Критические ветвящиеся процессы с дискретным временем и случайные графы, управляемые точечными процессами на $\mathbb{R}$

Топчий В.

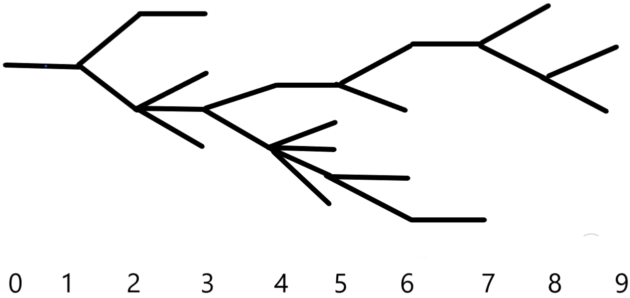
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН (Омский филиал)
Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект FWNF-2022-0003.

Конференция “Боровковские чтения”

24-26 Августа 2022, Новосибирск

Случайные деревья

Пусть вершины дерева расположены на уровнях из $\mathbb{N}_0$. Из корня выходит одно ребро. Ветвление графа (число выходящих из вершины ребер) происходит независимо и одинаково распределенно во всех вершинах. Обозначим Z_n – число ребер выходящих из всех вершин уровня n.



$Z_0 = 1$, $Z_1 = 2$, $Z_2 = 4$, $Z_3 = 2$, $Z_4 = 5$, $Z_5 = 4$, $Z_6 = 2$, $Z_7 = 2$, $Z_8 = 2$, $Z_9 =??$ – 0 или нет информации.

Определение пГВ

Процесс Гальтона-Ватсона (пГВ) Z_n, $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup 0$, начинается с одной частицы $Z_0 = 1$. Все частицы имеют продолжительность жизни 1 и при гибели порождают случайное количество потомков ξ_{ni} с i.i.d. определяемым случайной величиной $\xi = Z_1$.

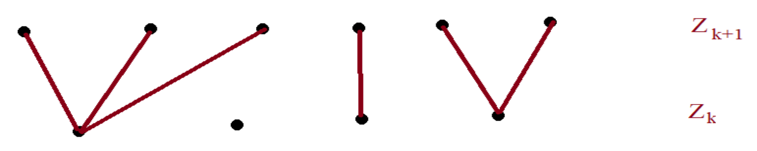
$$Z_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} \xi_{ni}.$$

Обозначим через $p(s) = \mathbb{E}s^{\xi}$ производящую функцию ξ. Если в случайном дереве положить,что распределение числа ребер задается $p(s) = \mathbb{E}s^{\xi}$, то получим два описания одного и того же процесса. В этом случае граф называется генеалогическим деревом пГВ.

Генеалогическое дерево пГВ

Присвоим имена $\beta_k(i)$, $1 \le i \le Z_k$ всем вершинам уровня $k \in \mathbb{N}_0$ (или частицам пГВ) Z_k.

$\beta_{k+1}(1)$ $\beta_{k+1}(2)$ $\beta_{k+1}(3)$ $\beta_{k+1}(4)$ $\beta_{k+1}(5)$ $\beta_{k+1}(6)$ $Z_{k+1} = 6$



$\beta_k(1)$ $\beta_k(2)$ $\beta_k(3)$ $\beta_k(4)$ $Z_k = 4$

Сопоставим потомков $\beta_{k+1}(j)$ и их родителей $\beta_k(i)$ с ребрами $\bar{r}_{k+1}(i,j)$, $i \in \{1, \cdots, X(k)\}$, $j \in \{1, \cdots, X(k+1)\}$. Список ребер $\bar{r}_{k+1}(1,1)$, $\bar{r}_{k+1}(1,2)$, $\bar{r}_{k+1}(1,3)$, $\bar{r}_{k+1}(3,4)$, $\bar{r}_{k+1}(4,5)$, $\bar{r}_{k+1}(4,6)$. Численность потомства от $\beta_k(i)$ равна $\xi_{k+1,i} \stackrel{d}{=} \bar{r}_{k+1}(i) = \sum_{j=1}^{X(k+1)} 1_{\{\bar{\mathfrak{r}}_{k+1}(i,j)\}}$.

Пусть $A := \mathbb{E}\xi = p'(1)$ – средняя численность потомства для любой частицы.
Процесс Z_n называется: докритическим, если $A < 1$, надкритическим, если $A > 1$ и критическим, если $A = 1$.
Простейшие свойства процессов

$$\mathbb{E}Z_n = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad A = 1, \\ A^n & \text{for} \quad A \neq 1. \end{cases}$$

$T = \min\{k : Z_k = 0\}$ – момент вырождения

$$\mathbb{P}(T < \infty) = \begin{cases} q < 1 & \text{for} \quad A > 1, \\ 1 & \text{for} \quad A \geq 1. \end{cases}$$

Основные свойства для критических пГВ: $\mathbb{E}Z_n = 1$
А.Н. Колмогоров [1938] асимптотика вероятиности продолжения

