МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Механико-математический факультет

Д. А. КОРШУНОВ, С. Г. ФОСС

СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ИСПРАВЛЕННОЕ

Учебное пособие

НОВОСИБИРСК
2003

УДК 519.2
ББК 22.171
К66

Коршунов Д. А., Фосс С. Г.

Сборник задач и упражнений по теории вероятностей: Учебное пособие. — 2-е изд., испр. — Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2003. — 119 с.

ISBN 5–94356–160–9

Сборник содержит около 800 задач и упражнений по основным разделам учебных курсов теории вероятностей и теории случайных процессов.

Данное пособие предназначено для студентов и аспирантов естественно-научных и экономических факультетов Новосибирского государственного университета и других высших учебных заведений.

Табл. 4. Библиогр. 26 назв.

Адрес авторов: Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия

E-mail: korshunov@math.nsc.ru, foss@math.nsc.ru

$\dfrac{1602090000-00}{14Б(03)-97}$ Без объявл.

ISBN 5–94356–160–9

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящее издание сборника, в основном, печатается без изменений. По сравнению с первым изданием, выпущенным издательством НИИ математико-информационных основ обучения Новосибирского государственного университета в 1997 г., уточнены формулировки отдельных задач, немного изменены некоторые таблицы и добавлено несколько новых задач.

Мы глубоко благодарны нашим коллегам, нашедших время сообщить нам о недостатках первого издания.

Новосибирск, ноябрь 2003 г.

Д. А. Коршунов
С. Г. Фосс

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящий сборник задач и упражнений предназначен прежде всего для использования на практических занятиях по курсам теории вероятностей и случайных процессов на математических факультетах университетов. Кроме того, бóльшая часть задач, включенных в сборник, может предлагаться и студентам других естественно-научных специальностей, изучающим теорию вероятностей и математическую статистику.

При составлении сборника, содержащего около 800 задач различной степени сложности, была просмотрена весьма обширная литература (см. соответствующий список), а также дополнительные задачи и упражнения, использовавшиеся авторами и их коллегами в процессе преподавания вероятностных курсов на различных факультетах Новосибирского государственного университета. При этом авторы стремились отбирать задачи так, чтобы они были достаточно прозрачными по форме и по существу (точнее, не очень запутанными) и освещали основные разделы стандартного университетского курса теории вероятностей.

Мы решили не включать в сборник ответы и указания к решениям задач, и отнюдь не из-за лени авторов. По нашему мнению, это позволит преподавателям успешно использовать сборник не только на занятиях, но и при проведении контрольных работ и экзаменов, а студентам — развивать навыки работы «без подсказок».

Мы искренне признательны коллегам по кафедре теории вероятностей и математической статистики Новосибирского университета, многолетняя совместная работа с которыми оказала большое влияние на формирование наших педагогических взглядов: А. А. Боровкову, И. С. Борисову, В. М. Бородихину, В. И. Лотову, Б. А. Рогозину, А. И. Саханенко и В. В. Юринскому. Мы также благодарим А. Д. Коршунова, В. И. Лотова и Н. И. Чернову, замечания и предложения которых способствовали улучшению изложения материала и устранению ряда неточностей и неясных мест. Со своей стороны надеемся, что результат

нашего труда будет полезен друзьям и коллегам в их работе по обучению новых поколений студентов столь приятной во всех отношениях науке, как теория вероятностей. Мы будем весьма признательны за любые замечания и предложения как по тексту и составу задач, так и по структуре сборника в целом.

Новосибирск, январь 1997 г.

Д. А. Коршунов
С. Г. Фосс

ОТДЕЛ I

ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРОСТРАНСТВО

§ 1. Операции над событиями

Пусть Ω — непустое множество, элементы которого будем называть *элементарными исходами.* Для любых подмножеств A и B в Ω используются следующие обозначения: $A \cup B$ (или $A + B$) — *объединение* (или *сумма*) A и B; $A \cap B$ (или AB) — *пересечение* (или *произведение*) A и B; $A \setminus B$ — *разность* A и B; $\overline{A}$ — *обратное* (*дополнительное*) множество, т. е. множество $\Omega \setminus A$.

Выделяется некоторый класс $\mathscr{F}$ подмножеств в Ω, образующий σ-алгебру подмножеств, т. е. класс, обладающий следующими свойствами:

1) $\Omega \in \mathscr{F}$;

2) если $A \in \mathscr{F}$, то $\overline{A} \in \mathscr{F}$;

3) если $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{F}$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$.

Элементы класса $\mathscr{F}$ называются *событиями*, а сам класс $\mathscr{F}$ называется *σ-алгеброй событий.* Событие Ω называют *достоверным*, а событие $\varnothing$ (пустое множество) — *невозможным* событием. События A и B *несовместны*, если $AB = \varnothing$.

Функция $\mathbf{P} : \mathscr{F} \to [0, 1]$ называется *вероятностью*, если $\mathbf{P}\{\Omega\} = 1$ и

$$\mathbf{P}\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right\} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}\{A_i\}$$

для любого набора попарно несовместных событий $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{F}$.

Тройка $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ называется *вероятностным пространством.*

1.1. Среди студентов, собравшихся на лекцию по теории вероятностей, наудачу выбирают одного. Пусть событие A заключается в том, что выбранный студент окажется юношей; событие B — в том, что он не курит, а событие C — в том, что он живет в общежитии. Описать событие $AB\overline{C}$. Когда справедливы:

а) равенство $AB\overline{C} = A$;

б) включение $\overline{C} \subset B$;

в) равенство $\overline{A} = B$;

г) равенство $\overline{B} = B$?

1.2. Монета подбрасывается три раза подряд. Построить пространство Ω элементарных исходов. Описать событие A, состоящее в том, что выпало не менее двух гербов.

1.3. Монета подбрасывается три раза подряд. Является ли σ-алгеброй следующая система подмножеств:

а) $\varnothing$, Ω, {ГГГ, ГРГ, ГГР, ГРР}, {РГГ, РРГ, РГР, РРР};

б) $\varnothing$, Ω, {ГГГ, ГРГ, РГР, РРР}, {РГГ, РРГ, РГР, РРР}?

Если «нет», найти наименьшую σ-алгебру, порождённую этой системой подмножеств.

1.4. Пусть A, B и C — события. Каков смысл равенств:

а) $ABC = A$; б) $A + B + C = A$?

1.5. Пусть A, B и C — события. Упростить выражения:

а) $(A + B)(B + C)$;

б) $(A + B)(A + \overline{B})$;

в) $(A + B)(A + \overline{B})(\overline{A} + B)$.

1.6. Установить, какие из следующих соотношений правильны:

а) $(A + B) \setminus C = A + (B \setminus C)$;

б) $(\overline{A + B})C = \overline{A}\overline{B}C$;

в) $AB + BC + CA \supset ABC$;

г) $(A + B) \setminus A = B$;

д) $\overline{A + B + C} = \overline{ABC}$;

е) $(\overline{A + B})C = C \setminus C(A + B)$;

ж) $ABC = AB(B + C)$;

з) $A + B = (A \setminus AB) + B$;

и) $(\overline{A + B})C = \overline{A}C + \overline{B}C$;

к) $A\overline{B}C \subset A + B$;

л) $(AB + BC + CA) \subset (A + B + C)$.

