

О СТАБИЛЬНОСТИ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ С КОНТИНУАЛЬНО ВЕТВЯЩИМИСЯ ЖИДКОСТНЫМИ ПРЕДЕЛАМИ ¹

Известно, что во многих системах обслуживания жидкостные пределы являются детерминированными функциями. Модели и условия, приводящие к случайным жидкостным пределам, изучены достаточно слабо. В данной работе приводится и исследуется пример сети обслуживания, жидкостные пределы в которой допускают случайное ветвление в некоторых точках, и число возможных ветвей континуально. Изучаются условия стабильности этой модели с использованием ряда результатов из теории ветвящихся процессов.

§ 1. Введение. Метод жидкостной аппроксимации

Пусть $\{X(t), t \geq 0\}$ – марковский процесс, описывающий динамику стохастической сети (обслуживания) и обладающий свойством строгой марковости, и пусть $|\cdot|$ – некоторая неотрицательная (тестовая) функция, удовлетворяющая ряду условий (скажем, некоторая полунорма). Приведем краткое описание и обсуждение подхода к исследованию условий стабильности (эргодичности), предложенного первоначально в [1, 2, 3], развитого затем во многих работах (см., напр., [4, 5, 6, 7, 8, 9] и списки литературы в них) и получившего название “метод жидкостной аппроксимации”.

Рассмотрим начальные состояния x такие, что $|x| > 0$, и введем семейство процессов

$$X^x \stackrel{def}{=} \left\{ X^x(t) = \frac{X(|x|t)}{|x|}, \quad t \geq 0 \right\}, \quad X^x(0) = x.$$

При выполнении некоторых естественных предположений для любого фиксированного $T > 0$ семейство процессов $\{X^x, |x| \geq 1\}$ является слабо компактным на интервале времени $[0, T]$. Поэтому из любой последовательности $x = x_n, |x_n| \rightarrow \infty$ можно выбрать подпоследовательность

¹Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты 02-01-00358, 03-01-00045), фондом Президента РФ (грант НШ – 2139.2003.1) и программой 1.1 Отделения математических наук РАН “Современные проблемы теоретической математики в ИМ СО РАН”

такую, что соответствующие процессы X^x слабо сходятся к некоторому предельному процессу (скажем, φ), называемому жидкостным пределом. Жидкостные пределы обладают рядом хороших свойств. В частности, для любого жидкостного предела почти наверное все его траектории являются липшицевыми (с одной и той же липшицевой константой) и подобными друг другу (см., напр., [3]), то есть для любого жидкостного предела φ и для любого $u > 0$ таких, что $\mathbf{P}(|\varphi(u)| > 0) > 0$, случайный процесс $\{\tilde{\varphi}(t), t \geq 0\}$ с условным распределением

$$\mathbf{P}(\tilde{\varphi}(t) \in \cdot) = \mathbf{P}\left(\frac{\varphi(u+t)}{|\varphi(u)|} \in \cdot \mid \varphi(u)\right) \quad (1)$$

тоже является жидкостным пределом (для исходного процесса X) п.н. на множестве $\{|\varphi(u)| > 0\}$.

Нахождение условий стабильности сетей обслуживания привлекает внимание многих специалистов. Под *стабильностью* сети обслуживания будем понимать *положительную возвратность* процесса $X(t), t \geq 0$ (относительно тестовой функции $|\cdot|$), то есть существование положительных чисел C и ε таких, что

$$\sup_{|x| \leq C} \mathbf{E}\{\nu_C \mid X(0) = x\} < \infty,$$

где $\nu_C = \inf\{t \geq \varepsilon : |X(t)| \leq C\}$. Сеть обслуживания *нестабильна*, если процесс $X(t)$ невозвратен, т.е. хотя бы одна из случайных величин ν_C является несобственной.

В течение многих лет считалась правдоподобной гипотеза о том, что **(Н)** если нагрузка на каждой станции сети обслуживания меньше единицы и все используемые на станциях дисциплины обслуживания “консервативны” (т.е. простои на станции невозможны при наличии вызовов), то вся сеть должна быть стабильна.

Только в начале 90-х годов были построены первые примеры, показывающие, что это может быть не так. Так, в работах [10, 11] были предложены примеры некоторых детерминированных систем, для которых гипотеза **(Н)** неверна.

По-видимому, статья [1] является первой работой, где строятся и изучаются примеры *стохастических* сетей, в которых условия вида “нагрузка меньше единицы” не приводят к стабильности. А именно, авторы приводят пример сети обслуживания с 2 станциями и 2 потоками вызовов и показывают, что (а) если на обеих станциях вызовы обслуживаются в порядке поступления, то гипотеза **(Н)** верна, (б) но если на станциях используются некоторые приоритетные дисциплины,

то **(Н)** перестает быть верной (пример системы, для которой естественные условия положительной возвратности не являются достаточными при обслуживании вызовов на каждой станции в порядке поступления, был найден позже в [12]). В работе [1] использовалась следующая трехшаговая схема рассуждений:

- 1) сначала рассматривались жидкостные пределы φ и выписывалась система интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ), которым удовлетворяют п.н. все траектории всех возможных жидкостных пределов;
- 2) находились условия, при которых все решения этих ИДУ уходят в ноль, т.е. $|\varphi(t)| = 0$ при всех достаточно больших t ;
- 3) показывалось, что эти же условия являются условиями положительной возвратности марковского процесса X .

При этом многие фрагменты доказательства на шаге 3), по сути, повторяли соответствующие фрагменты шага 2).

В последовавших работах ([2] и [3]) был рассмотрен достаточно широкий класс сетей обслуживания (так называемых open multiclass networks), к которым применим изложенный выше подход, и – с помощью некоего обобщенного критерия Фостера – показано, что шаг 3) в изложенной выше схеме доказательства является излишним. В частности, было получено следующее достаточное условие для стабильности:

(С1) Существует число $T \in (0, \infty)$ такое, что для любого жидкостного предела φ

$$|\varphi(t)| = 0 \text{ п.н. для всех } t \geq T. \quad (2)$$

Было также показано, что условие (2) эквивалентно следующему условию (которое формально является более слабым):

(С2) Для любого жидкостного предела φ существуют (свой) константы T' и $\varepsilon \in (0, 1)$ такие, что:

$$|\varphi(T')| \leq \varepsilon \text{ п.н.} \quad (3)$$

В [3] также показано, что для детерминированных жидкостных пределов каждое из этих условий эквивалентно следующему:

(С3) Для любого жидкостного предела φ выполнено:

$$\inf_{t \geq 0} |\varphi(t)| < 1 \text{ п.н.}$$

Как хорошо известно, в большинстве базовых моделей стохастических сетей жидкостный предел единственен (с точностью до начального условия) и является детерминированной функцией (это так, например, для обобщенных сетей Джексона или для системы поллинга на окружности – см., напр., [4, 5, 6, 7, 8, 9]). Этот факт можно объяснить с

помощью следующих эвристических соображений:

(а) в рассматриваемых сетях обслуживания входные процессы (процесс поступления вызовов в систему; процессы, описывающие непрерывную работу обслуживающих приборов, и т.д.), как правило, являются процессами восстановления, и последовательности накопленных сумм удовлетворяют усиленному закону больших чисел, что при линейном сжатии времени и пространства приводит к детерминированным функциям;

(б) если алгоритм управления сетью является “достаточно простым”, то разумно ожидать, что и жидкостный предел – как функция от входа и управления – тоже будет детерминированным.

Естественен следующий вопрос: какого рода случайность может сохраняться при предельном переходе к жидкостной динамике? Насколько нам известно, этот вопрос изучался лишь в небольшом числе публикаций (см., напр., [13, 14, 15, 16]), где было показано на примерах, что жидкостный предел может быть стохастическим по следующим двум причинам: (1) случайности, определяемой начальным состоянием, и (2) случайности за счет вероятностного ветвления (с конечным числом ветвей). Более подробно, предлагающиеся в этих работах жидкостные пределы таковы, что

(а) в пространстве состояний можно выделить конечное (с точностью до линейного коэффициента) число точек (скажем, $\{x_i\}_{i=1}^k$, где $|x_i| = 1$) и сопоставить каждой точке x_i некоторое дискретное распределение вероятностей $\{p_{i,j}\}_{j=1}^{l_i}$ и соответствующее семейство $\{\varphi_{i,j}\}_{j=1}^{l_i}$ детерминированных жидкостных пределов, стартующих из точки $\varphi_{i,j}(0) = x_i$;

(б) для любого жидкостного предела φ можно указать последовательность конечных моментов остановки $0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \dots$ такую, что при любом $s \geq 2$,

$$\tau_s = \inf\{t > \tau_{s-1} : \varphi(t) \in D\},$$

где множество D определяется как $D = \{cx_i : c > 0; i = 1, \dots, k\}$, причем если $\varphi(\tau_s) = cx_i$ при некоторых $c > 0$ и x_i , то с вероятностью $p_{i,j}$ траектория $\{\varphi(\tau_s + u), 0 \leq u \leq \tau_{s+1} - \tau_s\}$ совпадает с траекторией детерминированного процесса $\{c\varphi_{i,j}(u/c), 0 \leq u \leq \tau_{s+1} - \tau_s\}$;

(в) на начальном интервале времени $(0, \tau_1)$ жидкостный предел может быть случайным за счет некоторой специфики начального состояния.

Для моделей со случайными жидкостными пределами условия стабильности, предлагаемые в критерии (С1), являются только достаточными и далеки от необходимых. Более общие условия стабильности для таких моделей были найдены в [16]:

Т е о р е м а 1. Пусть все жидкостные пределы являются строго марковскими случайными процессами. Если для любого жидкостного предела φ найдется такой момент остановки $\tau = \tau_\varphi$, что

(а) случайные величины $\{\tau_\varphi\}$ равномерно интегрируемы (где равномерность имеет место в классе всех жидкостных пределов);

(б) для некоторого $\varepsilon \in (0, 1)$ выполнено

$$|\varphi(\tau_\varphi)| \leq \varepsilon \text{ п.н.}, \quad (4)$$

то первоначальный процесс X является положительно возвратным.

Условие (б) эквивалентно следующему:

(б') $\mathbf{E}|\varphi(\tau'_\varphi)| < \varepsilon$ для некоторого другого равномерно интегрируемого семейства моментов остановки τ'_φ .

Замечание 1. В силу строгой марковости, если найдется семейство $\{\tau_\varphi\}$, удовлетворяющее условиям (а)-(б) при некотором $\varepsilon > 0$, то такое семейство можно построить при любом $\varepsilon \in (0, 1)$.

В настоящей работе предлагается относительно простая и естественная модель стохастической системы обслуживания, жидкостные пределы в которой остаются случайными за счет несколько иного эффекта: ветвления в одной точке, но с континуальным числом ветвей. С помощью некоторого усложнения конструкции можно построить пример модели с континуальным ветвлением в несчетном числе точек. Существование континуального ветвления предельного (при линейной нормировке) процесса доказывается в [14] для случайного блуждания в \mathbf{Z}_+^4 и в [17] для процесса длин очередей в системе с потерями, но в обеих этих работах не удается ввести вероятностную меру на множестве ветвящихся траекторий. Отсутствие возможности описать предельный процесс в общем случае привело к отсутствию полной классификации асимптотического поведения случайных блужданий в \mathbf{Z}_+^4 . Отметим, что поведение нашей системы обслуживания можно описать блужданием по границе \mathbf{Z}_+^4 .

Рассматриваемая нами модель интересна с той точки зрения, что жидкостный предел с континуальным ветвлением удастся точно описать как случайный процесс. При его описании используются новые результаты по исследованию надкритических ветвящихся процессов. Кроме того, естественным образом возникает новый класс распределений, которые можно назвать “фрактально экспоненциальными”.

Работа устроена следующим образом: в параграфе 2 приводится описание рассматриваемой системы обслуживания. Параграф 3 посвящен изучению методами теории ветвящихся процессов вспомогательной

неэргодической системы обслуживания с одним прибором. В параграфе 4 строится и изучается жидкостная модель и — с ее помощью — находятся условия для стабильности и для нестабильности исходной модели. Наконец, приложение содержит доказательства ряда вспомогательных технических утверждений.