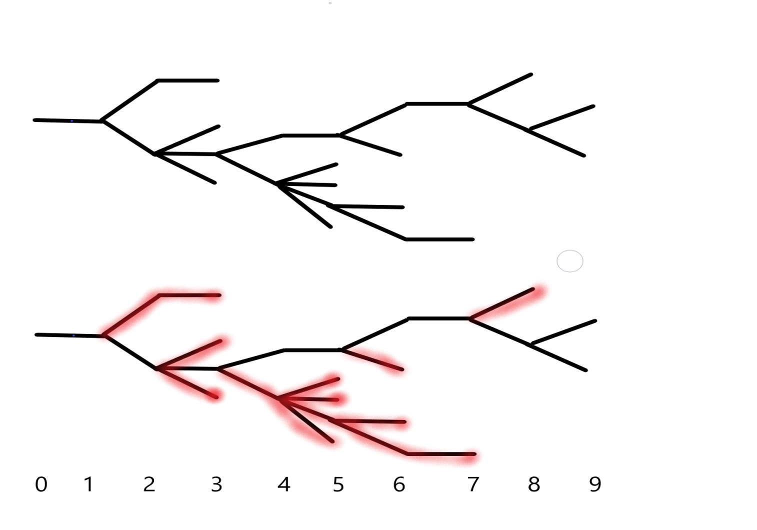
$$Q_n := \mathbb{P}(Z_n > 0) \sim 2/(np''(1)).$$

А.М. Яглом [1947]

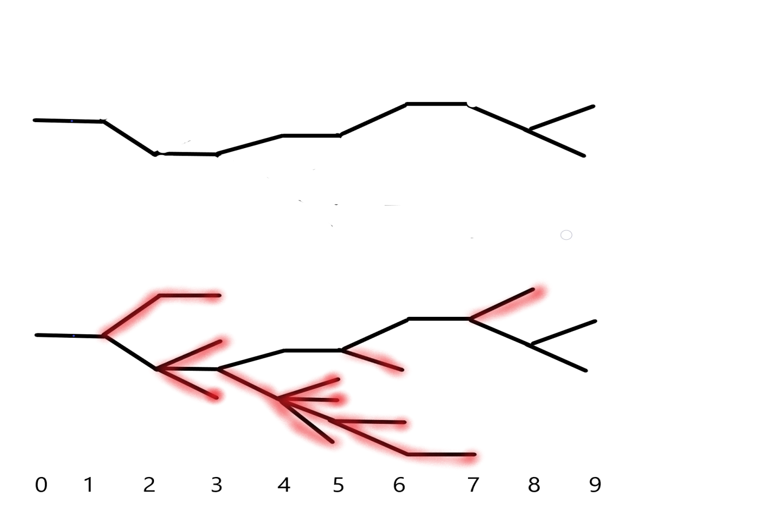
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n Q_n > u | Z_n > 0) = e^{-u}.$$

Редуцированные деревья для пГВ

На дереве $X(k)$, $k = 0, 1, \cdots, n$, с $X(n) > 0$ построим редуцированное дерево (РД) $X(k, n)$. Корень $X(0)$ носил имя $\beta_0(1)$, а корень $X(0, n)$ обозначим $\alpha_{0,n}(1)$. Вершины k-го уровня $X(k, n)$ обозначим $\alpha_{k,n}(i)$, $i = 1, \cdots, X(k, n)$, полученные из $\beta_k(i_0)$ после отбрасывания части вершин, т.е. $\alpha_{k,n}(i) = \beta_k(i_0)$ для некоторого i_0. Фиксируем $\alpha_{k,n}(i) = \beta_k(i_0)$. По определению ребра $k+1$ уровня, соединяющие вершины $\beta_k(i_0)$ и $\beta_{k+1}(j_0)$ обозначены $\bar{r}_{k+1}(i_0, j_0)$, но не все из поддеревьв с корневым ребром $\bar{r}_{k+1}(i_0, j_0)$ доходят до уровня n. Доходящие до уровня n на данном шаге сохраняем, иначе полностью удаляем из дерева. Оставшиеся вершины $k+1$ уровня обозначаем $\alpha_{k+1,n}(j)$, $j = 1, \cdots, X(k+1, n)$. Ребра $\bar{r}_{k+1}(i_0, j_0)$ получают новые имена $r_{k+1,n}(i, j)$.



$Z_0 = 1,\ Z_1 = 2,\ Z_2 = 4,\ Z_3 = 2,\ Z_4 = 5,\ Z_5 = 4,\ Z_6 = 2,$
$Z_7 = 2,\ Z_8 = 2;\ Z(i,8) = 1$ for $i = 0, 1 \cdots, 7,\ Z(8,8) = 2.$



$$Z(i,8) = 1 \text{ для } i = 0, 1 \cdots, 7,\ Z(8,8) = 2.$$

В $\{X(n)\}$ все частицы $\beta_k(i_0)$ порождают независимо друг от друга численность потомства $\bar{r}_{k+1}(i_0)$ с не зависящим от i_0 и k распределением св ξ, а в $\{X(k,n)\}$ частицы $\alpha_k(i) = \beta_k(i_0)$ порождают независимо друг от друга

$$r_{k+1,n} \stackrel{d}{=} r_{k+1,n}(i) = \sum_{j=1}^{X(k+1,n)} 1_{\{\mathfrak{r}_{k+1}(i,j)\}}$$

потомков с независящим от i, но зависящим от k и n распределением $p_{k+1,n}(j)$ (из любой $\alpha_k(i)$ выходит $r_{k+1,n}(i)$ ребер). Если $\widehat{r}_{k+1,n}(i_0) = \sum_{j_0=1}^{X(k+1)} 1_{\{\mathfrak{r}_{k+1}(i_0,j_0)\}} 1_{\{j_0 \in X(k+1,n)\}}$ с распред. $\widehat{p}_{k+1,n}(j)$), то $r_{k+1,n}(i_0) = \{\widehat{r}_{k+1,n}(i_0) | \widehat{r}_{k+1,n}(i_0) > 0\}$.