1.7. Пусть A, B и C — произвольные события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что из A, B и C:

а) произошло только A;

б) произошли A и B, но C не произошло;

в) все три события произошли;

г) произошло хотя бы одно из этих событий;

д) произошло хотя бы два события;

е) произошло одно и только одно из этих событий;

ж) произошло два и только два события;

з) ни одно событие не произошло;

и) произошло не более двух событий.

1.8. Рабочий изготовил n деталей. Пусть событие A_i состоит в том, что i-я изготовленная им деталь имеет дефект. Записать событие, заключающееся в том, что:

а) ни одна из деталей не имеет дефектов;

б) хотя бы одна деталь имеет дефект;

в) ровно одна деталь имеет дефект;

г) не более двух деталей имеют дефекты;

д) по крайней мере две детали не имеют дефектов;

е) точно две детали дефектны.

1.9. Объединение $A \cup B$ двух событий может быть выражено как объединение двух несовместных событий, именно $A \cup B = A \cup (B \setminus AB)$. Выразить подобным образом объединение трех событий A, B и C.

1.10. Доказать, что для любого набора событий $A_1, \ldots, A_n$ справедливы равенства

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A}_i}, \qquad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \overline{\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i}.$$

1.11. Пусть B и C — два события. Положим $A_n = B$, если n чётное и $A_n = C$, если n нечётное. Найти событие, состоящее в том, что:

а) произошло бесконечно много событий среди A_n;

б) произошло конечное число событий среди A_n?

1.12. Для любых событий A и B доказать, что:

а) $1 - \mathbf{P}\{\overline{A}\} - \mathbf{P}\{\overline{B}\} \leqslant \mathbf{P}\{AB\} \leqslant 1$;

б) $\mathbf{P}\{A \cup B\} = \mathbf{P}\{A\} + \mathbf{P}\{B\} - \mathbf{P}\{AB\}$;

в) $\mathbf{P}\{AB\} = 1 - \mathbf{P}\{\overline{A}\} - \mathbf{P}\{\overline{B}\} + \mathbf{P}\{\overline{A}\,\overline{B}\}$.

1.13. Для любого набора событий $A_1, \ldots, A_n$ доказать следующие равенства:

$$\text{а) } \mathbf{P}\left\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right\} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}\{A_i\} - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathbf{P}\{A_i A_j\} + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} \mathbf{P}\{A_i A_j A_k\} - \cdots + (-1)^{n+1} \mathbf{P}\left\{\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right\};$$

$$\text{б) } \mathbf{P}\left\{\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right\} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}\{A_i\} - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathbf{P}\{A_i \cup A_j\} + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} \mathbf{P}\{A_i \cup A_j \cup A_k\} - \cdots + (-1)^{n+1} \mathbf{P}\left\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right\}.$$

1.14. Пусть $\mathbf{P}\{A_n\} = 1$ при всех n. Доказать равенство

$$\mathbf{P}\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right\} = 1.$$

1.15. Пусть $\mathscr{F}$ — совокупность всех подмножеств $A \subseteq \mathbf{R}$ таких, что A или $\mathbf{R} \setminus A$ содержит конечное число элементов. Является ли $\mathscr{F}$ алгеброй множеств? Найти наименьшую σ-алгебру, порождённую $\mathscr{F}$. Являются ли измеримыми относительно $\sigma(\mathscr{F})$ следующие функции:

а) $f(x) = x$; г) $f(x) = \mathbf{I}_{[0,1]}(x)$;
б) $f(x) \equiv 17$; д) $f(x) = \mathbf{I}_{\{0\}}(x)$;
в) $f(x) = \mathbf{I}_{\mathbf{Z}}(x)$; е) $f(x) = x\mathbf{I}_{\mathbf{Z}}(x)$?

1.16. Пусть $\mathscr{F}$ — совокупность отрезков в $\mathbf{R}$ вида $[0, 2^{-n})$, $n \in \mathbf{Z}^+$.
а) Является ли $\mathscr{F}$ σ-алгеброй подмножеств?
б) Найти наименьшую σ-алгебру, порождённую $\mathscr{F}$.
в) Какие функции из $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$ измеримы относительно $\sigma(\mathscr{F})$?

1.17. Пусть $\mathscr{F}$ — совокупность отрезков в $\mathbf{R}$ вида $[0, n)$, $n \in \mathbf{Z}^+$.
а) Является ли $\mathscr{F}$ σ-алгеброй подмножеств?
б) Найти наименьшую σ-алгебру, порождённую $\mathscr{F}$.
в) Какие функции из $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$ измеримы относительно $\sigma(\mathscr{F})$?

1.18. Пусть $\mathscr{F}_1$ — совокупность всех подмножеств в $\mathbf{R}^2$ вида $B \times \mathbf{R}$, где $B \subseteq \mathbf{R}$ измеримо по Борелю, а $\mathscr{F}_2$ — вида $\mathbf{R} \times B$.
а) Являются ли $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_2$ σ-алгебрами подмножеств?
б) Какие события из $\mathscr{F}_2$ измеримы относительно $\mathscr{F}_1$?
в) Какие функции из $\mathbf{R}^2$ в $\mathbf{R}$ измеримы относительно $\mathscr{F}_1$?
г) Найти наименьшую σ-алгебру, порождённую $\mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_2$.

§ 2. Классическое вероятностное пространство

Пусть множество Ω состоит из конечного числа n элементарных исходов $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, σ-алгебра $\mathscr{F}$ состоит из всех подмножеств пространства Ω. Для любого события A положим

$$\mathbf{P}\{A\} = \frac{\text{число элементов в } A}{n}.$$

Это определение вероятности, при котором все элементарные исходы равновозможны, называется *классическим*.

2.1. Брошены три монеты. Найти вероятности событий:
а) A={первая монета выпала гербом};
б) B={выпало ровно два герба};
в) C={выпало не больше двух гербов}.

2.2. Бросаются две игральные кости. Пусть событие A состоит в том, что выпавшая сумма очков нечётна, а событие B — в том, что хотя бы на одной из костей выпала единица. Описать события
а) AB; в) $A \cup B$;
б) $\overline{AB}$; г) $A\overline{B}$.
Найти их вероятности.

2.3. Ребенок играет с 10 буквами разрезной азбуки: А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т. Какова вероятность того, что при случайном расположении букв в ряд он получит слово МАТЕМАТИКА?

2.4. В лифт 9-этажного дома на первом этаже вошли 5 человек. Известно, что каждый из них с равной вероятностью может выйти на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятность того, что:

а) все пятеро выйдут на пятом этаже;

б) все пятеро выйдут одновременно (на одном и том же этаже);

в) все пятеро выйдут на разных этажах.

2.5. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков одного размера. Определить вероятность того, что наудачу извлеченный кубик будет иметь ровно две окрашенные грани.

2.6. Какова вероятность того, что в четырехзначном номере случайно выбранного в большом городе автомобиля

а) все цифры разные;

б) две пары одинаковых цифр;

в) только две одинаковые цифры;

г) только три одинаковые цифры;

д) все цифры одинаковые;

е) сумма двух первых цифр равна сумме двух последних цифр?

2.7. Бросаются 4 игральные кости. Найти вероятность того, что на них выпадет по одинаковому числу очков.

2.8. В ящике 10 красных и 6 синих пуговиц. Какова вероятность того, что две наудачу вынутые пуговицы будут одноцветными?

2.9. Десять рукописей разложены по 30 папкам (на одну рукопись приходится три папки). Найти вероятность того, что в случайно отобранных 6 папках не содержится целиком ни одна рукопись.