§ 2. Описание системы обслуживания и ее свойства

Рассматриваемая система состоит из двух станций обслуживания и двух обслуживающих приборов. На каждую станцию поступает свой входной поток вызовов, соответственно с интенсивностями $\lambda_1 < 1$ и $\lambda_2 > 1$, приборы обслуживают вызовы с одной и той же интенсивностью 1. После окончания обслуживания вызов покидает систему. Вторым прибором постоянно обслуживаются вызовы на второй станции. Так как он самостоятельно не может справиться с обслуживанием вызовов на станции, то первый прибор, наряду с обслуживанием вызовов на первой станции, время от времени помогает второму.

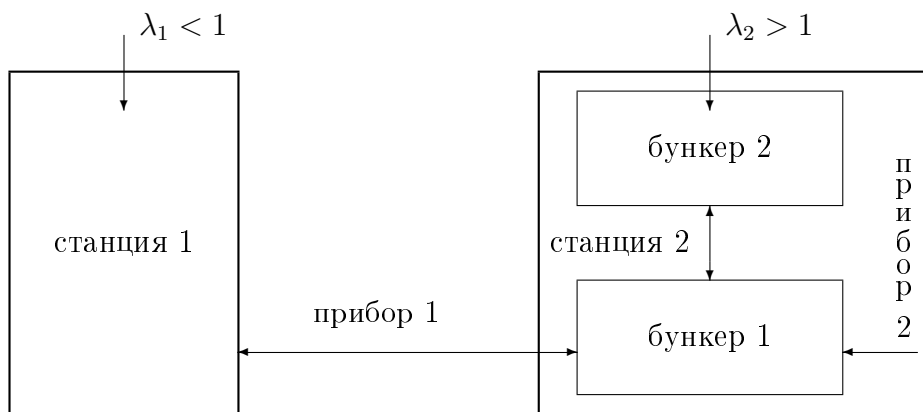


Рис. 1. Схема исследуемой системы. Бункеры меняются местами по мере опустошения, прибор 1 помогает прибору 2 в соответствии с описываемым ниже алгоритмом.

Для того, чтобы описать алгоритм этой помощи, выделим 3 состояния системы обслуживания.

Нейтральное состояние — каждый прибор работает на своей станции обслуживания (первый — на первой, второй — на второй). Первый прибор работает как в одноканальной системе обслуживания. На второй станции имеется два бункера: второй прибор обслуживает вызовы, скопившиеся в одном бункере, тогда как вызовы входного потока на

вторую станцию скапливаются в другом бункере. В момент опустошения очередного бункера они меняются местами: опустевший принимает входной поток, а наполненный поступает на обслуживание (если оба бункера пусты, ничего не происходит до прихода очередного вызова).

Состояние готовности — система работает так же, как и в нейтральном состоянии, но при этом первый прибор готов к переходу на вторую станцию.

Состояние помощи — оба прибора работают вместе на второй станции. Они обслуживают вызовы из очередного бункера, то есть работают как двухканальная система обслуживания, но без входного потока. Когда происходит обслуживание последнего вызова в бункере, свободный прибор ждет его окончания (т.е. простаивает). Затем бункеры меняются местами. Если в бункере один вызов, его всегда обслуживает второй прибор.

Функционирование системы состоит в поочередном переходе от нейтрального состояния к состоянию готовности, затем к состоянию помощи и вновь к нейтральному состоянию. Опишем алгоритм перехода от состояния к состоянию.

Находясь в нейтральном состоянии, система обслуживания работает в нем до тех пор, пока не опустеет первая станция. Затем система моментально переходит в состояние готовности.

Из состояния готовности система переходит в состояние помощи в момент смены бункеров на второй станции, если в поступающем на обслуживание бункере имеется не менее двух вызовов (если накопилось меньше, первый прибор остается на первой станции и продолжает там обслуживать вызовы). Если в момент перехода на первой станции происходило обслуживание вызова, оно прерывается (продолжение обслуживания этого вызова откладывается до выхода станции из состояния помощи).

Из состояния помощи система переходит в нейтральное состояние в момент опустошения второй станции от вызовов (за время обслуживания вызовов в одном бункере в другой не поступило ни одного вызова). Если на первой станции в этот момент нет вызовов, то система сразу переходит в состояние готовности. Если во всей системе нет вызовов, то система останавливается в нейтральном состоянии до прибытия очередного вызова из входного потока.

Стохастические предположения. Мы рассмотрим два варианта стохастических предположений.

(СП1) Интервалы между вызовами в первом входном потоке независимы и одинаково распределены со средним $1/\lambda_1$. Второй входной по-

ток — пуассоновский с параметром λ_2 и не зависит от первого. Времена обслуживания всех заявок независимы и одинаково распределены для каждого из приборов. Средние для обеих времен обслуживания равны 1, и распределение времени обслуживания σ вторым прибором имеет конечный момент $\mathbf{E}(\sigma \ln \sigma)$.

(СП2) Входные потоки являются независимыми пуассоновскими с параметрами λ_1 и λ_2 , соответственно. Все времена обслуживания взаимно независимы, не зависят от входных потоков и имеют экспоненциальное распределение с параметром 1.

В параграфе 3 мы получим результаты в предположениях (СП1). Затем в параграфе 4 мы ограничимся изучением жидкостной модели и ее взаимосвязей с марковским процессом только при частных предположениях (СП2), так как в более общем случае анализ модели проводится по сути так же, но существенно более громоздко.

Мы интересуемся вопросом стабильности рассматриваемой системы. Будем предполагать, что

$$\lambda_1 < 1 \quad \text{и} \quad \lambda_1 + \lambda_2 < 2 \quad (5)$$

— иначе система не может быть стабильна. При выполнении (5) несложно показать, что система всегда стабильна, если $\lambda_2 \leq 1$. Поэтому, наряду с (5), предполагаем, что

$$\lambda_2 > 1.$$

Отметим, что — при выполнении неравенств $\lambda_1 < 1$ и $\lambda_2 < 2$ — условие $\lambda_1 + \lambda_2 < 2$ эквивалентно следующему:

$$K \stackrel{def}{=} \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_1} \frac{\lambda_2 - 1}{2 - \lambda_2} < 1.$$

В последующих параграфах мы — используя метод жидкостной аппроксимации — приведем условия для стабильности и нестабильности рассматриваемой модели. Попутно мы покажем, что естественные жидкостные пределы допускают ветвление с континуальным числом ветвей.

Пусть $Q_1(t)$ — число вызовов на первой станции в момент t , и $Q_{2,1}(t)$, $Q_{2,2}(t)$ — количества вызовов в соответствующих бункерах во второй очереди. Положим $Q_2(t) = Q_{2,1}(t) + Q_{2,2}(t)$.

При $n = 1, 2, \dots$ рассмотрим следующую последовательность начальных состояний системы:

$$Q_1^{(n)}(0) = X^{(n)}, \quad Q_2^{(n)}(0) = 0, \quad \text{где} \quad X^{(n)} \equiv X_1^{(n)} \rightarrow \infty.$$

Введем ряд обозначений. Пусть $R_0^{(n)} = 0$, $T_1^{(n)}$ — первый момент перехода в состояние готовности (то есть опустошения первой станции),

$U_1^{(n)} \geq T_1^{(n)}$ – момент первого переключения в состояние помощи, $Y_1^{(n)}$ – количество вызовов на второй станции в этот момент времени, $Z_1^{(n)}$ – длина первого периода работы в состоянии помощи, $R_1^{(n)} \stackrel{def}{=} U_1^{(n)} + Z_1^{(n)}$ – конец первого периода работы в состоянии помощи, $X_2^{(n)}$ – количество вызовов на первой станции в момент $R_1^{(n)}$. По индукции, если обозначить через $R_{k-1}^{(n)}$ момент $(k-1)$ -го переключения в нейтральное состояние, а через $X_k^{(n)}$ количество вызовов на первой станции в этот момент, то $R_{k-1}^{(n)} + T_k^{(n)}$ есть первый из последующих моментов переключения в состояние готовности, $R_{k-1}^{(n)} + U_k^{(n)}$ – следующий за ним момент k -го переключения в состояние помощи, $Y_k^{(n)}$ – количество вызовов на второй станции в этот момент, и $R_k^{(n)} = R_{k-1}^{(n)} + U_k^{(n)} + Z_k^{(n)}$.

Отметим, что если $X_1^{(n)} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то при любом фиксированном k каждая из введенных выше характеристик (т.е. $X_k^{(n)}, T_k^{(n)}, U_k^{(n)}, Y_k^{(n)}$ и $Z_k^{(n)}$) тоже почти наверное стремится к бесконечности. По усиленному закону больших чисел при любом фиксированном $k \in \mathbf{N}$ и $n \rightarrow \infty$ имеют место почти наверное сходимости

$$\frac{X_k^{(n)}}{T_k^{(n)}} \rightarrow 1 - \lambda_1, \quad \frac{Y_k^{(n)}}{U_k^{(n)}} \rightarrow \lambda_2 - 1, \quad \frac{Y_k^{(n)}}{Z_k^{(n)}} \rightarrow 2 - \lambda_2, \quad \frac{X_{k+1}^{(n)}}{Z_k^{(n)}} \rightarrow \lambda_1 \quad (6)$$

Справедливость каждого из этих предельных соотношений практически очевидна. Например, первое следует из того, что в момент $R_{k-1}^{(n)}$ на первую станцию перешел обслуживающий прибор, имеется $X_k^{(n)}$ вызовов, вызовы обслуживаются с интенсивностью 1 и новые вызовы поступают с интенсивностью $\lambda_1 < 1$. Значит, общая длина очереди уменьшается со “скоростью” $1 - \lambda_1$.

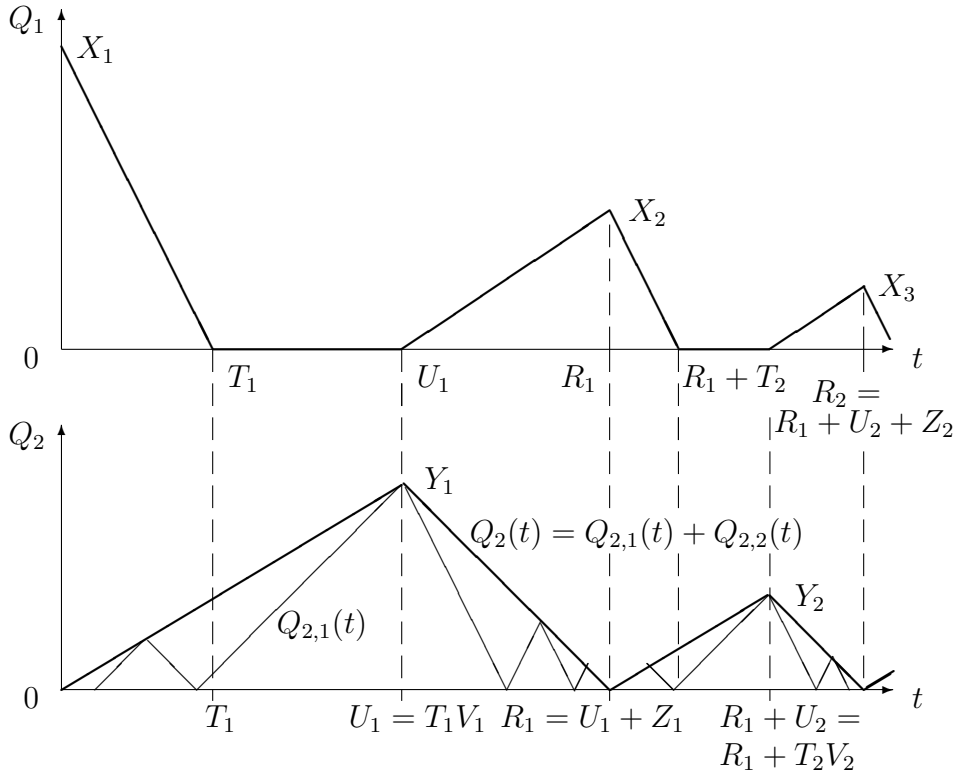


Рис. 2. Типичное поведение траекторий процессов длины очереди на первой (верхний график) и второй (нижний график) станциях при $X_1 \equiv X_1^{(n)} \gg 1$.