Если для $\beta_k(i_0)$ численность потомства $\bar{r}_{k+1,n}(i_0)$ имела производящую функцию $p(s)$, то произв. функцией для $\widehat{r}_{k+1,n}(i_0)$ будет $p(1 - Q_{n-k} + Q_{n-k}s) =: \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{p}_{k+1,n}(j)s^j$, а $\mathbb{P}(r_{k+1,n} = j) = \widehat{p}_{k+1,n}(j) Q_{n-k-1}$.

Введем обозначения производящих функций и вероятностей продолжения пГВ $\{X(n)\}$ (см. Севастьянов гл. I, §4).

$$F_0(s) := \mathbb{E}s^{X(0)} = s; \quad F_n(s) := \mathbb{E}s^{X(n)} = p(F_{n-1}(s)), \ n > 0;$$
$$F_n := F_n(0); \ Q_n := 1 - F_n = \mathbb{P}(X(n) > 0); \ Q_0 = 1; \ Q_1 = 1 - p(0).$$

Из теорем 1 и 2 (Севастьянов, гл. II, §5) легко получить, что в критическом случае при $\sigma^2 = \mathbb{D}\xi > 0$

$$Q_n^{-1} = 0.5\sigma^2 n(1 + o(1)), \tag{1}$$

а при конечном третьем моменте $p'''(1) < \infty$ получаются более точные оценки

$$\begin{aligned}
Q_n^{-1} &= 0.5\sigma^2 n + O\big(\ln n\big), \\
Q_n^{-1} &- Q_{n-1}^{-1} = 0.5\sigma^2 + O\big(n^{-1}\big), \\
\overline{q}_{n-1} &:= Q_{n-1}Q_n^{-1} = 1 + 0.5\sigma^2 Q_{n-1} + O\big(Q_{n-1}^2\big).
\end{aligned}$$

Основываясь на $X(k+1,n) = \sum_{i=1}^{X(k,n)} r_{k+1,n}(i)$ получаем.

Теорема 1 Моменты для РД

В редуцированном дереве $\{X(k,n)\}$ для критического пГВ $\{X(n)\}$ с производящей функцией численности потомства отдельных частиц $p(s)$ верны соотношения

$$\mathbb{E}X(k,n) = \frac{Q_{n-k}}{Q_n} = \frac{n}{n-k}\big(1+o_{n-k}(1)\big), \quad (2)$$

$$\mathbb{D}X(k,n) = \frac{kQ_{n-k}^2}{nQ_n^2}\big(1+o_n(1)\big), \ k = 0, 1, \cdots, n. \quad (3)$$

Замечание

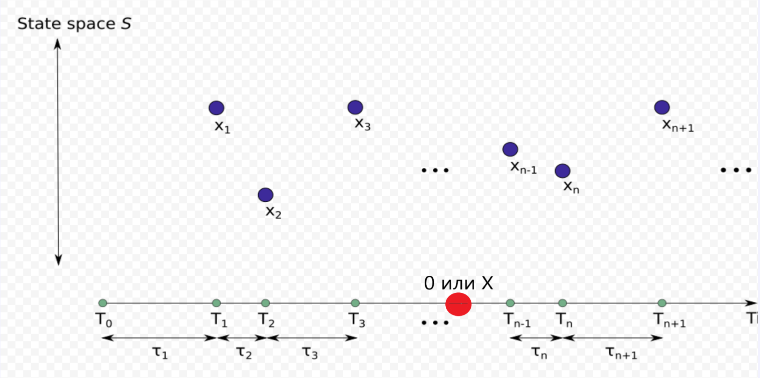
При $n-k \to \infty$ в (2) и (3) для Q_{n-k} и Q_n можно применить оценки (1), а при $n-k = O(1)$ вместо Q_{n-k} использовать их явные значения. В частности, $Q_0 = 1$ при $n-k = 0$. Начало (2) верно без асимптотики.

Отметим фундаментальный результат А.М. Зубкова (1977), где в теореме 3, в частности, утверждается, что для описанного здесь РД $\{X(k,n)\}$ распределение $\eta = \dfrac{\max\{k : X(k,n) = 1\}}{n}$ асимтотически равномерно на $(0,1)$ при $n \to \infty$, т.е. дерево имеет довольно длинный ствол из одиночных ветвей, а после первого появления более одной ветви появляются независимые подобные деревья соответствующей высоты. Обратим внимание и на близкую по духу работу Fleischmann & Siegmund-Schultze. Теоремы 1 в этих работах в явном виде нет, но в них доказаны тонкие результаты о сходимости распределений ряда характеристик РД. Теорема 1 является основой для изучения свойств $\mathbf{X}(k,n)$.