2.10. Студент пришел на зачет, зная из 30 вопросов только 24. Если студент не знает ответа на поставленный вопрос, преподаватель задает ему еще один, дополнительный. Зачет ставится, если студент правильно отвечает хотя бы на один вопрос. Какова вероятность получения зачета?

2.11. Колода игральных карт (52 листа, 4 масти по 13 карт в каждой) тщательно перетасована. Наудачу берут 6 карт (без возвращения). Описать пространство элементарных исходов, а также найти вероятность того, что среди этих карт

а) окажется король пик;

б) окажутся представители всех мастей;

в) будет ровно 5 карт одной масти.

Какое наименьшее число карт надо взять из колоды, чтобы с вероятностью более $1/2$ среди них встретились хотя бы две карты одинакового наименования?

Решить задачу **2.11** в случае, когда из колоды вынимается

2.12. 7 карт. **2.13.** 8 карт.

2.14. Из колоды карт (52 листа) наудачу вынимаются три карты. Найти вероятность того, что:

а) среди них окажется ровно один туз;

б) среди них окажется хотя бы один туз;

в) это будут тройка, семерка и туз (в любом порядке).

2.15. Колоду карт (36 листов) наудачу разделяют на две равные пачки. Чему равна вероятность, что:

а) в каждой из пачек окажется по два туза;

б) в одной из пачек окажутся все четыре туза;

в) в пачках окажется по равному числу красных карт?

2.16. N человек садятся случайным образом за круглый стол. Найти вероятность того, что:

а) друзья A и B сядут рядом, причём B слева от A;

б) друзья A, B и C сядут рядом, причём A справа от B, а C слева.

2.17. N человек, среди которых находятся А и Б, случайным образом поставлены в ряд. Какова вероятность того, что между А и Б окажется ровно r человек?

2.18. Числа $1, \ldots, n$ расположены в случайном порядке. Найти вероятность того, что числа

а) 1 и 2; б) 1, 2 и 3

расположены рядом в указанном порядке.

2.19. На полке в случайном порядке расставлено n книг, среди которых находится двухтомник Д. Лондона. Предполагая, что различные расположения книг равновероятны, найти вероятность того, что оба тома расположены рядом.

2.20. Из набора чисел $1, 2, \ldots, N$ случайно отобраны n чисел и расположены в порядке возрастания: $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Какова вероятность того, что $x_m < M$. Найти предел этой вероятности, когда $M, N \to \infty$ так, что $M/N \to \alpha > 0$.

2.21. В лотерее распространяются n билетов, из которых m выигрышные. Некто купил k билетов. С какой вероятностью среди них есть хотя бы один выигрышный?

2.22. Цифры 1, 2, 3, 4 и 5 написаны на пяти карточках. Наудачу вынимаются по одной три карточки и кладутся рядом слева направо. Какова вероятность того, что полученное число окажется чётным?

2.23. Найти вероятность того, что среди r случайно выбранных (с возвращением) цифр:

а) не встретится 0; в) не встретится ни 0, ни 1;

б) не встретится 1; г) нет двух равных;

д) не встретится хотя бы одна из двух цифр 0 или 1.

2.24. Из цифр 1, 2, 3, 4 и 5 сначала выбирают одну, а затем из оставшихся четырех — вторую. Найти вероятность того, что:

а) в первый раз; в) оба раза

б) во второй раз;

будет выбрана нечётная цифра.

2.25. Найти вероятность получить 12 очков хотя бы один раз при n бросаниях двух игральных костей.

2.26. В партии, состоящей из N изделий, имеется M бракованных. С какой вероятностью среди n $(n < N)$ наудачу выбранных из этой партии изделий окажется m бракованных $(m < M)$? Не больше m бракованных?

2.27. Некто написал n адресатам письма, в каждый конверт вложил по одному письму и затем наудачу написал на каждом конверте один из n адресов. Найти вероятность того, что хотя бы одно письмо попало по назначению.

2.28. В урне имеется n билетов с номерами от 1 до n. Билеты вынимаются наудачу по одному (без возвращения) до опустошения урны. Чему равна вероятность того, что:

а) хотя бы в одном случае номер вынутого билета совпадает с номером произведенного испытания;

б) номера первых m вынутых билетов будут идти в порядке возрастания?

2.29. Один школьник, желая подшутить над своими товарищами, собрал в гардеробе все пальто, а потом развесил их в случайном порядке. Какова вероятность p_n того, что хотя бы одно пальто попало на прежнее место, если всего в гардеробе n крючков и на них висело n пальто. Найти предел p_n при $n \to \infty$.

2.30. Участник лотереи «спортлото» из 49 наименований видов спорта называет шесть. Выигрыш определяется тем, сколько наименований он угадал из шести других наименований, которые определяются в момент розыгрыша лотереи с помощью специального устройства, реализующего случайный выбор. С какой вероятностью участник угадает все шесть наименований? Пять наименований и т. д.?

2.31. Ящик содержит 90 годных и 10 дефектных шурупов. С какой вероятностью среди десяти наудачу взятых шурупов нет дефектных?

2.32. Чему равна вероятность того, что при двух бросаниях трех игральных костей получится один и тот же результат, если:

а) кости различны; б) кости неразличимы?

2.33. В очереди у театральной кассы стоит $2n$ человек; n человек имеют денежные знаки только пятирублевого достоинства, а остальные

n — только десятирублевого достоинства. В начале продажи в кассе денег нет, каждый покупатель берет только по одному билету стоимостью 5 рублей. Чему равна вероятность того, что никому не придётся ждать сдачу?

2.34. Найти вероятность того, что при случайном размещении n различных шаров по n ящикам:

а) ни один ящик не останется пустым;

б) ровно один ящик останется пустым.

2.35. Пусть имеется n ячеек, в которые случайно размещаются r неразличимых частиц. Такой схеме соответствуют фотоны, атомные ядра и атомы, содержащие чётное число элементарных частиц. Они подчиняются *статистике Бозе — Эйнштейна*, в которой рассматриваются только различимые размещения частиц по ячейкам и каждому из них приписывается равная вероятность. Найти эту вероятность. Найти вероятность наличия в первой ячейке ровно k частиц.

2.36. Пусть имеется n ячеек и r неразличимых частиц. Частицы размещаются по ячейкам так, что в одной ячейке не может находиться более одной частицы. Такой схеме соответствуют электроны, протоны и нейтроны. Они подчиняются *статистике Ферми — Дирака*, в которой каждому такому размещению частиц по ячейкам приписывается равная вероятность. Найти эту вероятность.

2.37. Пусть имеется n ячеек, в которые случайно размещаются r занумерованных частиц. Чему равна вероятность того, что:

а) в k-ю ячейку попало ровно s частиц;

б) хотя бы одна ячейка осталась пустой?

2.38. Поток из k частиц улавливается системой из n счетчиков, регистрирующих частицы. Каждая частица с одинаковой вероятностью попадает в любой из счетчиков.

а) Какова вероятность того, что присутствие частиц будет отмечено ровно r счетчиками?

б) Какова вероятность $p(k_1, \ldots, k_n)$ того, что первый счетчик зарегистрирует k_1 частиц, второй — k_2, ..., где $k_1 + \cdots + k_n = k$?

в) Пусть $n/k = l$ — целое число. При каких значениях k_1, ..., k_n вероятность $p(k_1, \ldots, k_n)$ достигает своего максимума?