На самом деле, рис. 2 иллюстрирует предельный ($n = \infty$) случай (при естественной нормировке). В допредельном же случае траектории на графиках – это случайные кривые, колеблющиеся в окрестностях изображенных прямых линий. В частности, горизонтальным отрезкам прямых с нулевым значением соответствуют колеблющиеся в окрестности нуля траектории.

Для полного описания жидкостных пределов нам нужно знать возможные пределы отношений $U_k^{(n)}/T_k^{(n)}$ при $n \rightarrow \infty$. Как будет показано в конце следующего параграфа, при определенной скорости роста $T_1^{(n)}$ эти отношения сходятся к собственным случайным величинам и, в частности, на рисунке 2 число V_1 случайно по сути.

Мы начнем с изучения предельного поведения вспомогательной одноканальной системы обслуживания.

§ 3. Вспомогательная неэргодическая система обслуживания и ветвящиеся процессы

В данном параграфе все исследования производятся в предположениях (СП1), лишь иногда мы приводим частный вид утверждений, соответствующий предположениям (СП2).

В моменты времени $R_k^{(n)}$ на второй станции вызовы отсутствуют, и на интервалах времени $(R_{k-1}^{(n)}, R_{k-1}^{(n)} + U_k^{(n)})$ вторая станция ведет себя как одноканальная система обслуживания $M/G/1$, в которой интенсивность λ_2 поступления вызовов выше интенсивности обслуживания, равной единице. Рассмотрим первый из этих интервалов времени. Для упрощения обозначений мы будем опускать индекс n .

Будем называть *сессией* период обслуживания одного бункера. Через τ_1, τ_2, \dots будем обозначать времена между приходами вызовов, через $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ — времена обслуживания вызовов. Система обслуживания стартует из состояния $Q_{2,1}(0) = Q_{2,2}(0) = 0$, и это состояние сохраняется в течение экспоненциального времени $S_0 = \tau_1$ с параметром λ_2 .

Пусть ν_i — количество вызовов, пришедших в течение i -ой сессии (и обслуживаемых в течение $(i+1)$ -ой сессии) и S_i — продолжительность i -ой сессии (т.е. сумма времен обслуживания). Естественно положить $S_0 = \tau_1$. Ясно, что $\nu_0 = 1$ и $S_1 = \sigma_1$. Кроме того, $\nu_i = Q_2(S_0 + \dots + S_{i-1})$ при $i \geq 2$. Если $Q_2(S_0 + \dots + S_{i-1}) = 0$, то i -ая сессия является “пустой”, следующая $(i+1)$ -ая начинается в момент прихода очередного вызова извне и состоит в обслуживании только этого вызова.

Распределение случайной величины ν_1 легко вычисляется: при $k = 0, 1, \dots$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{Q_2(S_0 + S_1) = k\} &= \mathbf{EP}\{Q_2(S_0 + S_1) = k | \sigma_1\} \\ &= \int_0^\infty \frac{(\lambda_2 t)^k}{k!} e^{-\lambda_2 t} dF_\sigma(t), \end{aligned}$$

где $F_\sigma(t)$ — функция распределения времени обслуживания σ_1 .

Если, в частности, σ_1 имеет экспоненциальное распределение, то

$$\mathbf{P}\{Q_2(S_0 + S_1) = k\} = \int_0^\infty \frac{(\lambda_2 t)^k}{k!} e^{-\lambda_2 t} e^{-t} dt = \frac{\lambda_2^k}{(\lambda_2 + 1)^{k+1}}.$$

Нетрудно видеть, что производящей функцией для ν_1 будет

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \int_0^\infty \frac{(\lambda_2 t)^k}{k!} e^{-\lambda_2 t} dF_\sigma(t) = \int_0^\infty e^{(z-1)\lambda_2 t} dF_\sigma(t) = \phi_\sigma((1-z)\lambda_2),$$

где $\phi_\sigma(\lambda)$ - преобразование Лапласа для σ_1 .

Последние вычисления влекут следующее утверждение:

Л е м м а 1. Случайные величины ν_0, ν_1, \dots образуют надкритический ветвящийся процесс с иммиграцией в нуле, где $\nu_0 = 1$; ν_1 имеет дискретное распределение с производящей функцией $f(z) = \phi_\sigma((1-z)\lambda_2)$ (в случае экспоненциального распределения случайной величины σ_1 производящая функция равна $f(z) = (1 + \lambda_2(1-z))^{-1}$) со средним $\mathbf{E}\nu_1 = \lambda_2 > 1$; если $\nu_{k-1} > 0$, то ν_k допускает представление $\nu_k = \nu_k^{(1)} + \dots + \nu_k^{(\nu_{k-1})}$, где $\nu_i^{(j)}$, $i, j = 1, 2, \dots$, независимы и одинаково распределены с ν_1 ; если $\nu_{k-1} = 0$, то $\nu_k = 1$.

Действительно, за время обслуживания каждого вызова приходит случайное число вызовов, имеющее то же распределение, что и ν_1 , и эти случайные числа независимы в силу свойств пуассоновского потока.

Определим процесс Гальтона - Ватсона N_0, N_1, \dots , отличающийся от исходного процесса ν_0, ν_1, \dots отсутствием иммиграции в нуле: $N_0 = 1, N_1 = N_1^{(1)}$ имеет дискретное распределение с производящей функцией $f(z) = \phi_\sigma((1-z)\lambda_2)$, $\mathbf{E}N_1 = \lambda_2 > 1$; если $N_{k-1} > 0$, то $N_k = N_k^{(1)} + \dots + N_k^{(N_{k-1})}$, где $N_i^{(j)}$, $i, j = 1, 2, \dots$, независимы и одинаково распределены с N_1 ; если $N_{k-1} = 0$, то $N_k = N_{k+1} = \dots = 0$.

Последовательность N_k/λ_2^k — неотрицательный мартингал, который сходится п.н. к пределу W ([18], гл. I, разд. 8, или [19], гл. II, разд. 1). Распределение случайной величины W имеет атом в нуле, величина q которого равна вероятности вырождения процесса и является единственным на полуинтервале $[0, 1)$ решением уравнения $q = f(q) = \phi_\sigma((1-q)\lambda_2)$ (если σ_1 имеет экспоненциальное распределение, то $q = \lambda_2^{-1}$) тогда и только тогда, когда конечен момент $\mathbf{E}N_1 \ln N_1$, и тогда же W имеет непрерывную положительную плотность на положительной полуоси ([19], гл. II, разд. 1 и 2, гл. III, разд. 5 и 6). Преобразование Лапласа $\phi(s)$ для W удовлетворяет соотношению $\phi(\lambda_2 s) = f(\phi(s))$ ([19], гл. III, разд. 5), при этом плотность удастся найти в явном аналитическом виде только тогда, когда вероятности из производящей функции $f(z)$ образуют геометрическую прогрессию ([18], гл. I, разд. 8). В нашем случае это означает, что σ_1 экспоненциально распределена, и если обозначить $\alpha = (\lambda_2 - 1)/\lambda_2$, то $\mathbf{P}\{W \geq x\} = \alpha \exp\{-\alpha x\}$ при $x > 0$.

Введем случайную величину W_0 , имеющую условное распределение $\{W \geq x \mid W > 0\}$

$$\mathbf{P}\{W_0 \geq x\} = \mathbf{P}\{W \geq x \mid W > 0\}.$$

Обозначим через $m_1 < m_2 < \dots < m_r$ последовательные номера поколений, в которые $\nu_k = 0$, то есть $\nu_{m_1} = \nu_{m_2} = \dots = \nu_{m_r} = 0$; $\nu_k \neq 0$ при $k \neq m_j$, $j = 1, \dots, r$. Тогда r (число нулей процесса) и m_1, m_2, \dots, m_r — собственные случайные величины, где m_r — последний нуль процесса. Положим $m_r = -1$ при $r = 0$. Заметим, что $m_r = 0$ с вероятностью 0.

Так как вероятность вырождения процесса Гальтона - Ватсона равна q согласно [18], а r — число вырождений ветвящегося процесса с иммиграцией в нуле — есть число независимых испытаний до первого успеха с вероятностью успеха $1 - q$, то $\mathbf{P}\{r = k\} = q^k(1 - q)$, $k = 0, 1, \dots$. Следовательно, m_r конечно п.н.

Л е м м а 2. *Имеет место почти наверное сходимость $\nu_k/\lambda_2^k \rightarrow \zeta$ при $k \rightarrow \infty$, где ζ — случайная величина с распределением*

$$\mathbf{P}\{\zeta \geq t\} = \sum_{j=-1}^{\infty} \mathbf{P}\{W_0 \geq t\lambda_2^{j+1}\} \cdot \mathbf{P}\{m_r = j\}. \quad (7)$$

В частности, $\mathbf{P}\{\zeta = 0\} = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Для $t \geq 0$ и $k > j + 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\frac{\nu_k}{\lambda_2^k} \geq t \mid m_r = j\right\} &= \mathbf{P}\left\{\frac{\nu_k}{\lambda_2^k} \geq t \mid \nu_j = 0, \nu_{j+1} = 1, \nu_{j+i} > 0, i = 2, 3, \dots\right\} \\ &= \mathbf{P}\left\{\frac{N_{k-j-1}}{\lambda_2^k} \geq t \mid N_1 > 0, N_2 > 0, \dots\right\} \\ &= \mathbf{P}\left\{\frac{N_{k-j-1}}{\lambda_2^{k-j-1}} \geq t\lambda_2^{j+1} \mid N_1 > 0, N_2 > 0, \dots\right\}. \end{aligned}$$

Отсюда при $k \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\nu_k}{\lambda_2^k} \geq t \mid m_r = j\right\} \rightarrow \mathbf{P}\{W \geq t\lambda_2^{j+1} \mid W > 0\},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\frac{\nu_k}{\lambda_2^k} \geq t\right\} &= \sum_{j=-1}^{\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\nu_k}{\lambda_2^k} \geq t \mid m_r = j\right\} \cdot \mathbf{P}\{m_r = j\} \\ &\rightarrow \sum_{j=-1}^{\infty} \mathbf{P}\{W \geq t\lambda_2^{j+1} \mid W > 0\} \cdot \mathbf{P}\{m_r = j\}, \end{aligned}$$

так как m_r — собственная случайная величина.

Последовательность

$$V_k \stackrel{def}{=} \frac{\nu_k}{\lambda_2^k}$$

является субмартигалом.

В самом деле,

$$\mathbf{E}\{V_k | V_{k-1} = a\} = a$$

при $a > 0$, и $\mathbf{E}\{V_k | V_{k-1} = 0\} = \lambda_2^{-k}$.

Очевидно, что $\nu_k \leq \sum_{i=1}^k N_i^{(i)}$, где $N_i^{(i)}$ независимы и одинаково распределены с N_j .

Тогда $\mathbf{E}V_k \leq \sum_{i=1}^k \mathbf{E}N_i^{(i)} \lambda_2^{-k} = \sum_{i=1}^k \lambda_2^{-k+i} \leq \lambda_2(\lambda_2 - 1)^{-1}$.

По теореме Дуба о сходимости субмартигалов (см., например, [22], глава 7, параграф 4, теорема 1) имеет место сходимость почти наверное V_k к случайной величине ζ .

Доказательство завершено.

Обозначим $\Sigma_j = \nu_1 + \dots + \nu_j$.