Модель

Исследуемые случайные процессы можно описывать в различных терминах. С одной стороны, это ветвящееся случайное блуждание на прямой с дискретным временем и согласованными скачками групп потомков случайной численности (относительно положения их родителя), определяемые в терминах точечных случайных процессов. Распределения точечных случайных процессов, описывающих эволюцию прямых потомков, для всех родителей независимыми и одинаково распределены. Тождественное равенство нулю точечного процесса соответствует гибели частицы без порождения потомства. Нас интересуют интегральные свойства популяции после исключения из нее частиц без потомков в n–ом поколении в случае когда среднее число прямых потомков равно 1. Эта постановка удобна для компактного описания целей исследований.

Точечный процесс



В начальный момент времени 0 частица находится в 0. Затем в момент 1 порождает случайные количества потомков x_i с координатами T_i. Затем все из них порождают iid случайные количество потомков с координатами $x + T_i$, где x – координата родителя.

ПГВ с бесконечным числом типов частиц

Пусть $\mathbf{Z}(n) = \left(Z_t(n)\right)_{t\in\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ – ветвящийся процесс Гальтона-Ватсона с одновременным наличием не более чем счетного количества частиц с типами из $\mathbb{R}$, где $Z_t(n)$ – численность частиц типа t в момент времени n.

Пусть $\delta_{i,j} := 1_{\{i=j\}}$, $i, j \in \mathbb{R}$, – символ Кронекера и $\boldsymbol{\delta}_u := \left(\delta_{u,t}\right)_{t\in\mathbb{R}}$ – функция, равная 1 при $u = t$, а при остальных значениях равная нулю.

Изучение ветвящихся процессов $\{\mathbf{Z}(n)\}$ сводится к описанию свойств процессов $\left\{\mathbf{X}^{(u)}(n)\right\} = \left\{\mathbf{Z}(n) \middle| \mathbf{Z}(0) = \boldsymbol{\delta}_u\right\}$, $u \in \mathbb{R}$. Для исследуемой нами модели достаточно рассмотреть случайный процесс

$$\{\mathbf{X}(n)\} := \{\mathbf{X}^{(0)}(n)\} =: \left\{\left(X_t(n)\right)_{t\in\mathbb{R}}\right\}.$$

Считающий случайный процесс $(N(u))_{u\in\mathbb{R}}$ взаимосвязан с точечным случайным процессом $(\mathrm{d}N(u))_{u\in\mathbb{R}}$, который определяет величины сдвигов групп событий (скачков потомков) и количество элементов (потомков) в этих группах. Точнее, $(\mathrm{d}N(u))_{u\in\mathbb{R}}$ задается совместным распределением величины сдвигов групп событий $\nu_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, \mu \geq 0$, количество которых μ мы считаем целочисленным и случайным, при $\mu > 0$ значения ν_i упорядочены по возрастанию и связаны с целочисленной последовательностью случайных величин $\xi_i > 0$, $i = 1, \cdots, \mu$, – количеством элементов в этих группах. Если $\mu = 0$, то $N(u) = \mathrm{d}N(u) = 0$ при всех $u \in \mathbb{R}$. Никаких ограничений на зависимость между всеми этими величинами нет.

Рассмотрим точечный процесс $\left(X_t(1)\right)_{t\in\mathbb{R}}$. Его распределение лежит в основе определения ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона $\{\mathbf{X}(n)\}$ с типами частиц из $\mathbb{R}$, который будем называть пГВ$_{pp\mathbb{R}}$. Пусть $(N(t))_{t\in\mathbb{R}}$ имеет распределение считающего процесса для точечного процесса $\left(X_t(1)\right)_{t\in\mathbb{R}}$. Фиксация распределения считающего процесса означает, что для всех частиц родителей известны распределения случайных величин: $\xi := N(\infty) = \lim_{t\to\infty} N(t)$ – численности прямых потомков, $\overline{\rho} := \int_{\mathbb{R}} u dN(u)$ – суммарного веса прямых потомков и $\overline{\rho}^{(2)} := \int_{\mathbb{R}} u^2 dN(u)$ – суммы квадратов весов прямых потомков.

Воспользуемся определением считающего процесса:

• Известно совместное распределение количества частиц в группах в порядке соответствующем возрастанию координат появления этих групп. Обозначим их случайным вектором переменной размерности $\boldsymbol{\xi} := (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}, i\le\mu} \in \mathbb{N}^\mu$ в случае $\mu > 0$ и $\boldsymbol{\xi} = 0$ при $\mu = 0$. Введем производящую функцию $f(\mathbf{s})$ для случайного вектора $\boldsymbol{\xi}$ с собственным распределением $p_{\mathbf{j}} := \mathbb{P}\big(\boldsymbol{\xi} = \mathbf{j}\big)$ для $\mathbf{j} = 0$ или $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^k$, $k \in \mathbb{N}$,

$$f(\mathbf{s}) := \mathbb{E}\mathbf{s}^{\boldsymbol{\xi}} = p_0 + \sum_{k>0}\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^k} p_{\mathbf{j}}\mathbf{s}^{\mathbf{j}}, \quad \mathbf{j} = \big(j_i\big)_{i=1,\cdots,k} \in \mathbb{N}^k, \qquad (4)$$

где $\mathbf{s} = \big(s_i\big)_{i\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$, а $\mathbf{s}^{\mathbf{j}} := \prod_{i=1}^k s_i^{j_i}$ при $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^k$.