2.39. Каждая из n палок разламывается на две части — длинную и короткую. Затем $2n$ обломков случайным образом соединяются в n пар, каждая из которых образует новую «палку». Найти вероятность того, что:

а) части будут соединены в первоначальном порядке;

б) все длинные части будут соединены с короткими.

2.40. В городе проживает $n+1$ человек. Один из них, узнав новость, сообщает её другому, тот — третьему и т. д., причём передача новости осуществляется следующим образом: человек, которому сообщена новость, случайным образом выбирает одного из n жителей и сообщает новость ему, тот поступает точно так же и т. д. Найти вероятность того, что новость будет передана r раз

а) без возвращения к человеку, который узнал её первым;

б) без повторного сообщения её кому-либо.

2.41. Решить предыдущую задачу в предположении, что на каждом шаге новость сообщается одним человеком группе из N случайно выбранных людей.

2.42. Найти вероятность того, что:

а) дни рождения 12 человек придутся на 12 разных месяцев года (предполагается, что все месяцы равновероятны);

б) дни рождения 6 человек придутся в точности на два месяца.

2.43. Найти вероятность того, что для данных 30 человек 6 из 12 месяцев года содержат по два дня рождения и 6 — по три.

2.44. Собрались вместе n незнакомых человек. Найти вероятность того, что хотя бы у двух из них совпадают дни рождения.

2.45. В чулане лежит n пар ботинок. Случайно выбираются r ботинок ($r \leqslant n$). Чему равна вероятность того, что среди них

а) не будет ни одной пары;

б) будет ровно одна пара;

в) ровно две пары;

г) будет хотя бы одна пара?

2.46. Группа из $2n$ девочек и $2n$ мальчиков делится на две равные подгруппы. Найти вероятность того, что каждая подгруппа содержит одинаковое число мальчиков и девочек.

2.47. Группа из 3 девочек и $3n$ мальчиков делится на три равные подгруппы. Какова вероятность того, что все девочки окажутся в разных подгруппах.

2.48. Бросаются 5 игральных костей. Найти вероятность того, что по меньшей мере на

а) двух;

б) трех

из них выпадут одинаковые грани.

2.49. Две игральные кости бросаются r раз. Найти вероятность того, что каждая из шести комбинаций (1,1), ..., (6,6) появится по меньшей мере один раз.

2.50. В купейный вагон (9 купе по 4 места) семи пассажирам продано семь билетов. Найти вероятность того, что оказались занятыми

а) ровно два купе;

б) ровно три купе.

2.51. Из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ одно за другим выбирают без возвращения два числа. Какова вероятность того, что разность между первым выбранным числом и вторым будет не меньше m, $m > 0$.

2.52. Из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ наудачу выбирается число ξ. Найти предел при $n \to \infty$ вероятности того, что $\xi^2 - 1$ делится на 10.

2.53. Из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ случайно выбираются (с возвращением) два числа ξ и η. Найти предел при $n \to \infty$ вероятности события $\xi^2 + \eta^2 \leqslant n^2$.

2.54. Из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, $n \geqslant 4$, случайно выбираются (с возвращением) два числа ξ и η. Какая из вероятностей больше:

а) $\mathbf{P}\{\xi^2 - \eta^2$ делится на $2\}$ или $\mathbf{P}\{\xi^2 - \eta^2$ делится на $3\}$;

б) $\mathbf{P}\{\xi^3 - \eta^3$ делится на $2\}$ или $\mathbf{P}\{\xi^3 - \eta^3$ делится на $3\}$?

§ 3. Геометрические вероятности

Пусть Ω — ограниченное измеримое множество в $\mathbf{R}^d$, имеющее Лебегову меру $\operatorname{mes} \Omega > 0$. Для любого измеримого подмножества $A \subset \Omega$ положим

$$\mathbf{P}\{A\} = \frac{\operatorname{mes} A}{\operatorname{mes} \Omega}.$$

Это определение вероятности, соответствующее случайному выбору точки из множества Ω, называется *геометрическим.*

3.1. В квадрат с вершинами (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) наудачу брошена точка. Пусть (ξ, η) — её координаты. Доказать, что для любых $0 \leqslant x, y \leqslant 1$

$$\mathbf{P}\{\xi < x, \eta < y\} = \mathbf{P}\{\xi < x\}\mathbf{P}\{\eta < y\} = xy.$$

Для $0 < z < 1$ найти:

а) $\mathbf{P}\{|\xi - \eta| < z\}$;

б) $\mathbf{P}\{\min(\xi, \eta) < z\}$;

в) $\mathbf{P}\{(\xi + \eta)/2 < z\}$;

г) $\mathbf{P}\{\xi\eta < z\}$;

д) $\mathbf{P}\{\max(\xi, \eta) < z\}$;

е) $\mathbf{P}\{\xi + 2\eta < z\}$.

3.2. Случайная точка A наудачу выбирается в прямоугольнике со сторонами 1 и 2. Найти вероятности событий: расстояние от A

а) до ближайшей стороны прямоугольника не превосходит x;

б) до каждой стороны прямоугольника не превосходит x;

в) до каждой диагонали прямоугольника не превосходит x.

3.3. На плоскости начерчены параллельные прямые, находящиеся друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу брошена игла длины $2r < 2a$. Какова вероятность того, что игла пересечет одну из прямых?

3.4. На бесконечную шахматную доску со стороной клетки $2a$ наудачу брошена игла длины $2r < 2a$. Найти вероятность того, что игла попадет целиком внутрь одной клетки.

3.5. На плоскости начерчены параллельные прямые, находящиеся друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу брошена монета радиуса $r < a$. Какова вероятность того, что монета пересечет одну из прямых?

3.6. На бесконечную шахматную доску со стороной клетки $2a$ наудачу брошена монета радиуса $r < a$. Найти вероятность того, что:

а) монета попадет целиком внутрь одной клетки;

б) монета пересечет не более одной стороны одной клетки.

3.7. На отрезок $[0, a]$ наудачу брошены три точки. Найти вероятность того, что из отрезков, равных расстояниям от точки 0 до точек падения, можно составить треугольник.

3.8. Стержень длины l разломан в двух наудачу выбранных точках. С какой вероятностью из полученных отрезков можно составить треугольник?

3.9. Стержень длины l наудачу разламывается на две части, после чего бóльшая из частей опять разламывается надвое в наудачу выбранной точке. Найти вероятность того, что из полученных частей можно составить треугольник.

3.10. Три точки A, B и C лежат на одной прямой, причём точка B находится между точками A и C, длина отрезка AB равна a, а длина отрезка BC — b. На каждый из отрезков AB и BC наудачу бросается по одной точке. Найти вероятность того, что можно составить треугольник из следующих трех отрезков: от точки A до первой брошенной точки; между двумя брошенными точками; от второй брошенной точки до точки C.

3.11. В шаре радиуса R случайно и независимо друг от друга разбросано n точек. Какова вероятность того, что расстояние от центра до ближайшей точки будет не менее r. Найти предел этой вероятности при R, $n \to \infty$, если $n/R^3 \to c$.

3.12. Точка (ξ, η) выбирается наудачу в квадрате $[0, 1]^2$. Какова вероятность того, что уравнение $x^2 + \xi x + \eta = 0$ имеет

а) действительные корни; в) корни разного знака?

б) положительные корни;

3.13. Точка (ξ, η, ζ) выбирается наудачу в кубе $[0, 1]^3$. Какова вероятность того, что корни уравнения $\xi x^2 + \eta x + \zeta = 0$ действительные?