Л е м м а 3. *Имеет место сходимость $\Sigma_n / \lambda_2^n \xrightarrow{a.s.} \zeta \lambda_2 / (\lambda_2 - 1)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Применяя лемму 2, получаем

$$\frac{\Sigma_k}{\lambda_2^k} = \sum_{i=1}^k \frac{\nu_i}{\lambda_2^i \lambda_2^{k-i}} \xrightarrow{a.s.} \zeta \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_2^{-i} = \zeta \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - 1} = \frac{\zeta}{\alpha}.$$

Лемма доказана.

Применим полученные результаты к предельной схеме, предложенной в конце предыдущего параграфа. Зафиксируем некоторое число $H > 0$. Рассмотрим последовательность $X_1^{(n)}$ такую, что

$$T_1^{(n)} / \lambda_2^n \rightarrow H.$$

В соответствии с обозначениями параграфа 2, $U_1^{(n)}$ – значение наименьшего из Σ_j , превысивших уровень $T_1^{(n)}$:

$$U_1^{(n)} = \min\{\Sigma_j : \Sigma_j \geq T_1^{(n)}\}.$$

Обозначим $\eta^{(n)} = \min\{j : \Sigma_j \geq T_1^{(n)}\}$. Тогда $U_1^{(n)} = \Sigma_{\eta^{(n)}}$.

Т е о р е м а 2. *Для любой последовательности $T_1^{(n)}$ такой, что $T_1^{(n)} / \lambda_2^n \rightarrow H > 0$, имеет место сходимость $U_1^{(n)} / T_1^{(n)} \rightarrow V(H)$ п. н.,*

где случайная величина $V(H)$ принимает значения на отрезке $[1, \lambda_2]$ и имеет функцию распределения

$$F_{V(H)}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_{W_0}(\alpha^2 \lambda_2^k H t) - F_{W_0}(\alpha^2 \lambda_2^k H), \quad t \in [1, \lambda_2]. \quad (8)$$

В частности, для экспоненциально распределенных времен обслуживания

$$F_{V(H)}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (e^{-\alpha^2 \lambda_2^k H} - e^{-\alpha^2 \lambda_2^k H t}), \quad t \in [1, \lambda_2]. \quad (9)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы рассмотрим только случай $1 \leq H \leq \lambda_2$. Дело в том, что при любых фиксированных $k \in \mathbf{Z}$ и $1 \leq H \leq \lambda_2$ и при $n \rightarrow \infty$ относительные пределы перескоков $V(H)$ и $V(H\lambda_2^k)$, $1 \leq H \leq \lambda_2$, через, соответственно, уровни $\lambda_2^n H$ и $\lambda_2^{n+k} H$ для последовательности $U_1^{(n)}$ тождественно равны. Тогда, в силу тождества $V(H) \equiv V(\lambda_2 H)$, утверждение теоремы будет верно при любых фиксированных $0 < H < \infty$.

Согласно лемме 3, последовательность Σ_k удовлетворяет условиям теоремы 1 из [21]. Отсюда

$$\eta^{(n)} - n \xrightarrow{a.s.} \left[-\frac{\ln \frac{\zeta}{\alpha H}}{\ln \lambda_2} \right] \stackrel{def}{=} \eta_H.$$

По теореме 2 из [21]

$$\left(\eta^{(n)} - n, U_1^{(n)} \lambda_2^{-n} \right) \xrightarrow{a.s.} \left(\eta_H, \frac{\zeta \lambda_2^{\eta_H}}{\alpha} \right).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{V(H) \geq t\} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{P}\left\{ \zeta \lambda_2^k \geq t \alpha H, \eta_H = k \right\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{P}\left\{ t \alpha H \lambda_2^{-k} \leq \zeta < H \alpha \lambda_2^{-k+1} \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Из (7), (10) получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{V(H) \geq t\} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-1}^{\infty} \mathbf{P}\left\{ t H \lambda_2^{j-k+1} \alpha \leq W_0 < H \lambda_2^{j-k+2} \alpha \right\} \mathbf{P}\{k_r = j\} \\ &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} \mathbf{P}\left\{ t H \lambda_2^s \alpha \leq W_0 < H \lambda_2^{s+1} \alpha \right\} \sum_{j=-1}^{\infty} \mathbf{P}\{k_r = j\} \\ &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} \mathbf{P}\left\{ t H \lambda_2^s \alpha \leq W_0 < H \lambda_2^{s+1} \alpha \right\}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

В частности, при экспоненциальном распределении времени обслуживания $V(H)$ имеет плотность распределения

$$f_{V(H)}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^2 \lambda_2^k H \exp \left\{ -\alpha^2 \lambda_2^k H t \right\}, \quad (11)$$

$t \in [1; \lambda_2]$.

Замечание 2. Как уже отмечалось ранее, распределение W_0 на положительной полуоси имеет положительную плотность. Следовательно, из представления (8) следует существование плотности у $V(H)$, равномерно по H отделенной от нуля. В равенстве (10) совпадают не только вероятности, но и соответствующие события (см. детали в [21]). Поэтому совместные распределения случайного процесса $\{V(H), 1 \leq H < \lambda_2\}$ однозначно определены и, следовательно, в силу периодичности, задано и совместное распределение семейства случайных величин $\{V(H), 0 < H < \infty\}$. При этом из представления (8) и абсолютной непрерывности W_0 получаем, что распределения $V(H)$ непрерывно зависят от параметра $H > 0$. Из приведенного выше доказательства следует, что при $n \rightarrow \infty$, если $H^{(n)} \rightarrow H > 0$, то $V(H^{(n)}) \rightarrow V(H)$ п.н., и если последовательность $T_1^{(n)}$ имеет вид $T_1^{(n)} = \lambda_2^{(n)} H^{(n)}$, то

$$\left| \frac{U_1^{(n)}}{T_1^{(n)}} - V(H^{(n)}) \right| \rightarrow 0 \quad \text{п.н.}$$

Более того, из первой части данного замечания методом от противного легко получить, что последняя сходимост имеет место для произвольных $H^{(n)}$ таких, что $\inf H^{(n)} > 0$ и $\sup H^{(n)} < \infty$ (т.е. не обязательно сходящихся к некоторому пределу H). Наконец, отметим, что семейство $\{V(H)\}$ обладает свойством *монотонности*: если $H_1 < H_2$, то $H_1 V(H_1) \leq H_2 V(H_2)$ п.н.

Из леммы 7 и оценок (19) следует, что в предположениях **(СП2)** распределения $V(H)$ хоть и различны при разных H , но очень близки друг к другу (их логарифмы имеют распределение почти не отличающееся от равномерного на $[0, 1]$).

Определим жидкостные пределы для рассматриваемой модели и изучим их свойства.

§ 4. Свойства жидкостной модели

Жидкостной моделью (см., напр., [2, 3]) называется семейство слабых пределов процесса при линейном масштабировании начальным условием по пространству и времени. Как будет следовать из построения, в нашей модели имеет место относительная компактность в более сильном смысле — сходимости почти наверное, то есть все *жидкостные пределы* являются п.н. пределами соответствующих подпоследовательностей процессов.

Будем предполагать выполнение условий **(СП2)**. Тогда состояние системы обслуживания в момент времени t описывается (непрерывным справа) строго марковским процессом $(Q^{(n)}(t); A^{(n)}(t))$, где

$$Q^{(n)}(t) = (Q_1^{(n)}(t); Q_{2,1}^{(n)}(t); Q_{2,2}^{(n)}(t))$$

с начальным условием $Q^{(n)}(0); A^{(n)}(t) = (A_1^{(n)}(t); A_2^{(n)}(t))$ — дискретный процесс, характеризующий положение приборов в системе: $A_1 \in \{1; 2\}$ — номер станции, на которой находится первый прибор, $A_2 \in \{0; 1; 2\}$ — номер бункера, который обслуживается вторым прибором; $A_2 = 0$, если на второй станции нет вызовов; в этом случае второй прибор бездействует. Первый прибор при отсутствии вызовов в системе находится на первой станции. Все состояния этого процесса образуют один класс существенных сообщающихся состояний.

Введем норму для процесса $Q^{(n)}$ как $|Q^{(n)}(t)| = Q_1^{(n)}(t) + Q_{2,1}^{(n)}(t) + Q_{2,2}^{(n)}(t)$.

Рассмотрим начальные условия вида $Q^{(n)}(0) = (X_1^{(n)}; 0; 0)$, где $X_1^{(n)} = (1 - \lambda_1)H^{(n)}\lambda_2^n$ и $\{H^{(n)}\}$ — последовательность положительных чисел, сходящаяся к некоторому $H > 0$, при $n \rightarrow \infty$.

При переходе к жидкостным пределам для удобства обозначений мы будем нормировать процессы длины очереди не величинами $X_1^{(n)}$, а пропорциональными им степенями λ_2^n . Более точно, мы рассмотрим процессы, предельные для последовательностей

$$\frac{Q^{(n)}(\lambda_2^n t)}{\lambda_2^n}.$$

При любом фиксированном $H > 0$ мы получим некоторый жидкостный предел $(q_1(t), q_{2,1}(t), q_{2,2}(t)), t \geq 0$, распределение которого зависит от H и не зависит от того, как последовательность H_n сходится к H . При этом жидкостная модель Φ есть множество предельных процессов,

зависящих от параметра H . В силу того, что приращения процессов

$$\frac{Q^{(n)}(\lambda_2^n t)}{\lambda_2^n}$$

равномерно интегрируемы, сходимость к предельному процессу является равномерной на отрезке $[0; T]$ при любом $T > 0$.

Зафиксируем некоторое число $H > 0$ и опишем соответствующий жидкостный предел. Точнее, мы ограничимся описанием двумерного процесса $(q_1(t), q_2(t))$, где $q_2(t) = q_{2,1}(t) + q_{2,2}(t)$.

Используем обозначения, введенные в параграфе 2, и соотношения (6). Имеем

$$\frac{T_1^{(n)}}{\lambda_2^n} \rightarrow t_1 = H \quad \text{п.н.}$$

Более того, по усиленному закону больших чисел, при $t \in [0, t_1]$

$$\frac{Q_1^{(n)}(\lambda_2^n t)}{\lambda_2^n} \rightarrow q_1(t) = (1 - \lambda_1)(H - t) \quad \text{п.н.}$$

и

$$\frac{Q_2^{(n)}(\lambda_2^n t)}{\lambda_2^n} \rightarrow q_2(t) = (\lambda_2 - 1)t \quad \text{п.н.}$$

Далее, по теореме 2,

$$\frac{U_1^{(n)}}{\lambda_2^n} \rightarrow u_1 = HV(H),$$

где $V(H)$ — случайная величина с распределением (9). При $t \in (t_1, u_1)$

$$q_1(t) = 0 \quad \text{и} \quad q_2(t) = (\lambda_2 - 1)t,$$

так как на этом интервале времени первый прибор продолжает работать на первой станции, где нагрузка меньше единицы. В частности,

$$q_2(u_1) = y_1 = \lim \frac{y_1^{(n)}}{\lambda_2^n} = (\lambda_2 - 1)u_1 \quad \text{п.н.}$$

Далее,

$$\frac{R_1^{(n)}}{\lambda_2^n} \rightarrow r_1 \stackrel{\text{def}}{=} u_1 + z_1,$$

где

$$z_1 = \lim \frac{Z_1^{(n)}}{\lambda_2^n} = \frac{y_1}{2 - \lambda_2} \quad \text{п.н.}$$

При $t \in (u_1, r_1)$

$$q_1(t) = \lambda_1(t - u_1)$$

и

$$q_2(t) = y_1 - (2 - \lambda_2)(t - u_1).$$

В частности,

$$q_1(T_1) = x_2 = \lim \frac{X_2^{(n)}}{\lambda_2^n} = \lambda_1 z_1 \quad \text{и} \quad q_2(r_1) = 0.$$

Наконец,

$$t_2 = \lim \frac{T_2^{(n)}}{\lambda_2^n} = \frac{x_2}{1 - \lambda_1} = t_1 V(t_1) K \quad \text{п.н.}$$

Далее мы можем продолжить построение жидкостного предела с использованием индукции. Для этого предположим, что $\{V_i(H), H > 0\}_{i \geq 1}$ — последовательность независимых копий семейства $\{V(H), H > 0\}$. Тогда при всех $i \geq 1$

$$u_i = t_i V_i(t_i), \quad y_i = (\lambda_2 - 1)y_i, \quad z_i = \frac{y_i}{2 - \lambda_2}, \quad x_{i+1} = \lambda_1 z_i, \quad t_{i+1} = \frac{x_{i+1}}{1 - \lambda_1}$$

и, в частности,

$$t_{i+1} = t_i V_i(t_i) K.$$

При этом траектории $q_1(t)$ и $q_2(t)$ являются п.н. непрерывными кусочно-линейными функциями.