• Для любого фиксированного $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^k$ с $p_{\mathbf{j}} > 0$ известно совместное распределение строго возрастающей последовательности

$$\nu_i(\mathbf{j}) \in \mathbb{R}, \ \nu_i(\mathbf{j}) \uparrow, \ i = 1, \cdots, k. \qquad (5)$$

Сопровождающий пГВ для пГВ$_{pp\mathbb{R}}$

ПГВ$_{pp\mathbb{R}}$ $\{\mathbf{X}(n)\}$ при отождествлении всех типов частиц порождает процесс Гальтона-Ватсона $\{X(n)\}$ с одним типом частиц (см. Севастьянов 1971), называемый далее сопровождающим пГВ. Формально этот пГВ определяется соотношениями

$$\{X(n)\} := \left\{\left|\mathbf{X}(n)\right|\right\} = \left\{\sum_{u=-\infty}^{\infty} X_u(n) 1_{\{X_u(n)\neq 0\}}\right\}, \ X(0) = 1.$$

Численность потомства любой частицы в пГВ $\{X(n)\}$ имеет распределение, соответствующее случайной величине $\xi = \left|\boldsymbol{\xi}\right| = \sum_{j=1}^{\mu} \xi_j$ ($\xi := 0$ при $\mu = 0$) с производящей функцией $p(s) := \mathbb{E}s^{|\boldsymbol{\xi}|} = f(\mathbf{1}s) =: \sum_{i=0}^{\infty} p_i s^i$.

$$\mathbb{E}\xi = p'(1) = 1, \quad \mathbb{D}\xi = \sigma^2 = \mathbb{E}\xi^2 - 1 = p''(1) < \infty. \qquad (6)$$

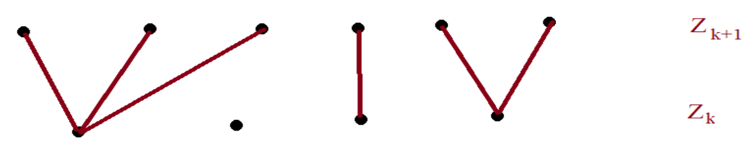
Генеалогические деревья пГВ$_{pp\mathbb{R}}$

На дереве $\{X(n)\}$ построим генеалогическое дерево для пГВ$_{pp\mathbb{R}}$ $\{\mathbf{X}(n)\} = \left\{ \left(X_t(n) \right)_{t \in \mathbb{R}} \right\}$. Имена частиц $\beta_k(i)$ в новом дереве сохраняются, но им приписываются веса или типы, совпадающие с координатами частиц в ветвящемся случайном блуждании, а ребрам $\bar{r}_{k+1}(i,j)$ приписываются веса, равные приращению номера типа у прямых потомков частицы родителя $\beta_k(i)$, определенные распределением точечного процесса $(N(t))_{t \in \mathbb{R}}$. Формально генеалогическое дерево $\{\mathbf{X}(n)\}$ строится на дереве $\{X(n)\}$ путем задания только случайных весов ребер, а веса вершин определяются рекуррентными соотношениями: $\xi_0(1) = 0$ и

$$\bar{\xi}_{k+1}(j) = \bar{\xi}_k(i) 1_{\{\bar{\mathfrak{r}}_{k+1}(i,j)\}} + \bar{\rho}_{k+1}(i,j). \tag{7}$$

$\overline{\xi}_{k+1}(1)$ $\overline{\xi}_{k+1}(2)$ $\overline{\xi}_{k+1}(3)$ $\overline{\xi}_{k+1}(4)$ $\overline{\xi}_{k+1}(5)$ $\overline{\xi}_{k+1}(6)$ $\mathbf{Z}_{k+1}$

$\beta_{k+1}(1)$ $\beta_{k+1}(2)$ $\beta_{k+1}(3)$ $\beta_{k+1}(4)$ $\beta_{k+1}(5)$ $\beta_{k+1}(6)$ $Z_{k+1} = 6$



$\beta_k(1)$ $\beta_k(2)$ $\beta_k(3)$ $\beta_k(4)$ $Z_k = 4$

$\overline{\xi}_k(1)$ $\overline{\xi}_k(2)$ $\overline{\xi}_k(3)$ $\overline{\xi}_k(4)$ $\mathbf{Z}_k$

Веса ребер (приращение типов частиц на потомках):
для $\overline{\xi}_k(1)$ $\overline{\rho}_{k+1}(1,1) = \overline{\xi}_{k+1}(1) - \overline{\xi}_k(1)$,
$\overline{\rho}_{k+1}(1,2) = \overline{\xi}_{k+1}(2) - \overline{\xi}_k(1)$, $\overline{\rho}_{k+1}(1,3) = \overline{\xi}_{k+1}(3) - \overline{\xi}_k(1)$;
для $\overline{\xi}_k(3)$ $\overline{\rho}_{k+1}(3,4) = \overline{\xi}_{k+1}(4) - \overline{\xi}_k(3)$;
для $\overline{\xi}_k(4)$ $\overline{\rho}_{k+1}(4,5) = \overline{\xi}_{k+1}(5) - \overline{\xi}_k(4)$,
$\overline{\rho}_{k+1}(4,6) = \overline{\xi}_{k+1}(6) - \overline{\xi}_k(4)$.