3.14. (Задача о встрече). Два лица A и B условились встретиться в определенном месте между двумя и тремя часами дня. Пришедший первым ждет другого в течение 10 минут, после чего уходит. Чему равна вероятность встречи этих лиц, если каждый из них может прийти в любое время в течение указанного часа?

3.15. (Продолжение задачи о встрече). Два лица A и B условились встретиться в определенном месте между двумя и тремя часами дня. Лицо A ждет другого в течение 10 минут, после чего уходит; лицо B ждет другого в течение 15 минут. Чему равна вероятность встречи этих лиц, если каждый из них может прийти в любое время в течение указанного часа?

3.16. На окружности наудачу выбраны три точки A, B и C. Найти вероятность того, что треугольник ABC будет:

а) остроугольным;
б) тупоугольным;
в) прямоугольным;
г) правильным;
д) равнобедренным.

3.17. В квадрат наудачу брошены три точки. Найти вероятность того, что они образуют вершины

а) какого-нибудь треугольника;
б) правильного треугольника;
в) прямоугольного треугольника.

3.18. Какой толщины должна быть монета, чтобы вероятность падения на ребро равнялась 1/3? *Указание*: момент инерции вращения не учитывать.

ОТДЕЛ II

УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ И НЕЗАВИСИМОСТЬ

§ 4. Условная вероятность

Условная вероятность $\mathbf{P}\{A|B\}$ события A при условии, что произошло событие B ненулевой вероятности, определяется формулой

$$\mathbf{P}\{A|B\} = \frac{\mathbf{P}\{AB\}}{\mathbf{P}\{B\}}.$$

4.1. Пусть $\mathbf{P}\{A_1|A_2\} = \mathbf{P}\{A_1\}$. Показать справедливость следующих равенств:

а) $\mathbf{P}\{A_1|\overline{A}_2\} = \mathbf{P}\{A_1\}$; б) $\mathbf{P}\{\overline{A}_1|A_2\} = \mathbf{P}\{\overline{A}_1\}$.

4.2. Верны ли равенства:

а) $\mathbf{P}\{B|A\} + \mathbf{P}\{\overline{B}|A\} = 1$; б) $\mathbf{P}\{B|A\} + \mathbf{P}\{B|\overline{A}\} = 1$?

4.3. Выразить условную вероятность $\mathbf{P}\{C|\overline{AB}\}$ через вероятности $\mathbf{P}\{A\}$, $\mathbf{P}\{B\}$, $\mathbf{P}\{C\}$, $\mathbf{P}\{AB\}$, $\mathbf{P}\{BC\}$, $\mathbf{P}\{AC\}$ и $\mathbf{P}\{ABC\}$.

4.4. Рассмотрим семью с двумя детьми. Какова вероятность того, что в семье оба ребенка — мальчики, если:

а) старший ребенок — мальчик;

б) по крайней мере один из детей — мальчик?

4.5. Брошены три игральные кости. Чему равна вероятность того, что на одной из них выпала единица, если на всех трех костях выпали разные числа?

4.6. Известно, что при бросании 10 игральных костей выпала по крайней мере одна единица. Какова при этом вероятность того, что выпали две или более единицы?

4.7. Брошены две игральные кости. Чему равна вероятность того, что сумма выпавших на них очков равна 8, если известно, что эта сумма есть чётное число?

4.8. Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что на первой кости выпало 4 очка, если известно, что на второй кости выпало больше очков, чем на первой?

4.9. Игральная кость бросается до тех пор, пока не выпадет единица. Известно, что для этого потребовалось чётное число бросаний. Найти вероятность того, что единица впервые выпадет при втором бросании.

4.10. Из колоды карт (36 листов) последовательно вынуты две карты. Найти:

а) безусловную вероятность того, что вторая карта окажется тузом (неизвестно, какая карта была вынута вначале);

б) условную вероятность того, что вторая карта будет тузом, если первоначально был вынут туз.

4.11. Из полной колоды карт (52 листа) вынимают сразу две карты. Одну из них смотрят — она оказалась

а) дамой; б) тузом;

после этого две вынутые карты перемешивают и одну из них берут наугад. Найти вероятность того, что она окажется тузом.

4.12. Из полной колоды карт (52 листа) вынимают одновременно n карт, $n < 52$. Одну из них смотрят — она оказывается королем. После этого её перемешивают с остальными вынутыми картами. Найти вероятность того, что при втором вынимании карты из этих n мы снова получим короля.

4.13. Письмо находится в письменном столе с вероятностью p, причём с равной вероятностью оно может быть в любом из восьми ящиков стола. Мы просмотрели 7 ящиков и письма не нашли. Какова при этом вероятность, что письмо в восьмом ящике?

4.14. В ящике лежат 12 красных, 8 зеленых и 10 синих шаров. Наудачу вынимаются два шара. Какова вероятность того, что вынуты шары разного цвета, если известно, что среди них нет синего?

§ 5. Независимые события

События A и B называются *независимыми*, если $\mathbf{P}\{AB\} = \mathbf{P}\{A\}\mathbf{P}\{B\}$.

События $A_1, \ldots, A_n$ называются *независимыми в совокупности*, если для любого подмножества индексов $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$ выполняется равенство

$$\mathbf{P}\{A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k}\} = \mathbf{P}\{A_{i_1}\}\mathbf{P}\{A_{i_2}\} \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}\{A_{i_k}\}.$$

5.1. Доказать, что если события A и B независимы, то события A и $\overline{B}$; $\overline{A}$ и B; $\overline{A}$ и $\overline{B}$ также независимы.

5.2. События $A_1, \ldots, A_n$ независимы в совокупности; $\mathbf{P}\{A_k\} = p_k$. Найти вероятности

а) одновременного появления всех этих событий;

б) появления хотя бы одного из этих событий;

в) появления ровно одного (безразлично какого) события.

5.3. (Пример Бернштейна). На плоскость бросается тетраэдр, три грани которого покрашены соответственно в красный, синий и зеленый цвета, а на четвертую грань нанесены все три цвета. Событие К означает, что при бросании тетраэдра на плоскость выпала грань, содержащая красный цвет, событие С — грань, содержащая синий цвет, и З — зеленый цвет. Проверить независимость в совокупности и попарную независимость событий К, С и З.

5.4. Бросаются две игральные кости. Рассмотрим три события: A — на первой кости выпало нечётное число очков, B — на второй кости выпало нечётное число очков, C — сумма очков на обеих костях нечётна. Выяснить, зависимы или нет события A, B и C

а) в совокупности; б) попарно.

5.5. Бросаются три игральные кости. Событие A состоит в том, что одинаковое число очков выпало на первой и второй костях, B — одинаковое число очков на второй и третьей костях, C — на первой и третьей. Выяснить, зависимы или нет события A, B и C

а) в совокупности; б) попарно.

5.6. Имеются 3 попарно независимых события, которые, однако, все вместе произойти не могут. Предполагая, что все они имеют одну и ту же вероятность p, определить наибольшее возможное значение p.

5.7. Брошены последовательно три монеты. Определить, зависимы или нет события А=\{выпал герб на первой монете\} и В=\{выпала хотя бы одна решка\}.

5.8. Пусть $\Omega = [0,1]$, $\mathscr{F}$ — σ-алгебра борелевских множеств, $\mathbf{P}$ — Лебегова мера на отрезке Ω и $A = [0,1/2]$. Построить события B и C такие, что $\mathbf{P}\{B\} = \mathbf{P}\{C\} = 1/2$, причём события A, B и C независимы в совокупности.