Замечание 3. Для изучения положительной возвратности можно ограничиться рассмотрением начальных условий вида $Q^{(n)}(0) = (X_1^{(n)}; 0; 0)$. Действительно, если $Q^{(n)}(0) \neq (X_1^{(n)}; 0; 0)$, то момент $\eta^{(n)}$ первого достижения состояния $(\cdot; 0; 0)$ удовлетворяет условию $\eta^{(n)}/R_1^{(n)} \leq 1$ п. н. Пусть $\eta^{(n)}/T_1^{(n)} \rightarrow \eta$ п. н. Тогда

$$\eta \leq \frac{u_1 + z_1}{t_1} \leq \lambda_2 \left(1 + \frac{\lambda_2 - 1}{2 - \lambda_2} \right)$$

п. н., так как (согласно теореме 2) $u_1/t_1 \leq \lambda_2$ п. н.

Траектории предельного процесса — непрерывные кусочно-линейные функции, и максимум и минимум нормы на цикле (то есть в интервале времени $[0; r_1]$) достигаются, соответственно, в точках t_1 и u_1 . При этом минимум нормы на цикле отделен от нуля, а максимум — от бесконечности. Следовательно, можно указать положительные постоянные $C_1 < C_2$ такие, что $0 < C_1 \leq |q(\eta)|/|q(0)| \leq C_2 < \infty$ п. н.

Итак, норма предельного процесса в момент достижения искомого состояния ограничена и отделена от 0, а предельное время достижения ограничено п. н. некоторой константой. Поэтому можно ограничиться рассмотрением состояний $(\cdot; 0; 0)$ в качестве исходных.

Пусть $t_1 = H$, и при некотором $\varepsilon \in (0, 1)$

$$\mu \stackrel{def}{=} \mu_H(\varepsilon) = \min\{n \geq 2 : t_n \leq \varepsilon H\}$$

и

$$\tau \stackrel{def}{=} \tau_H(\varepsilon) = r_{\mu-1} + t_\mu.$$

Условия теоремы 1 будут выполнены, если мы покажем, что случайные величины $\{\tau_H, 1 \leq H < \lambda_2\}$ являются равномерно интегрируемыми. Так как

$$t_n \leq r_n - r_{n-1} \leq t_n \frac{\lambda_2}{2 - \lambda_2} \quad \text{п. н.},$$

то

$$\kappa \stackrel{def}{=} \sum_1^\mu t_i \leq \tau \leq \frac{\lambda_2}{2 - \lambda_2} \kappa,$$

и наша первоначальная система будет стабильна, если при некотором $\varepsilon \in (0, 1)$ семейство случайных величин

$$\{\kappa_H(\varepsilon), H \in [1, \lambda_2)\} \quad \text{равномерно интегрируемо.} \quad (12)$$

Несложно показать, что если (12) имеет место при некотором $\varepsilon \in (0, 1)$, то оно также выполнено при всех $\varepsilon \in (0, 1)$.

Пусть $t_1 = H \in [1, \lambda)$ и $\theta \stackrel{def}{=} \theta_H = \min\{n > 1 : t_n \leq t_1\}$. Так как распределения случайных величин $V(H)$ непрерывны, то при условии $\theta < \infty$ п.н. выполнено $t_\theta < t_1$ п.н. и $C_{t_1} \stackrel{def}{=} \mathbf{E}t_\theta/t_1 < 1$. Обозначим

$$E_\theta = \mathbf{E} \left(\sum_1^\theta t_i \right).$$

Л е м м а 4. Условие (12) с $\varepsilon = \lambda_2^{-1}$ выполняется тогда и только тогда, когда $E_{\theta_1} < \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\theta_1 \leq \kappa_1$, то условие (12) влечет конечность E_{θ_1} . Докажем обратное утверждение.

Во-первых, доопределим естественным образом случайные величины κ_H при всех положительных H . Тогда, в силу свойства самоподобия жидкостных пределов, при любом $H > 0$ и любом целом n случайные величины $\kappa_{\lambda_2^n H}$ и $\lambda_2^n \kappa_H$ будут одинаково распределены.

Во-вторых, вложенные цепи Маркова $\{t_{n+1} = t_n V_n(t_n) K\}$ удовлетворяют следующему свойству монотонности: если одна цепь $t_n^{H_1}$ стартует из состояния $t_1^{H_1} = H_1$, а другая цепь $t_n^{H_2}$ — из состояния $H_2 < H_1$, то $t_n^{H_1} \geq t_n^{H_2}$ п.н. при всех n .

В-третьих, из (11) следует (см. также замечание 2 для случая условий (СП1)), что при всех H и при всех $t \in [1, \lambda_2]$

$$f_{V(H)}(t) \geq C = \alpha^2 \exp\{-\alpha^2 \lambda_2^2\} > 0. \quad (13)$$

Далее, если $K \leq \lambda_2^{-1}$, то $V(H)K < 1$ п.н. при любом H и, следовательно, $t_{n+1} < t_n$ п.н. при всех n . Поэтому $\theta_1 = 2$ и $E_{\theta_1} \leq 2$. Кроме того, $\mathbf{P}(t_{n+1} \leq \lambda_2^{-1/2} t_n \mid t_n) \geq (\sqrt{\lambda_2} - 1)C \stackrel{\text{def}}{=} p$ п.н. Значит, при любом H случайная величина μ_H стохастически не больше, чем сумма двух независимых геометрически распределенных случайных величин с вероятностью успеха p и, тем самым, все $\{\mu_H, H \in [1, \lambda_2]\}$ равномерно интегрируемы. Тогда и случайные величины

$$\kappa_H \leq H \mu_H$$

являются равномерно интегрируемыми при $H \in [1, \lambda_2]$.

Пусть теперь $K > \lambda_2^{-1}$. Тогда, в силу (13), найдутся такие $\delta_1, \delta_2 > 0$, что

$$\mathbf{P}(t_{n+1} \geq (1 + \delta_1)t_n \mid t_n) \geq \delta_2 \quad \text{п.н.}$$

Пусть N таково, что $(1 + \delta_1)^N \geq \lambda_2^2$. Тогда

$$\begin{aligned} E_{\theta_1} &\geq \mathbf{E} \left(\sum_1^{\theta_1} t_i \mathbf{I}(t_{k+1} \geq (1 + \delta_1)t_k, k = 1, \dots, N - 1) \right) \\ &\geq \mathbf{E} \left(\sum_N^{\theta_1} t_i \mathbf{I}(t_{k+1} \geq (1 + \delta_1)t_k, k = 1, \dots, N - 1) \right) \end{aligned}$$

В силу монотонности, начиная с момента N , цепь Маркова допускает минорирующую цепь, стартующую в момент N из состояния λ_2^2 . Поэтому правая часть последнего неравенства не меньше, чем $\delta_2^N \mathbf{E} \kappa_{\lambda_2^2}(\lambda_2^{-2})$. Так как при любом $\varepsilon > 0$ распределения случайных величин $\kappa_{\lambda_2 H}(\varepsilon)$ и $\lambda_2 \kappa_H(\varepsilon)$ одинаковы, то и среднее $\mathbf{E} \kappa_{\lambda_2}(\lambda_2^{-2})$ конечно.

Из свойства монотонности, при любом $H \in [1, \lambda_2]$

$$\kappa_H(\lambda_2^{-1}) \leq \kappa_{\lambda_2}(\lambda_2^{-2}) \quad \text{п.н.,}$$

из чего следует равномерная интегрируемость семейства $\{\kappa_H(\lambda_2^{-1}), H \in [1, \lambda_2]\}$. Лемма доказана.

Л е м м а 5. (а) Если $\inf_H \mathbf{E}V(H) \geq 1/K$, то $E_{\theta_1} = \infty$.
(б) Если $\sup_H \mathbf{E}V(H) < 1/K$, то $E_{\theta_1} < \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через \mathcal{F}_i сигма-алгебру, порожденную случайными величинами $\{t_j, j \leq i\}$. Напомним, что мы рассматриваем начальное условие $H = 1 = t_1$.

Докажем (а). Достаточно рассмотреть случай $\theta_1 < \infty$ п.н. Предположим от противного, что $E_{\theta_1} < \infty$. Тогда

$$\begin{aligned} E_{\theta_1} &= 1 + \sum_{i \geq 2} \mathbf{E}\{t_i \mathbf{I}(\theta_1 \geq i)\} \\ &= 1 + \sum_{i \geq 2} \mathbf{E} \mathbf{E}\{t_i \mathbf{I}(\theta_1 \geq i) \mid \mathcal{F}_{i-1}\} \\ &\geq 1 + \sum_{i \geq 2} \mathbf{E}\{t_{i-1} \mathbf{I}(\theta_1 \geq i)\} \\ &= 1 + \sum_{i \geq 2} \mathbf{E}\{t_{i-1} \mathbf{I}(\theta \geq i-1)\} - C_1 \\ &> E_{\theta_1}. \end{aligned}$$

Получили противоречие.

Докажем (б). Обозначим $c = K \sup_H \mathbf{E}V(H)$. При любом $n \geq 2$

$$\begin{aligned} E_{\min(\theta_1, n)} &= 1 + \sum_{i=2}^n \mathbf{E}\{t_i \mathbf{I}(\theta_1 \geq i)\} \\ &\leq 1 + c \sum_{i=2}^n \mathbf{E}\{t_{i-1} \mathbf{I}(\theta_1 \geq i)\} \\ &\leq 1 + c \sum_{i=2}^n \mathbf{E}\{t_{i-1} \mathbf{I}(\theta_1 \geq i)\} \\ &\leq 1 + c \sum_{i=2}^{n+1} \mathbf{E}\{t_{i-1} \mathbf{I}(\theta_1 \geq i-1)\} \\ &= 1 + c E_{\min(\theta_1, n)}. \end{aligned}$$

Значит,

$$E_{\min(\theta_1, n)} \leq \frac{1}{1-c}$$

при любом n . Устремляя n к бесконечности, получаем

$$E_{\theta_1} \leq \frac{1}{1-c}.$$

Лемма доказана.

В приложении мы получим следующую оценку.

Т е о р е м а 3. В предположениях (СП2), при любом $H \in [1, \lambda_2]$

$$\left| \mathbf{EV}(H) - \frac{(\lambda_2 - 1)}{\ln \lambda_2} \right| < \frac{2(\lambda_2 - 1) \exp\{-\pi^2 \ln^{-1} \lambda_2\}}{\sqrt{\ln \lambda_2}} \stackrel{def}{=} \Delta,$$

$$где \Delta = \Delta(\lambda_2) < \frac{(\lambda_2 - 1)}{\sqrt{\ln \lambda_2}} \cdot 1.3098 \cdot 10^{-6}.$$

Проведем анализ условий конечности и бесконечности математических ожиданий E_{θ_1} в терминах λ_1 и λ_2 . В силу теоремы 3, $\mathbf{EV}(H)$ “почти не зависит” от H и приближенно равно $(\lambda_2 - 1)/\ln \lambda_2$. Приведем график кривой, соответствующей решению уравнения $K(\lambda_2 - 1)/\ln \lambda_2 = 1$ (приближенная граница областей в лемме 5), что после подстановки выражения для K дает

$$\lambda_1 = \frac{1}{1 + \frac{(\lambda_2 - 1)^2}{(2 - \lambda_2) \ln \lambda_2}} \quad (14)$$

(левая часть рис. 3). Эта кривая на интервале $(1, 2)$ близка к прямой $\lambda_1 = 2 - \lambda_2$, соответствующей необходимому условию эргодичности $\lambda_2 + \lambda_1 < 2$. На правой части рис. 3 изображена разность функций $\lambda_1 = 2 - \lambda_2$ и (14).