Редуцированные деревья для $\{\mathbf{X}(n)\}$

На основе РД $\{X(k,n)\}$ определим РД $\{\mathbf{X}(k,n)\}$ $=\left\{\left(X_t(k,n)\right)_{t\in\mathbb{R}}\right\}$ для генеалогического дерева процесса $\left\{\left(X_t(n)\right)_{t\in\mathbb{R}}\right\}$. Оно получается из РД $\{X(k,n)\}$ с приписыванием весов вершин и ребер этих компонент в дереве $\{\mathbf{X}(n)\}$. Для вершин и ребер $\{\mathbf{X}(k,n)\}$ k-ого уровня сохраняются имена из порождающего его РД $\{\mathbf{X}(k,n)\}$, а именно, $\alpha_{k,n}(i)$, $i=1,\cdots,X(k,n)$ – вершины, $r_{k+1,n}(i,j)$, $i=1,\cdots,X(k,n)$, $j=1,\cdots,X(k+1,n)$, – ребра. В процессе $\{\mathbf{X}(n)\}$ всем вершинам и ребрам были приписаны веса. Веса ребер $r_{k+1,n}(i,j)$, соединяющих вершины $\alpha_{k,n}(i)$ и $\alpha_{k+1,n}(j)$, обозначим через $\rho_{k+1,n}(i,j)$. Тогда для весов вершин на РД верны подобные (7) рекуррентные соотношения

$$\xi_0(1)=0,\ \ \xi_{k+1}(j)=\xi_k(i)1_{\{\mathfrak{r}_{k+1}(i,j)\}}+\rho_{k+1,n}(i,j),\ \ k\in\mathbb{N}_0. \quad (8)$$

По аналогии с $r_{k+1,n}(i)$ определим $\rho_{k+1,n}(i)$ с распределением не зависящим от i, но существенно зависящим от k и n

$$\rho_{k+1,n} \stackrel{d}{=} \rho_{k+1,n}(i) := \sum_{j=1}^{X(k+1,n)} \rho_{k+1,n}(i,j), \tag{9}$$

Для считающего случайного процесса $\{N(t)\}$ в терминах ребер, выходящих любой вершины на следующий уровень, известны распределения ξ – численности этих ребер, $\overline{\rho}$ – их суммарного веса и $\overline{\rho}^{(2)}$ – суммы квадратов их весов, а, следовательно, и значения средних и дисперсии, обозначаемых

$$a := \mathbb{E}\xi = 1, \quad \sigma^2 = \mathbb{D}\xi, \quad a_1 := \mathbb{E}\overline{\rho}, \quad a_2 := \mathbb{E}\overline{\rho}^{(2)}, \quad \sigma_1^2 = \mathbb{D}\overline{\rho}.$$

В дополнение обозначим

$$\mathbb{D}^{(1)}\rho_{k+1,n} = \mathbb{D}^{(1)}\rho_{k+1,n}(i) := \sum\nolimits_{j=1}^{X(k+1,n)} \mathbb{D}\rho_{k+1,n}(i,j)$$

Лемма 1 Моменты для ребер GWbp_∞

В редуцированном дереве $\{\mathbf{X}(k,n)\}$ для критического процесса Гальтона-Ватсона $\{\mathbf{X}(n)\}$ для суммарного веса $\rho_{k+1,n}(i)$ группы ребер, выходящих из $\alpha_{k,n}(i)$, верны соотношения

$$\mathbb{E}\rho_{k+1,n} = a_1 \frac{Q_{n-k-1}}{Q_{n-k}} = a_1 \overline{q}_{n-k-1}, \tag{10}$$

$$\mathbb{D}\rho_{k+1,n} = \overline{q}_{n-k-1}\big(a_2 - a_1^2 + O\big(Q_{n-k-1}\big),\ k = 0, \cdots, n-1.$$

Если дополнительно выполнено условие $\mathcal{D}$, то

$$\mathbb{D}^{(1)}\rho_{k+1,n} = \overline{q}_{n-k-1}c_1 + O(Q_{n-k-1}) = c_1 + O(Q_{n-k-1}), \tag{11}$$

где $c_1 = \sum_{s>0}\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^s} p_{\mathbf{j}} \sum_{l=1}^{s} j_l \sigma_l^2(\mathbf{j})$

В работе Ватутин, Дьяконова, Топчий 2021 доказано обобщение теоремы Яглома для процессов с неограниченным числом типов частиц $i \in \mathbb{N}$. Там же описана история вопроса. Обычно классификация процессов с бесконечным числом типов частиц производится в терминах произведений матриц средних (бесконечномерных) для численности потомства, а мы определяем их тип по сопровождающему процессу с одним типом частиц. Наша цель – для критических пГВ$_{pp\mathbb{R}}$ $\{\mathbf{X}(n)\}$ описать поведение среднего и дисперсии для суммарного значения типов всех живущих в момент времени k частиц с потомством в момент времени n

$$V(k+1,n) = \sum_{i=1}^{X(k+1,n)} \xi_{k+1,n}(i) = \sum_{i=1}^{X(k,n)} \xi_{k,n}(i) r_{k+1,n}(i) + \sum_{i=1}^{X(k,n)} \rho_{k+1,n}(i).$$

Неравенство Чебышева позволяет оценить вероятности диапазонов изменения суммы значений типов частиц.