5.9. Точка $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ выбрана наудачу в квадрате $[0,1]^2$. При каких значениях r независимы события $A = \{|\xi_1 - \xi_2| \geqslant r\}$ и $B = \{\xi_1 + \xi_2 \leqslant 3r\}$?

5.10. Точка $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ выбрана наудачу в квадрате $[0,1]^2$. Пусть $A = \{\xi_1 \leqslant 1/2\}$, $B = \{\xi_2 \leqslant 1/2\}$ и $C = \{(\xi_1 - 1/2)(\xi_2 - 1/2) < 0\}$. Выяснить, зависимы или нет эти события

а) в совокупности; б) попарно.

5.11. Доказать, что если события A и B несовместны, $\mathbf{P}\{A\} > 0$ и $\mathbf{P}\{B\} > 0$, то события A и B зависимы.

5.12. Пусть событие A таково, что оно не зависит от самого себя. Показать, что тогда $\mathbf{P}\{A\} = 0$ или $\mathbf{P}\{A\} = 1$.

5.13. Выяснить, какими должны быть события A и B, чтобы события AB и $A \cup B$ были независимы?

5.14. Пусть события A, B и C попарно независимы и $\mathbf{P}\{C\} > 0$. Верно ли равенство $\mathbf{P}\{A \cup B | C\} = \mathbf{P}\{A \cup B\}$?

5.15. Какое минимальное число точек должно иметь конечное вероятностное пространство, чтобы на этом пространстве можно было задать n независимых в совокупности событий $A_1, \ldots, A_n$, вероятности которых отличны от нуля и единицы?

§ 6. Схема Бернулли

Производятся независимые испытания. В каждом испытании возможно всего два исхода: «успех» и «неудача», причём вероятность успеха равна p. Тогда вероятность того, что в n испытаниях произойдёт ровно k успехов, равна $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

6.1. Пусть вероятность попадания в цель равна $1/5$. Производится 10 независимых выстрелов. Какова вероятность попадания в цель по меньшей мере дважды?

6.2. Симметричную монету бросают до тех пор, пока она не выпадет одной и той же стороной два раза подряд. Найти вероятности следующих событий:

а) опыт закончится до шестого бросания;

б) потребуется чётное число бросаний.

6.3. Симметричную монету бросают до тех пор, пока герб не выпадет в m-й раз. Найти вероятность того, что опыт закончится при n-ом бросании. Найти эту же вероятность в случае несимметричной монеты, т. е. если вероятность выпадения герба равна $p \neq 1/2$.

6.4. Из урны, содержащей $2n$ белых и $2n$ черных шаров, наудачу извлекают (с возвращением) $2n$ шаров. Какова вероятность того, что среди них окажется поровну шаров белого и черного цвета?

6.5. (Парадокс шевалье де Мере). Что вероятнее: при бросании четырех игральных костей хотя бы на одной получить единицу или при 24 бросаниях двух костей хотя бы один раз получить две единицы?

6.6. Наблюдениями установлено, что в некоторой местности в сентябре в среднем бывает 12 дождливых дней. Какова вероятность того, что из восьми случайно взятых в этом месяце дней три дня окажутся дождливыми?

6.7. Вероятность получения удачного результата при проведении сложного химического опыта равна $2/3$. Найти наивероятнейшее число удачных опытов, если их общее число равно 7.

6.8. Батарея дала 14 выстрелов по объекту, вероятность попадания в который при каждом выстреле равна $1/5$. Найти наивероятнейшее число попаданий и вероятность этого числа попаданий.

6.9. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле из орудия равна $4/5$. Сколько нужно произвести выстрелов, чтобы наивероятнейшее число попаданий было равно 20?

6.10. Три игрока А, Б и В участвуют в игре по следующей схеме. В первом туре играют А и Б, а В свободен. Проигравший заменяется игроком В, и во втором туре играют победитель и В, а игрок, потерпевший поражение в первом туре, свободен. Соревнование продолжается таким образом до тех пор, пока один из игроков не выиграет двух партий подряд и в этом случае его объявляют победителем. Считая игроков равными по силе и исключая возможность ничьих, найти вероятность того, что:

а) выиграет игрок А; б) выиграет игрок В.

6.11. Решить предыдущую задачу в предположении, что каждая партия может окончиться вничью с вероятностью $1/3$ и в случае ничейной партии замена игроков не происходит.

6.12. (Задача Банаха о спичечных коробках). Некий математик носит с собой два коробка спичек, в каждом из которых первоначально было по N спичек. Когда ему нужна спичка, он выбирает наугад один из коробков. Найти вероятность того, что когда математик вынет в первый раз пустой коробок, в другом будет r спичек.

6.13. (Продолжение задачи Банаха о спичечных коробках). Некто носит с собой два коробка спичек А и Б, в которых первоначально было M и N спичек соответственно. Когда ему нужна спичка, он берет её из коробка А с вероятностью p или из коробка Б с вероятностью $1 - p$. Найти вероятность того, что когда математик вынет в первый раз пустой коробок, в другом будет r спичек.

6.14. Считая вероятность рождения мальчика равной $1/2$, найти вероятность того, что в семье с 10 детьми

а) 5 мальчиков и 5 девочек;

б) число мальчиков не меньше 3 и не больше 8.

6.15. В одном учебном заведении обучаются 730 студентов. День рождения наудачу выбранного студента приходится на определенный день года с вероятностью $1/365$ для каждого из 365 дней. Найти:

а) наиболее вероятное число студентов, родившихся 1 января;

б) вероятность того, что найдутся три студента, имеющие один и тот же день рождения.

6.16. Двое играют в игру, поочередно бросая монету. Выигравшим считается тот, кто первый откроет решетку. Чему равна вероятность выигрыша для начавшего игру?

6.17. Что вероятнее, выиграть у равносильного противника:

а) 3 партии из 4 или 5 из 8;

б) не менее 3 партий из 4 или не менее 5 из 8;

в) не более n из $2n$ партий или более n из $2n$ партий;

г) не более n из $2n+1$ партий или более n из $2n+1$ партий?

6.18. Среди коконов некоторой партии 30% цветных. Какова вероятность того, что среди 10 случайно отобранных из партии коконов 3 цветных? Не более 3 цветных?

6.19. Технический контроль проверяет изделия, каждое из которых независимо от других изделий может с вероятностью p оказаться дефектным.

а) Какова вероятность того, что из 10 проверенных изделий только одно оказалось дефектным?

б) Найти вероятность того, что первым дефектным оказалось k-е проверенное изделие.

в) Найти вероятность того, что последующие 10 изделий окажутся годными, при условии, что предыдущие $l = 5$ изделий были также годными. Зависит ли эта вероятность от l?

г) Найти распределение числа обнаруженных при проверке годных изделий между двумя последовательными дефектными.

6.20. На отрезок AB длины a брошены наудачу, независимо одна от другой, шесть точек. Найти вероятность того, что:

а) две точки будут находиться от точки A на расстоянии, меньшем b, а четыре — на расстоянии, большем b;

б) две точки будут находиться от A на расстоянии, меньшем c, одна — на расстоянии, не меньшем c и не большем b, а три точки — на расстоянии, большем b.

6.21. Какова вероятность получить каждую грань дважды при бросании двенадцати игральных костей?