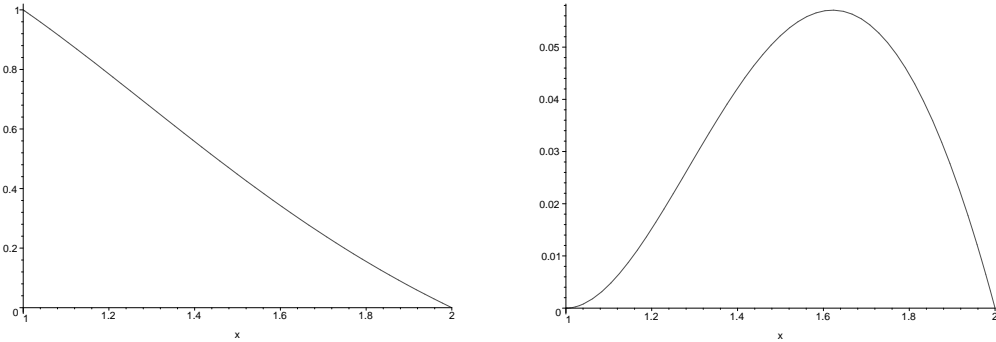


Рис. 3. График уравнения (14) в координатах (λ_2, λ_1) (слева) и в координатах $(\lambda_2, 2 - \lambda_2 - \lambda_1)$ (справа). Область эргодичности соответствует (с точностью до приводимых ниже оценок) множеству ниже графика на левом рисунке и множеству выше графика - на правом.

Оценим, насколько точная граница множества из леммы 5 отличается от приближенной, вычисляемой по формуле (14) и изображенной на рис. 3.

Точная граница лежит в пределах, определяемых уравнениями $K((\lambda_2 - 1)/\ln \lambda_2 \pm \Delta(\lambda_2)) = 1$. Обозначим через $\delta = \delta(\lambda_2)$ максимум модуля разности между решениями этих уравнений и значениями, определяемыми уравнением (14). Легко получить, что $\delta(\lambda_2)$ в несколько раз меньше, чем $\Delta(\lambda_2)$. Графики функций $\Delta(\lambda_2)$ и $\delta(\lambda_2)$ изображены на рис. 4.

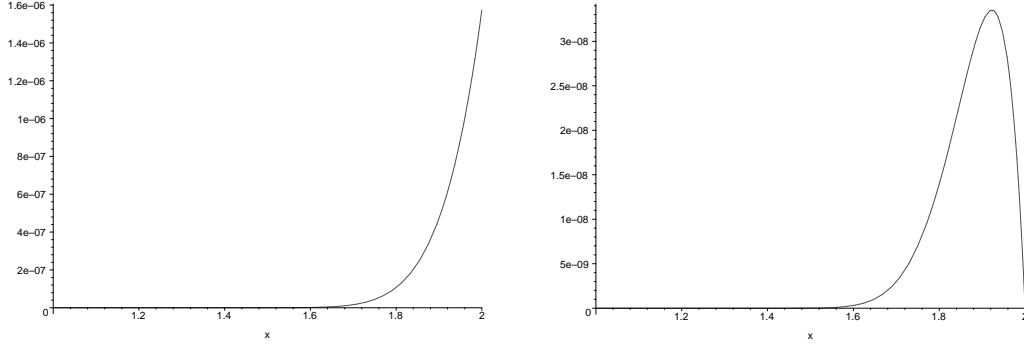


Рис. 4. Графики функций $\Delta(\lambda_2)$ и $\delta(\lambda_2)$.

Подведем итог. По лемме 5 $E_{\theta_1} < \infty$, если выполнено условие $\sup_H \mathbf{EV}(H) < 1/K$, которое верно, если

$$0 < \lambda_1 < \frac{1}{1 + \frac{(\lambda_2 - 1)^2}{(2 - \lambda_2) \ln \lambda_2}} - \delta(\lambda_2),$$

а $E_{\theta_1} = \infty$, если $\inf_H \mathbf{EV}(H) \geq 1/K$, для чего достаточно

$$\frac{1}{1 + \frac{(\lambda_2 - 1)^2}{(2 - \lambda_2) \ln \lambda_2}} + \delta(\lambda_2) < \lambda_1 < 2 - \lambda_2,$$

где $1 < \lambda_2 < 2$.

Объединяя результаты лемм 4 и 5 и теорем 1 и 3, получаем следующее утверждение.

Т е о р е м а 4. Пусть выполнены предположения (СП2). Если $E_{\theta_1} < \infty$, то двухканальная система обслуживания стабильна. Достаточным условием для конечности E_{θ_1} является $\sup_H \mathbf{EV}(H) < 1/K$. В свою очередь, последнее неравенство имеет место при

$$K((\lambda_2 - 1)/\ln \lambda_2 + \Delta(\lambda_2)) < 1,$$

где $\Delta(\lambda_2)$ изображена на рис. 4, и $|\Delta(\lambda_2)| < 1.6 \cdot 10^{-6}$.

Это условие можно переписать также в виде

$$0 < \lambda_1 < \frac{1}{1 + \frac{(\lambda_2 - 1)^2}{(2 - \lambda_2) \ln \lambda_2}} - \delta(\lambda_2),$$

где $\delta(\lambda_2)$ изображена на рис. 4, и $|\delta(\lambda_2)| < 3.5 \cdot 10^{-8}$.

Продолжим изучение жидкостных пределов в случае $K > \lambda_2^{-1}$. Заметим, что если $K \geq 1$, то $KV(H) > 1$ п.н. при любом H и, более того, найдутся положительные δ_1 и δ_2 такие, что $\mathbf{P}(KV(H) \geq 1 + \delta_1) \geq \delta_2$ при любом H . Поэтому $t_n \rightarrow \infty$ п.н. при $K \geq 1$.

Пусть теперь $K \in (\lambda_2^{-1}, 1)$. Для числа x обозначим через $[x]$ его целую и через $\langle x \rangle$ дробную части. Отметим, что $\langle \langle x \rangle + y \rangle = \langle x + y \rangle$ для любых чисел x и y .

Л е м м а 6. *Случайные величины $\langle \log_{\lambda_2}(HV(H)) \rangle$ одинаково распределены при всех H .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно провести доказательство при $H \in [1, \lambda_2)$. Зафиксируем H и положим $h = \log_{\lambda_2} H$.

Для любого $z \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\langle \log_{\lambda_2}(HV(H)) \rangle < z) &= \mathbf{P}(\log_{\lambda_2}(HV(H)) < z) \\ &+ \mathbf{P}(1 \leq \log_{\lambda_2}(HV(H)) < 1 + z) \\ &\stackrel{def}{=} P_1(z) + P_2(z). \end{aligned}$$

Рассмотрим сначала случай $0 < z \leq h$. Так как $V(H) > 1$ п.н., то $P_1(z) = 0$. Далее,

$$\begin{aligned} P_2(z) &= \mathbf{P}\left(V(H) \geq \frac{\lambda_2}{H}\right) - \mathbf{P}\left(V(H) \geq \frac{\lambda_2^{1+z}}{H}\right) \\ &= \sum_s \left[\mathbf{P}(\lambda_2^{s+1} \alpha \leq W_0 < H \lambda_2^{s+1} \alpha) - \mathbf{P}(\lambda_2^{s+1+z} \alpha \leq W_0 < H \lambda_2^{s+1} \alpha) \right] \\ &= \sum_s \mathbf{P}(\lambda_2^{s+1} \alpha \leq W_0 < \lambda_2^{s+1+z} \alpha) \\ &= \sum_s \mathbf{P}(\lambda_2^s \alpha \leq W_0 < \lambda_2^{s+z} \alpha). \end{aligned}$$

Пусть теперь $h \leq z < 1$. Так как $V(H) \leq \lambda_2$ п.н., то $P_2(z) = \mathbf{P}(HV(H) \geq \lambda_2)$. Поэтому

$$\begin{aligned} P_1(z) + P_2(z) &= 1 - \mathbf{P}(\lambda_2^z \leq HV(H) < \lambda_2) \\ &= 1 - \sum_s \mathbf{P}(\lambda_2^{s+z} \alpha \leq W_0 < \lambda_2^{s+1} \alpha) \\ &= \sum_s \mathbf{P}(\lambda_2^s \alpha \leq W_0 < \lambda_2^{s+z} \alpha). \end{aligned}$$

Значит, при каждом $z \in (0, 1)$ значение суммы $P_1(z) + P_2(z)$ не зависит от H .

С л е д с т в и е 1. Случайные величины $\langle \log_{\lambda_2}(KHV(H)) \rangle$ одинаково распределены при всех H .

Действительно,

$$\langle \log_{\lambda_2}(KHV(H)) \rangle = \langle \langle \log_{\lambda_2}(HV(H)) \rangle + \log_{\lambda_2} K \rangle,$$

где распределение правой части от H не зависит.

Заметим, что так как $1 < V(H) < \lambda_2$ п.н. при всех H , то при $H = 1/K$

$$KHV(H) = V(1/K) \in (1, \lambda_2) \quad \text{п.н.}$$

и, значит, $\langle \log_{\lambda_2} V(1/K) \rangle = \log_{\lambda_2} V(1/K)$.

Рассмотрим цепь Маркова $t_{n+1} = t_n V_n(t_n) K$ и обозначим $A_n = [\log_{\lambda_2} t_n]$, $B_n = \langle \log_{\lambda_2} t_n \rangle$ и $H_n = \lambda_2^{B_n}$.

С л е д с т в и е 2. При каждом $n \geq 2$ случайная величина B_n не зависит от случайных величин t_1, \dots, t_{n-1} и имеет то же распределение, что и случайная величина $\log_{\lambda_2} V(1/K)$.

Отметим, что распределение случайной величины A_n зависит как от B_n , так и от (t_1, \dots, t_{n-1}) .

Имеем

$$t_{n+1} = \lambda_2^{A_{n+1}} H_{n+1} = t_n V_n(t_n) K = \lambda_2^{A_n} H_n V_n(H_n) K \quad \text{п.н.}$$

при всех n . Значит,

$$B_{n+1} = \log_{\lambda_2} H_{n+1} = \langle \log_{\lambda_2}(H_n V_n(H_n) K) \rangle$$

и

$$A_{n+1} - A_n \stackrel{\text{a.s.}}{=} [\log_{\lambda_2}(H_n V_n(H_n) K)] \stackrel{\text{def}}{=} D_{n+1} \quad (15)$$

С л е д с т в и е 3. Пусть $\lambda_2^{-1} < K < 1$. При любом начальном условии $t_1 = H$ последовательность $\{D_n, n \geq 3\}$ является стационарной метрически транзитивной. При этом

$$\mathbf{E}D_3 = \mathbf{P}(V_1(1/K)V_2(V_1(1/K))K \geq \lambda_2) - \mathbf{P}(V_1(1/K)V_2(V_1(1/K))K < 1), \quad (16)$$

где, напомним, $\{V_1(H), H > 0\}$ и $\{V_2(H), H > 0\}$ — две независимые копии семества случайных величин $\{V(H), H > 0\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из построения следует, что распределение последовательности $\{D_{3+k+n}\}_{n \geq 0}$ одно и то же при всех $k = 0, 1, \dots$, что означает стационарность. Покажем метрическую транзитивность. Так как $1 < 1/K < \lambda_2$, то можно указать положительное ε такое, что $(1 + \varepsilon)/K < \lambda_2$. При этом при всех $n \geq 2$

$$\mathbf{P}(H_n \geq (1 + \varepsilon)/K) \geq C \left(1 - \frac{1 + \varepsilon}{K\lambda_2}\right) > 0.$$

При $n \geq 2$ для любого множества $G \subseteq [1, 1 + \varepsilon]$

$$\mathbf{P}(H_{n+1} \in G, D_{n+1} = 1 \mid H_n, A_n) \geq C\nu(G)$$

п.н. на множестве $\{H_n \geq (1 + \varepsilon)/K\}$, где $\nu(G)$ — лебегова мера множества G . Значит, последовательность $\{(H_n, G_n)\}$ является регенерирующей. Поэтому и последовательность $\{G_n\}$ — регенерирующая, и ее останочная сигма-алгебра тривиальна.