Теорема 2 Моменты РД GWbp_∞

В редуцированном дереве $\{\mathbf{X}(k,n)\}$ для критического процесса Гальтона-Ватсона $\{\mathbf{X}(n)\}$ при выполнении условия $\mathcal{D}$ верны соотношения

$$\mathbb{E}V(k,n) = ka_1\frac{Q_{n-k}}{Q_n} = \frac{ka_1 n}{n-k}\big(1+o_{n-k}(1)\big), \qquad (12)$$

$$\mathbb{D}V(k,n) = \big(a_2-a_1^2\big)(1+2k)\big(1+o_n(1)\big),\ k^2=o(n), \qquad (13)$$

$$\mathbb{D}V(k,n) = (a_2-0.5a_1^2+0.25c_1)n\frac{Q_{n-k}^2}{Q_n^2}\big(1+o_n(1)\big), \qquad (14)$$

$$n-k=o(n),$$

где $c_1 := \sum_{s>0}\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^s} p_{\mathbf{j}}\sum_{l=1}^{s} j_l\sigma_l^2(\mathbf{j})$

Следствие

Пусть для редуцированного дерева $\{\mathbf{X}(k,n)\}$ выполнены условия теоремы 2, тогда при $n-k=o(n)$ верны соотношения

$$\begin{aligned}\mathbb{E}V(k,n) &= na_1\frac{Q_{n-k}}{Q_n} = 0.5a_1\sigma^2 Q_{n-k}n^2\big(1+o(1)\big);\\ \mathbb{D}V(k,n) &= 0.25\sigma^4(a_2-0.5a_1^2+0.25c_1)n^3Q_{n-k}^2\big(1+o(1)\big).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{D}V_{k,n} &= \left[(a_2-a_1^2)\left(1+k\left(2-\frac{k}{n}\right)\right)+c_1c(k,n)k+0.5a_1^2\frac{k^2}{n}\right]\\ &\cdot \frac{Q_{n-k}^2}{Q_n^2}(1+o_n(1)),\\ c(k,n) &:= 0.75\frac{k}{n}-0.5-0.5\left(1-\frac{k}{n}\right)\left(\frac{n}{k}-1\right)\ln\left(1-\frac{k}{n}\right).\end{aligned}$$

Закон больших чисел для GWbp_∞

Theorem 3

В условиях теоремы 2 при $n-k=o(n)$ верны соотношения

$$\lim_{M\to\infty}\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\frac{\left|Q_{n-k}^{-1}V(k,n)-0.5a_1\sigma^{-2}n^2\right|}{n\sqrt{n}}>M\right)=0,$$

$$\left|\frac{V(k,n)}{\mathbb{E}V(k,n)}-1\right|\sqrt{n}M(n)\xrightarrow{p}0,$$

где $a_1\neq 0$, $M(n)\to 0$ произвольная.

Случайно выбранные траектории

Ребро, выходящее из любой фиксированной вершины дерева $\{\mathbf{X}(n)\}$, назовем случайно выбранным, если оно выбирается равновозможно среди выходящих из нее.

На дереве $\{\mathbf{X}(n)\}$ фиксируем произвольную вершину $\beta_k(i_0)$ и вектор $\mathbf{j}$ такой, что в соотношении (4) $p_{\mathbf{j}} > 0$ и $|\mathbf{j}| = m > 0$. Тогда из исходящих ребер с численностью групп $j_s > 0$, $s = 1, \cdots, \mu$, обладающих весом $\nu_s(\mathbf{j})$ случайно выбранное ребро $\bar{r}_{k+1}(i_0, r_0)$ будет иметь вес $\nu_l(\mathbf{j})$ с вероятностью $j_l m^{-1}$. Если $\beta_k(i_0) = \alpha_{k,n}(i)$ и из вершины $\beta_k(i_0)$ выходит комплект из $\mathbf{j} > 0$ ребер, то в РД $\{\mathbf{X}(k,n)\}$ случайно выбранное ребро $r_{k+1,n}(i,r)$, выходящее из вершины $\alpha_{k,n}(i)$ будет иметь вес $\nu_l(\mathbf{j})$ с той же вероятностью $j_l m^{-1}$. В терминах безусловного редуцированного дерева вероятность выбрать ребро $r_{k+1}(i,j)$ веса $\nu_l(\mathbf{j})$ равна $p_{\mathbf{j}} j_l m^{-1}(1-p_0)^{-1}$.

В РД $\{\mathbf{X}(k,n)\}$ фиксируем произвольную вершину $\alpha_{k,n}(i)$ и обозначим через $r_{k+1,n}(i,\mathrm{rand})$ случайно выбранное из $r_{k+1,n}(i,j)$ ребро, а его вес $\rho_{k+1,n}(i,\mathrm{rd})$. По лемме из ПС распределения всех весов $\rho_{k+1,n}(i,\mathrm{rd})$ совпадают между собой. Обозначим случайные веса $\rho_{k+1,n}(i,\mathrm{rd})$ через $\rho_{\mathrm{rd}}(k)$, а случайную величину с тем же распределением – через ρ_{rd}.

Пусть $a_l(\mathbf{j}) := \mathbb{E}\nu_l(\mathbf{j})$, $a_l^{(2)}(\mathbf{j}) := \mathbb{E}\nu_l^2(\mathbf{j})$ и $\sigma_l^2(\mathbf{j}) := \mathbb{D}\nu_l(\mathbf{j})$.

