppelberg, *Subexponential distributions and integrated tails*, Journal of Applied Probability, **25** (1988), 132–141.
3. S. Asmussen, *Subexponential asymptotics for stochastic processes: extremal behavior, stationary distributions and first passage probabilities*, The Annals of Applied Probability, **8** (1998), 354–374.
4. S. Foss, S. Zachary, *The maximum on a random time interval of a random walk with long-tailed increments and negative drift*, The Annals of Applied Probability, **13** (2003), 37–53.
5. S. Foss, Z. Palmowski, S. Zachary, *The probability of exceeding a high boundary on a random time interval for a heavy-tailed random walk*, The Annals of Applied Probability, **15** (2005), 1936–1957.
7. P. Tesemnikov, S. Foss, *The probability of reaching a receding boundary by a branching random walk with fading branching and heavy-tailed jump distribution*, Proceedings of the Steklov Mathematical Institute, **316** (2022), 336–354.
8. S. Foss, D. Korshunov, Z. Palmowski, *On heavy-tailed random walks and Lévy processes stopped at random time*, working paper. (working paper).

Спасибо!

СИЛЬНО СУБЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Klüppelberg, 1988

F – **сильно субэкспоненциально** $(F \in \mathcal{S}^*)$, если $\overline{F}(x) > 0$ при всех $x > 0$, $m^+ = \mathbb{E}\xi^+ < \infty$, и

$$\int_0^x \overline{F}(x-y)\overline{F}(y)dy \sim 2m^+\overline{F}(x) \qquad \text{при } x \to \infty,$$

Свойства:

- $\mathcal{S}^* \subsetneq \mathcal{S} \subsetneq \mathcal{L} \subsetneq H$.
- $F \in \mathcal{S}^* \Rightarrow F, F_I \in \mathcal{S}$.
- Все упомянутые субэкспоненциальные распределения – сильно субэкспоненциальны.