Далее, распределение H_2 совпадает с распределением случайной величины $V_1(1/K)$. Из (15) следует, что случайная величина D_3 может принимать только значения 1, 0 и -1 . Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{E}D_3 &= \mathbf{P}(D_3 = 1) - \mathbf{P}(D_3 = -1) \\ &= \mathbf{P}(H_2 V_2(H_2) K \geq \lambda_2) - \mathbf{P}(H_2 V_2(H_2) K < 1), \end{aligned}$$

что влечет (16).

Отметим, что $\mathbf{P}(D_3 = -1) = 0$ при $K \geq 1$. Поэтому справедливо

С л е д с т в и е 4. Пусть $K > \lambda_2^{-1}$. Если $\mathbf{E}D_3 < 0$, то $t_n \rightarrow 0$ п.н. при любом начальном $t_1 = H$. Если $\mathbf{E}D_3 > 0$, то $t_n \rightarrow \infty$ при любом $t_1 = H$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $1 \leq H_n \leq \lambda_2$ п.н. при всех n , то

$$\lambda_2^{A_n} \leq t_n \leq \lambda_2^{A_n+1} \quad \text{п.н.}$$

Поэтому $t_n \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда $A_n \rightarrow \infty$, и $t_n \rightarrow 0$ тогда и только тогда, когда $A_n \rightarrow -\infty$. Осталось воспользоваться усиленным законом больших чисел.

Т е о р е м а 5. Пусть выполнены предположения (СП2). Если $\mathbf{E}D_3 > 0$, то марковский процесс, описывающий двухканальную систему обслуживания, является невозвратным.

Доказательство. Отметим, что $\mathbf{P}(D_3 = 1) = 0$ при $K \leq \lambda_2^{-1}$. Поэтому $\mathbf{E}D_3 > 0$ влечет $K > \lambda_2^{-1}$.

Процесс $Q(t)$ является строго марковским, и все его состояния — сообщающиеся. Пусть $C > 0$ — некоторое положительное число. Количество состояний, для которых $|Q(t)| \leq C$, конечно при любом C . Возвратность процесса $Q(t)$ означает, что для любого момента времени $t \geq 0$ можно указать случайный момент $\gamma(t) \geq t$ п.н. такой, что $|Q(\gamma(t))| \leq C$ п.н.

Мы рассмотрим начальное состояние $Q(0) = (C_0, 0, 0)$ при некотором $C_0 \geq 1$ и обозначим через T_n момент n -го переключения первого прибора из второй очереди в первую и через $X_n = |Q(T_n)|$ — суммарную длину очереди в момент T_n , $X_0 = C_0$. Пусть $N \geq 1$ — произвольное целое число. Из вышесказанного следует, что если процесс $Q(t)$ возвратен, то для некоторого (достаточно большого) C и любого момента времени $t \geq 0$ можно указать случайный индекс $\nu(t) \geq 1$ такой, что $T_{N\nu(t)} \geq t$ п.н. и $X_{N\nu(t)} \leq 2C$ п.н.

Ниже мы выберем N и покажем, что при выполнении условий теоремы $X_{Nn} \rightarrow \infty$ п.н. при $n \rightarrow \infty$, из чего будет следовать невозвратность процесса длины очереди.

Заметим, что в жидкостной модели $t_{n+1} > Kt_n > \lambda_2^{-1}t_n$ п.н. при всех n . Пусть $N \geq 3$ таково, что

$$\mathbf{E} \left(\sum_{n=3}^N D_n \right) > 3 - \log_{\lambda_2}(1 - \lambda_1).$$

Тогда

$$\inf_{H>0} \mathbf{E} \left(\log_{\lambda_2}(x_N) - \log_{\lambda_2}(x_0) \mid x_0 = (1 - \lambda_1)H \right) \stackrel{def}{=} \gamma > 0.$$

Далее, для первоначальной модели, используя многократно экспоненциальное неравенство Чебышева, нетрудно получить следующие достаточно грубые оценки: существуют постоянные C_1 и C_2 такие, что

$$\mathbf{P}(X_1 \geq kX_0 \mid X_0) \leq C_1 \exp\{-C_2k\}, \quad (17)$$

и

$$\mathbf{P}(X_1 \leq X_0/k \mid X_0) \leq C_1 \exp\{-C_2k\} \quad (18)$$

при всех $k \geq 1$ и всех $X_0 \geq 1$. Ограничимся, к примеру, схемой доказательства неравенства (17).

Заметим, что $X_1 = \widetilde{X}_1 + \widehat{X}_1$, где $\widetilde{X}_1 = Q_1(U_1)$ и \widehat{X}_1 — количество вызовов, пришедших на первую станцию в интервале времени (U_1, R_1) . Тогда

$$\mathbf{P}(X_1 > x) \leq \mathbf{P}(\widetilde{X}_1 > x/2) + \mathbf{P}(\widehat{X}_1 > x/2).$$

Так как распределение \widetilde{X}_1 оценивается сверху стационарным распределением длины очереди в системе $M/M/1$ с интенсивностью входа λ_1 и интенсивностью обслуживания 1, то найдутся постоянные C_3 и C_4 такие, что

$$\mathbf{P}(\widetilde{X}_1 > x/2) \leq C_3 e^{-C_4 x}$$

при всех x . Далее,

$$\mathbf{P}(\widehat{X}_1 > kX_0) \leq \mathbf{P}(Z_1 > kX_0) + \mathbf{P}(\widehat{X}_1 > kX_0 \mid Z_1 = kX_0).$$

Пусть $S_n = \sum_1^n \tau_i$, где τ_i — независимые одинаково распределенные случайные величины с параметром $\lambda_1 < 1$. Тогда при достаточно малом $\alpha > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\widehat{X}_1 > kX_0 \mid Z_1 = kX_0) &= \mathbf{P}(S_{kX_0} \leq ckX_0) = \mathbf{P}(e^{-\alpha S_{kX_0}} \geq e^{-\alpha kX_0}) \\ &\leq e^{\alpha kX_0} (\mathbf{E} e^{-\alpha \tau_1})^{kX_0} \\ &= \left((1 + o(1)) (1 + \alpha) \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda_1} \right) \right)^{kX_0} \end{aligned}$$

Значит, при достаточно малом α выражение в скобках меньше единицы. Аналогично оцениваем $\mathbf{P}(Z_1 > kX_0)$ суммой

$$\mathbf{P}(Q_2(U_1) > c_1 kX_0) + \mathbf{P}(Z_1 > kX_0 \mid Q_2(U_1) = c_1 kX_0)$$

и показываем, что при $0 < c_1 < 2 - \lambda_2$ второе слагаемое также допускает экспоненциальную оценку. Далее аналогично оцениваем $\mathbf{P}(Q_2(U_1) > c_1 kX_0)$ с использованием $\mathbf{P}(U_1 > c_2 kX_0)$, потом последнюю вероятность с помощью $\mathbf{P}(T_1 > c_3 kX_0)$ при надлежащем выборе c_2 и c_3 . В результате получаем сумму экспоненциально убывающих функций и приходим к неравенству (17).

Возьмем пробную функцию $L(x) = \max(0, \log_{\lambda_2} x)$. Тогда, в силу (17)-(18), случайные величины $L(X_{Nn}) - L(X_0)$ и $(L(X_{Nn}) - L(X_0))^2$ являются равномерно интегрируемыми по X_0 .

Из замечания 2 следует, что сходимость $U_1^{(n)}/T_1^{(n)} \rightarrow H$ является равномерной по $H \in (H_1, H_2)$ при любом выборе $0 < H_1 < H_2 < \infty$. Из равномерной интегрируемости $\{L(X_{Nn}) - L(X_0)\}$ следует также равномерная сходимость средних. Значит, найдется число $C \gg 1$ такое, что

$$\inf_{X_0 \geq C} \mathbf{E} (L(X_{Nn}) - L(X_0) \mid X_0) \geq \gamma/2.$$

Последовательность X_{Nn} образует однородную по времени цепь Маркова, и для любого начального состояния X_0 с вероятностью единица найдется (случайный) момент n_0 такой, что $X_{Nn_0} \geq C$ п.н. Поэтому выполнены условия теоремы 1 работы [24], из которой следует, что $L(X_{Nn}) \rightarrow \infty$ п.н. Последнее влечет утверждение теоремы.

Замечание 4. В приложении найдено разложение в ряд Фурье для плотности случайной величины $\eta = \log_{\lambda_2} V(H)$, а формула (22) дает оценки для коэффициентов этого ряда, из которых легко получить

$$c_0 = 1, \quad |c_1| + |c_{-1}| < \Delta_0 = 4\pi \exp\left(-\frac{\pi^2}{\ln \lambda_2}\right) \sqrt{\frac{1}{\ln \lambda_2}} < 0.99 \cdot 10^{-5}, \quad (19)$$

$$\frac{\sum_{|k| \geq 2} |c_k|}{\Delta_0} < 10^{-4}.$$

Обозначим $\delta_0(\lambda_2) = \sup_H |\log_{\lambda_2} V(H) - 1|$. Из приведенных оценок следует, что равномерно по (H_1, H_2) совместная плотность случайного вектора $(\log_{\lambda_2} V_1(H_1), \log_{\lambda_2} V_2(H_2))$ отклоняется от равномерной на единичном квадрате не более чем на $\delta_0(\lambda_2)$, где $\sup_{\lambda_2} \delta_0(\lambda_2) \leq \Delta_0(1+10^{-3}) < 10^{-5}$.

Получим приближенное решение уравнения $\mathbf{E}D_3 = 0$. Пусть ζ_1, ζ_2 — независимые равномерно распределенные на $[0; 1]$ случайные величины. Тогда

$$\mathbf{E}D_3 \approx \mathbf{P}(\zeta_1 + \zeta_2 + \log_{\lambda_2} K \geq 1) - \mathbf{P}(\zeta_1 + \zeta_2 + \log_{\lambda_2} K < 0).$$

Учитывая, что $s \stackrel{def}{=} \log_{\lambda_2}(1/K) \in (0; 1)$, получаем:

$$\mathbf{E}D_3 \approx \frac{1}{2}((1-s)^2 - s^2) = \frac{1}{2} - s \approx 0.$$

Итак, получаем приближенное уравнение границы: $s = 1/2$, или $K = \lambda_2^{-1/2}$, или

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_2^{-1/2}}{\frac{\lambda_2-1}{2-\lambda_2} + \lambda_2^{-1/2}}. \quad (20)$$

Графики приближенных границ стабильности и невозвратности очень близки, и на рис 5. мы приводим разность соответствующих функций.

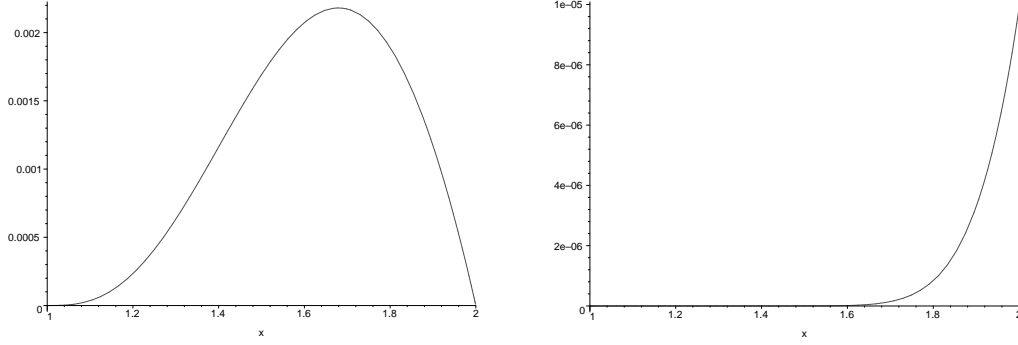


Рис. 5. Слева - разность графиков функций из уравнений (20) и (14) в координатах (λ_2, λ_1) . Справа - график функции $\delta_0(\lambda_2)$.