6.22. Спортивные общества A и B состязаются тремя командами. Вероятности выигрыша матчей команд общества A против соответствующих команд B можно принять соответственно равными $4/5$ для первой (против первой B), $2/5$ для второй (против второй B), $2/5$ для третьей (против третьей B). Для победы необходимо выиграть не менее двух матчей из трех (ничьих не бывает). Чья победа вероятнее?

6.23. Два шахматиста A и B согласились сыграть матч на следующих условиях: A должен для победы набрать 12 очков (выигрыш — очко), B должен набрать 6 очков, причём ничьи не учитываются. A

обычно вдвое чаще выигрывает у B, если считать только результативные партии, так что вероятность его выигрыша можно принять равной $2/3$. Игру пришлось прекратить после того, как A набрал 8 очков, а B набрал 4 очка. Победу решено присудить тому, у кого вероятность окончательного выигрыша больше. Кто победитель?

6.24. В схеме Бернулли вероятность успеха равна p, а вероятность неуспеха $q = 1 - p$. Найти вероятность того, что:

а) цепочка НН (два неуспеха подряд) появится раньше цепочки НУ (неуспех и успех подряд);

б) цепочка НН появится раньше цепочки УН;

в) цепочка НН появится раньше цепочки УУУ.

6.25. Игрок А одновременно подбрасывает три игральные кости, а игрок Б в тоже время — две кости. Эти испытания они проводят последовательно до первого выпадения «6» хотя бы на одной кости. Найти вероятности следующих событий:

а) A=$\{$впервые «6» появилось у игрока А, а не у Б$\}$;

б) B=$\{$впервые «6» появилось у игрока Б, а не у А$\}$;

в) C=$\{$впервые «6» появилось одновременно у А и Б$\}$.

6.26. Два человека независимо друг от друга подбрасывают монету по n раз каждый.

а) Найти вероятность того, что у них выпадет одинаковое число гербов.

б) Доказать, что вероятность того, что они наберут одинаковое число гербов, совпадает с вероятностью того, что у них в сумме будет n гербов.

6.27. При раздаче колоды в 52 карты четырем игрокам один из них три раза подряд не получал тузов. Есть ли у него основания жаловаться на «невезение»?

6.28. Используя схему Бернулли, доказать следующие комбинаторные тождества:

а) $2^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i$; б) $C_{2n}^n = \sum_{i=0}^{n} (C_n^i)^2$.

§ 7. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Пусть гипотезы (события) $B_1, \ldots, B_n$ имеют положительные вероятности и исключают друг друга, т. е. $B_i \cap B_j = \varnothing$ для любых $i \neq j$. Пусть событие A может появится только при выполнении одной из этих гипотез, т. е. $A \subset (B_1 \cup \ldots \cup B_n)$. Тогда вероятность события A может быть вычислена по *формуле полной вероятности*

$$\mathbf{P}\{A\} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}\{A|B_i\}\mathbf{P}\{B_i\}.$$

В тех же условиях, если произошло событие A положительной вероятности, то с учетом этого события «новые», т. е. условные, вероятности гипотез вычисляются по *формуле Байеса*

$$\mathbf{P}\{B_j|A\} = \frac{\mathbf{P}\{A|B_j\}\mathbf{P}\{B_j\}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{P}\{A|B_i\}\mathbf{P}\{B_i\}}.$$

Эти вероятности называются *апостериорными* (т. е. вычисляемыми после осуществления события A).

7.1. Среди N экзаменационных билетов n «счастливых». Студенты подходят за билетами один за другим. У кого больше вероятность взять «счастливый» билет: у того, кто подошел первым или у того, кто подошел вторым? Или у того, кто подошел третьим? Решить эту же задачу с использованием классического определения вероятности.

7.2. Пусть имеется n одинаковых урн. Известно, что урна с номером i содержит N_i шаров, среди которых имеется m_i белых шаров. Наугад выбирается урна, а из нее вынимается шар. Какова вероятность того, что вынут белый шар?

7.3. Имеется 5 урн следующего состава: в первой и второй урнах — по 2 белых и 3 черных шара в каждой; в третьей и четвертой урнах — по 1 белому и 4 черных шара; в пятой урне — 4 белых и 1 черный шар. Из одной наудачу выбранной урны взят шар. Он оказался белым. Чему равна при этом вероятность того, что шар вынут из пятой урны?

7.4. Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, вынимаются наудачу два шара и перекладываются во вторую урну, содержащую 4 белых и 4 черных шара. Найти вероятность вынуть после этого из второй урны белый шар.

7.5. В трех урнах содержатся белые и черные шары: в первой урне — 2 белых и 3 черных шара, во второй — 2 белых и 2 черных шара, в третьей — 3 белых и 1 черный шар. Из первой урны вынут наудачу шар и переложен во вторую. Далее из второй урны вынут наудачу шар и переложен в третью. Наконец, из третьей урны шар переложен в первую.

а) Какой состав шаров в первой урне наиболее вероятен?

б) С какой вероятностью состав шаров во всех урнах не изменится?

7.6. Урна содержит два шара: один белый и один черный. Производятся последовательные испытания с возвращением вынутого шара в урну. Число испытаний неограничено. Какова вероятность вынуть

а) когда-нибудь белый шар, если после каждого испытания в урну добавляются еще a черных шаров;

б) когда-нибудь подряд два белых шара, если после каждого испытания в урну добавляется еще один черный шар;

в) когда-нибудь подряд два белых шара, если после каждого испытания в урну добавляются еще два черных шара?

7.7. В урне m белых и n черных шаров. Наудачу извлекается шар; он возвращается обратно и, кроме того, в урну добавляется k шаров одного с ним цвета. Эта процедура повторяется несколько раз. Чему равна вероятность того, что в s-й раз будет извлечен белый шар?

7.8. Из урны, в которой было $m \geqslant 3$ белых шаров и n черных, потеряли один шар неизвестного цвета. Для того чтобы определить состав шаров в урне, из нее наудачу были вынуты два шара. Найти вероятность того, что был потерян белый шар, если известно, что вынутые шары оказались белыми.

7.9. В урне лежат 12 шаров, из них 8 черных и 4 белых. Три игрока A, B и C поочередно тянут шары. Выигрывает тот, кто первым вытянет белый шар. Оценить шансы на успех каждого игрока.

7.10. A говорит правду в 3 случаях из 4, а B — в 4 случаях из 5. Из урны, в которой было 9 разноцветных шаров, в том числе один белый, вынули один шар. A и B посмотрели на него и оба сказали, что шар — белый. Найти вероятность того, что они сказали правду.

7.11. Производится стрельба ракетами по некоторой наблюдаемой цели. Вероятность попадания каждой ракеты в цель равна p; попадания отдельных ракет независимы. Каждая попавшая ракета поражает цель с вероятностью p_0. Стрельба ведется до поражения цели или до израсходования всего боезапаса; на базе имеется n, $n > 2$, ракет. Найти вероятность того, что не весь боезапас будет израсходован.

7.12. Три орудия производят стрельбу по трем целям. Каждое орудие выбирает себе цель случайным образом и независимо от других. Цель, обстрелянная одним орудием, поражается с вероятностью p. С какой вероятностью из трех целей будут поражены ровно две?

7.13. Допустим, что вероятность попадания в цель при одном выстреле равна p, а вероятность поражения цели при k попаданиях в нее равна $1 - r^k$. Какова вероятность того, что цель поражена, если произведено n выстрелов?