Легко вычислить, что

$$
\begin{aligned}
a_{\mathrm{rd}} &:= \mathbb{E}\rho_{\mathrm{rd}} = \sum_{s>0}\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^s} p_{\mathbf{j}} \sum_{l=1}^{s} j_l |\mathbf{j}|^{-1} a_l(\mathbf{j}),\\
a_{\mathrm{rd}}^{(2)} &:= \mathbb{E}\rho_{\mathrm{rd}}^2 = \sum_{s>0}\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^s} p_{\mathbf{j}} \sum_{l=1}^{s} j_l |\mathbf{j}|^{-1} a_l^{(2)}(\mathbf{j}),\\
\sigma_{\mathrm{rd}}^2 &:= \mathbb{D}\rho_{\mathrm{rd}} = a_{\mathrm{rd}}^{(2)} - a_{\mathrm{rd}}^2.
\end{aligned}
$$

ЦПТ

Theorem 3

В условиях теоремы 2 распределение нормированного номера типа $\xi_{k,n}(j)$ случайно выбранной на уровне k частицы (веса вершины) $\alpha_{k,n}(j)$

$$\frac{\xi_{k,n}(j) - a_{\mathrm{rd}}k}{\sigma_{\mathrm{rd}}\sqrt{k}}$$

(0,1) асимптотически нормально. При $i \neq j$ значения типов $\xi_{k,n}(i)$ и $\xi_{k,n}(j)$ случайно выбранных на уровне k частиц $\alpha_{k,n}(i)$ и $\alpha_{k,n}(j)$ коррелированы и $\mathrm{cov}(\xi_{k,n}(i), \xi_{k,n}(j))$ $= \mathbb{D}\xi_{k_0,n}(\cdot) = k_0\sigma^2_{\mathrm{rd}} + \mathrm{cov}(\rho_{k_0+1,n}(u), \rho_{k_0+1,n}(v))$, где $\alpha_{k_0,n}(\cdot)$ – ближайший общий предок (корень минимального содержащего их поддерева) для $\alpha_k(i)$ и $\alpha_k(j)$, а $\rho_{k_0+1,n}(u)$ и $\rho_{k_0+1,n}(v)$ – длины двух случайно выбранных ребер, выходящих из $\alpha_{k_0,n}(\cdot)$.

Representations for GWbp

Recurrent representation for a RT

$$X(k+1,n) = \sum\nolimits_{i=1}^{X(k,n)} r_{k+1,n}(i) \tag{15}$$

and the Wald identity imply

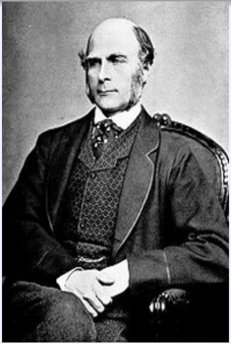
$$\mathbb{E}X(k+1,n) = \overline{q}_{n-k-1}\mathbb{E}X(k,n) = \mathbb{E}X(1,n)\prod_{i=2}^{k+1}\overline{q}_{n-i} = \prod_{i=1}^{k+1}\overline{q}_{n-i},$$

Recurrent representation (33) and identity

$$\mathbb{D}\sum_{i=1}^{\nu}\eta_i = \mathbb{D}\nu\mathbb{E}^2\eta_1 + \mathbb{D}\eta_1\mathbb{E}\nu \tag{16}$$

$\mathbb{D}X(k+1,n)$, for independent ν and iid η_i, allow us to describe the asymptotics of $\mathbb{D}X(k+1,n)$.

Galton-Watson branching process (1874) GWbp



Sir Francis Galton (February 16, 1822, Birmingham, West Midlands, England, UK - January 17, 1911, Hazelmere, Surrey, England, UK) - English explorer, geographer, anthropologist, psychologist, statistician, founder differential psychology and psychometrics, as well as the founder of the teachings of eugenics, which was designed to combat the phenomena of degeneration in the human gene pool. Galton was Charles Darwin's cousin by their grandfather, Erasmus Darwin.

Galton-Watson branching process (1874)

Henry William Watson (25 February 1827, Marylebone, London – 11 January 1903, Berkswell near Coventry) was a mathematician and author of a number of mathematics books. He was an ordained priest and Cambridge Apostle.

Irénée-Jules Bienaymé (28 August 1796 – 19 October 1878) was a French statistician. Corresponding member of Russian Academy of Sciences from 12.13.1874 (Department of Physics and Mathematics in the category of mathematical sciences); France. Branching process (1845) 29 years earlier 1874.
Friend of Chebyshev. Chebyshev's inequality was proposed by Bienaymé.

References

- Yaglom A.M. Certain limit theorems of the theory of branching processes, Dokl. Acad. Nauk SSSR, 56 (1947), 795–798.
- Zubkov A.M. Limiting Distributions of the Distance to the Closest Common Ancestor, Theory of Probability and its Applications, 1976, 20:3, 602–612
- Fleischmann K., Siegmund-Schultze R. The structure of reduced critical Galton- Watson processes, Math. Nachr., 79 (1977), 233–241.
- Vatutin V.A., Dyakonova E.E., Topchii V.A. Critical Galton-Watson branching processes with a countable set of types and infinite second moments, Sb. Math., 212:1 (2021), 1–24

Thank you very much!