Найдем достаточное условие выполнения неравенства $\mathbf{E}D_3 > 0$. В силу приведенных в начале замечания оценок, $\mathbf{E}D_3 > \frac{1}{2} - s - \delta_0(\lambda_2)$. Отсюда получаем $K > \lambda_2^{-1/2+\delta_0(\lambda_2)}$, или

$$\lambda_1 > \frac{\lambda_2^{-1/2+\delta_0(\lambda_2)}}{\frac{\lambda_2-1}{2-\lambda_2} + \lambda_2^{-1/2+\delta_0(\lambda_2)}}.$$

В результате получаем

С л е д с т в и е 5. *В предположениях (СП2) достаточным условием для неустойчивости системы обслуживания является $K > \lambda_2^{-1/2+\delta_0(\lambda_2)}$, или*

$$\lambda_1 > \frac{\lambda_2^{-1/2+\delta_0(\lambda_2)}}{\frac{\lambda_2-1}{2-\lambda_2} + \lambda_2^{-1/2+\delta_0(\lambda_2)}},$$

где $|\delta_0(\lambda_2)| < 10^{-5}$ (график функции $\delta_0(\lambda_2)$ приведен на рис. 5 (справа)).

Замечание 5. Естественно предположить, что промежуточный случай, когда $E_{\theta_1} = \infty$ и $\mathbf{E}D_3 < 0$, соответствует нулевой возвратности изучаемого нами марковского процесса. Однако нам пока не удалось это доказать.

§ 5. Приложение

Для краткости всюду далее считаем, что $\lambda \stackrel{def}{=} \lambda_2$. Доказательство теоремы 3 основано на разложении плотности распределения случайной величины $\eta = \ln_\lambda V(H)$ в ряд Фурье. Результаты данного параграфа получены при активном содействии В.А. Ватутина.

Обозначим $y = \frac{\ln(\alpha^2 H)}{\ln \lambda}$. Тогда, во первых, $V(H) = \lambda^\eta$ и, во вторых, легко проверить, что плотность распределения случайной величины η имеет вид

$$f_\eta(x; H) \stackrel{def}{=} f_{\eta,y}(x) \stackrel{def}{=} \ln \lambda \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda^k \lambda^{x+y} \exp\{-\lambda^k \lambda^{x+y}\}.$$

Данное представление удобно тем, что по переменной $x + y$ функция $f_{\eta,y}(x)$ будет периодической с периодом 1, и удобное для дальнейших вычислений разложение в ряд Фурье достаточно произвести для функции $f_\eta(x) \stackrel{def}{=} f_{\eta,0}(x)$ на отрезке $[0, 1]$.

Отметим, что для любой функции $g : [1, \lambda_2] \rightarrow \mathbf{R}$ с конечным средним $\mathbf{E}g(V(H)) < \infty$ верно представление

$$\mathbf{E}g(V(H)) = \mathbf{E}g(\lambda^\eta) = \int_0^1 g(\lambda^x) f_{\eta,y}(x) dx. \quad (21)$$

Л е м м а 7. Пусть

$$f_\eta(x) = \lambda^x \ln \lambda \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda^k e^{-\lambda^{k+x}} \stackrel{def}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi k i x},$$

тогда

$$c_k = \int_0^1 e^{2\pi k i x} f_\eta(x) dx = \Gamma\left(1 + \frac{2\pi k i}{\ln \lambda}\right),$$

где $\Gamma(y)$ – стандартная гамма-функция при $y \in \mathbf{C}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя равенство $e^{2\pi i k x} = e^{2\pi i k(x+n)}$ при $n \in \mathbf{Z}$, вычислим коэффициенты разложения в комплексный ряд Фурье:

$$\begin{aligned} c_k &= \ln \lambda \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 e^{2\pi i k x} \lambda^{x+n} \exp\{-\lambda^{n+x}\} dx \\ &= \ln \lambda \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} e^{2\pi i k x} \lambda^x \exp\{-\lambda^x\} dx = \ln \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k x} \lambda^x \exp\{-\lambda^x\} dx \\ &= \int_0^{\infty} z^{2\pi i k / \ln \lambda} e^{-z} dz = \Gamma\left(1 + \frac{2\pi i k}{\ln \lambda}\right). \end{aligned}$$

Докажем теорему 3. Вычислим $\mathbf{EV}(H)$, используя разложение плотности в ряд Фурье из леммы 7.

$$\begin{aligned}\mathbf{EV}(H) &= \int_0^1 \lambda^x \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{2\pi ki(x+y)} dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{2\pi kiy} \int_0^1 \lambda^x e^{2\pi kix} dx \\ &= (\lambda - 1) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{c_k}{\ln \lambda + 2\pi ki} e^{2\pi kiy}.\end{aligned}$$

В силу того, что $\Gamma(1+x) = x\Gamma(x)$, и $|\Gamma(iy)| = \left(\frac{\pi}{y\operatorname{sh}(\pi y)}\right)^{1/2}$ (см. [23] стр. 43) для $k \in \mathbf{Z} \setminus 0$, получаем

$$\begin{aligned}b_k &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{(\lambda - 1)c_k}{\ln \lambda + 2\pi ki} e^{2\pi kiy} = \Gamma\left(\frac{2\pi ik}{\ln \lambda}\right) \frac{1}{\ln \lambda} \frac{2\pi ik(\lambda - 1)}{\ln \lambda + 2\pi ki} e^{2\pi kiy}, \\ |b_k| &= \left(\frac{\ln \lambda}{2|k| \operatorname{sh} \frac{2\pi^2|k|}{\ln \lambda}}\right)^{1/2} \frac{2|k|(\lambda - 1)}{\ln \lambda \sqrt{\ln^2 \lambda + (2\pi k)^2}},\end{aligned}$$

а при $k = 0$ имеем

$$b_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(\lambda - 1)c_0}{\ln \lambda} = \frac{\lambda - 1}{\ln \lambda}.$$

Оценим отличные от b_0 слагаемые. Учитывая очевидное неравенство $\operatorname{sh}(x) \geq e^x/2$, при $x > 0$, получаем

$$\begin{aligned}|b_k| &\leq \left(\frac{\ln \lambda}{|k|} \exp\left(-\frac{2\pi^2|k|}{\ln \lambda}\right)\right)^{1/2} \frac{(\lambda - 1)}{\ln \lambda} = \exp\left(-\frac{\pi^2 k}{\ln \lambda}\right) \frac{(\lambda - 1)}{\sqrt{k \ln \lambda}}, \\ q_\lambda &\stackrel{\text{def}}{=} \exp\left(-\frac{\pi^2}{\ln \lambda}\right) \leq \exp\left(-\frac{\pi^2}{\ln 2}\right) \stackrel{\text{def}}{=} q.\end{aligned}$$

Непосредственные вычисления дают $q \approx 6,548698489 \cdot 10^{-7}$, и

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} q_\lambda^k = \frac{2q_\lambda}{1 - q_\lambda} \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{2q}{1 - q} < 1.3098 \cdot 10^{-6}$$

Доказательство теоремы 3 завершено.

Нам необходимы оценки для коэффициентов c_k . Прежде всего отметим, что $c_0 = 1$. По аналогии с предшествующим,

$$|c_k| \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\ln \lambda}{2\pi|k| \operatorname{sh} \frac{2\pi^2|k|}{\ln \lambda}}\right)^{1/2} \frac{2\pi k}{\ln \lambda} \leq q_\lambda^{|k|} \sqrt{\frac{|k|}{\ln \lambda}}, \quad k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}, \quad (22)$$

из чего следует оценка (19) в замечании 4.

В заключение отметим, что, основываясь на реализованном в доказательстве теоремы подходе и представлении (21), без особого труда можно получить достаточно точные приближения для широкого класса функций $g(x)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рыбко А.Н., Столяр А.Л. Об эргодичности случайных процессов, описывающих функционирование открытых сетей массового обслуживания // Пробл. передачи информ. 1992. Т. 28. № 3. С. 3–26.
2. Dai J.G. On positive Harris recurrence of multiclass queueing networks: A unified approach via fluid models // Ann. Appl. Probab. 1995. V. 5. № 1. P. 49–77.
3. Stolyar A.L. On the stability of multiclass queueing networks: a relaxed sufficient condition via limiting fluid processes // Mark. Proc. Rel. Fields. 1995. V. 1. № 4. P. 491–512.
4. Dai J.G., Meyn S.P. Stability and convergence of moments for multiclass queueing networks via fluid limit models // IEEE Trans. Autom. Control. 1995. V. 40. № 11. P. 1889–1904.
5. Chen H. Fluid approximations and stability of multiclass queueing networks: work-conserving disciplines // Ann. Appl. Probab. 1995. V. 5. № 3. P. 637–665.
6. Down D.G. On the stability of polling models with multiple servers. CWI Report BS-R 9605. Amsterdam, 1996.
7. Foss S., Rybko A. Stability of multiclass Jackson-type networks // Mark. Proc. Rel. Fields. 1996. V. 2. № 3. P. 261–287.
8. Meyn S.P. Transience of multiclass queueing networks and their fluid models // Ann. Appl. Probab. 1995. V. 5. № 4. P. 946–957.
9. Пухальский А.А., Рыбко А.Н. Неэргодичность сетей обслуживания при нестабильности их жидкостных моделей // Пробл. передачи информ. 2000. Т. 36. № 1. С. 26–47.

10. *Kumar P.R., Seidman T.* Dynamic instabilities and stabilization methods in distributed real-time scheduling of manufacturing systems // IEEE Trans. Automatic Control. 1990. V. 35. № 3. P. 289–298.
11. *Chen H., Mandelbaum A.* Discrete flow networks: bottleneck analysis and fluid approximations // Math. Oper. Res. 1991. V. 16. № 2. P. 408–446.
12. *Bramson M.* Instability of FIFO queueing networks // Ann. Appl. Probab. 1994. V. 4. № 2. P. 414–431.
13. *Malyshev V.A.* Networks and dynamical systems // Adv. Appl. Probab. 1993. V. 25. № 1. P. 140–175.
14. *Ignatyik I., Malyshev V.* Classification of random walks in \mathbf{Z}_+^4 // Selecta Mathematica. 1993. V. 12. № 2. P. 129–166.
15. *Fayolle G., Malyshev V.A., Menshikov M.V.* Topics in the constructive theory of countable Markov chains. Cambridge University Press, 1995.
16. *Foss S., Kovalevskii A.* A stability criterion via fluid limits and its application to a polling system // Queueing Systems. 1999. V. 32. № 1. P. 131–168.
17. *Hunt P.J.* Pathological behaviour in loss networks // Journ. Appl. Probab. 1995. V. 32. № 2. P. 519–533.
18. *Харрис Т.* Теория ветвящихся случайных процессов. М.: Мир, 1966.
19. *Asmussen S., Hering H.* Branching Processes. Boston-Basel-Stuttgart, Birkhäuser, 1983.
20. *Athreya K.B., Ney P.F.* Branching Processes. Berlin, Springer-Verlag, 1972.
21. *Roesler U., Topchii V.A., Vatutin V.A.* The rate of convergence for weighted branching processes // Siberian Adv. Math. 2002. V. 12. № 4. P. 57–82.
22. *Ширяев А.Н.* Вероятность. М.: Наука, 1989.
23. *Кратцер А., Франц В.* Трансцендентные функции. М.: ИЛ, 1963.
24. *Фосс С.Г., Денисов Д.Э.* Об условиях невозвратности для цепей Маркова // Сиб. матем. журн. 2001. Т. 42. № 2. С. 364–371.