7.14. При некоторых условиях стрельбы стрелок A поражает мишень с вероятностью $p_1 = 3/5$, стрелок B — с вероятностью $p_2 = 1/2$, стрелок C — с вероятностью $p_3 = 2/5$. Стрелки дали залп по мишени, и две пули попали в цель. Что вероятнее: попал C в мишень или нет?

7.15. N стрелков стреляют поочередно по одной мишени. Вероятность попасть в мишень для i-го стрелка равна p_i. Выигравшим считается тот стрелок, который первым попадет в мишень. У каждого стрелка имеется n патронов. Определить вероятность того, что выиграет k-й стрелок.

7.16. По каналу связи может быть передана одна из трех последовательностей букв: $AAAA$, $BBBB$, $CCCC$, причём априорные вероятности каждой из последовательностей есть соответственно $3/10$, $2/5$ и $3/10$. Известно, что под действием шумов вероятность правильного приема каждой из переданных букв равна $3/5$, а вероятности перевода каждой буквы в любую другую одинаковы и равны $1/5$. Предполагается, что буквы искажаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что была передана последовательность $AAAA$, если на приемном устройстве получена последовательность $ABCA$.

7.17. Изделия некоторого производства удовлетворяют стандарту с вероятностью 0,96. Предлагается упрощенная система испытаний, дающая положительный результат с вероятностью 0,98 для изделий, удовлетворяющих стандарту, а для изделий, которые не удовлетворяют стандарту, с вероятностью 0,05. Какова вероятность того, что:

а) изделие будет забраковано;

б) изделие, выдержавшее испытание, удовлетворяет стандарту?

7.18. Некоторое изделие выпускается двумя заводами, причём объем продукции второго завода в k раз превосходит объем продукции первого. Доля брака у первого завода p_1, у второго — p_2. Изделия, выпущенные заводами за одинаковый промежуток времени, перемешали и пустили в продажу. Какова вероятность того, что вы приобрели изделие со второго завода, если оно оказалось бракованным?

7.19. Предположим, что 5 мужчин из 100 и 25 женщин из 10000 являются дальтониками. Наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом. Какова вероятность того, что это мужчина?

7.20. Пусть некоторое насекомое откладывает r яиц с вероятностью $\dfrac{\lambda^r}{r!}e^{-\lambda}$. Вероятность развития насекомого из яйца равна p. Предполагая взаимную независимость развития насекомых из яиц, найти вероятность появления k новых насекомых из одной кладки яиц.

7.21. Пусть количество потомков некоторого насекомого случайно и имеет геометрическое распределение с параметром p. Каждый потомок с равной вероятностью может оказаться мужского или женского пола. Найти вероятность того, что в потомстве будет k «мальчиков».

7.22. Четыре грани игральной кости A красные и две — белые; у кости B две грани красные и четыре — белые. Один раз бросается монета. Если выпал герб, то все время бросается только кость A, если решетка

— только кость B.

а) Найти вероятность получить красную грань при одном бросании кости.

б) Найти вероятность того, что третье бросание кости даст красную грань, если первые два бросания дали красные грани.

в) Первые n испытаний дали красные грани. Какова вероятность того, что бросалась кость A?

7.23. Известно, что в обществе, состоящем из 4 человек, дни рождения трех приходятся на один месяц, а четвертого — на один из остальных одиннадцати. Считая вероятность рождения в каждом месяце равной $1/12$, найти вероятность того, что при этом

а) указанные три лица родились в июле, а четвертое лицо в марте;

б) указанные три лица родились в июле, а четвертое лицо в одном из оставшихся одиннадцати месяцев.

7.24. Найти вероятность того, что станок, работающий в момент времени t_0, не остановится до момента t_1, если известно, что:

1) эта вероятность зависит только от величины промежутка времени (t_0, t_1);

2) вероятность того, что работающий в момент времени t станок остановится за промежуток времени $(t, t + \Delta t)$, есть $\alpha\Delta t + o(\Delta t)$ при $\Delta t \to 0$, где $\alpha > 0$.

7.25. При составлении таблиц смертности часто исходят из следующих допущений:

1) дожившее до возраста t лицо умрет в течении времени от t до $t+\Delta t$ с вероятностью $p(t, \Delta t) = \alpha(t)\Delta t + o(\Delta t)$ при $\Delta t \to 0$, где $\alpha(t) > 0$;

2) вероятность смерти в момент рождения равна нулю.

Найти при этих предположениях вероятность смерти до возраста t.

7.26. Для измерения интенсивности источника частиц в ядерной физике используется счетчик Гейгера — Мюллера. Частица, попавшая в счетчик, вызывает в нем разряд, длящийся время τ, на протяжении которого счетчик не регистрирует попадающие в него частицы. Найти вероятность того, что счетчик сосчитает все частицы, попавшие в него за время t, если выполняются следующие условия:

1) вероятность того, что за промежуток времени t в счетчик попадут k частиц, не зависит от того, сколько частиц попало в счетчик до начала этого промежутка;

2) вероятность того, что за промежуток времени от t_0 до $t_0 + t$ в счетчик попадут k частиц, задается формулой

$$p_k(t_0, t_0 + t) = \frac{(\alpha t)^k e^{-\alpha t}}{k!}, \quad \alpha(t) > 0;$$

3) τ — постоянная величина.

7.27. Вероятность того, что молекула, испытавшая в момент $t = 0$ столкновение с другой молекулой и не имевшая других столкновений до момента t, испытает столкновение в промежуток времени между t и $t + \Delta t$ равна $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$ при $\Delta t \to 0$. Найти вероятность того, что время свободного пробега (т. е. время между двумя соседними столкновениями) будет больше t.

7.28. Считая, что при размножении бактерий делением (на две бактерии) вероятность бактерии разделиться за промежуток времени Δt, равна $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$ при $\Delta t \to 0$ и не зависит от числа предшествующих делений, а также от числа имеющихся бактерий, найти вероятность того, что если в момент времени 0 была одна бактерия, то в момент времени t окажется i бактерий.

7.29. К линии электропередачи подключено n механизмов. Вероятность того, что механизм, потребляющий энергию в момент времени t, прекратит её потребление до момента $t + \Delta t$, равна $\alpha \Delta t + o(\Delta t)$ при $\Delta t \to 0$. Если в момент времени t механизм не потребляет энергии, то вероятность того, что он станет её потреблять до момента $t + \Delta t$, равна $\beta \Delta t + o(\Delta t)$. Составить дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют вероятности $P_r(t)$ того, что в момент времени t энергию потребляют r механизмов.

7.30. Два игрока A и B, имеющие соответственно капиталы a и b, играют в азартную игру, состоящую из отдельных партий. Каждая партия с одинаковой вероятностью оканчивается выигрышем того или иного игрока. После каждой партии проигравший уплачивает 1 рубль выигравшему. Игра продолжается до разорения одного из игроков. Найти вероятность того, что разорится второй игрок.

7.31. Предположим, что в условиях предыдущей задачи игрок A выигрывает с вероятностью $p > 1/2$ и проигрывает с вероятностью $1-p$. Найти в этом случае вероятность разорения второго игрока.

7.32. Предположим, что в условиях предыдущей задачи игрок A выигрывает с вероятностью p и проигрывает с вероятностью q; в каждой партии возможна ничья с вероятностью $r = 1 - p - q$. Какова будет в этом случае вероятность разорения второго игрока?

7.33. Первое орудие 4-орудийной батареи пристреляно так, что вероятность попадания для него равна $3/10$; для остальных трех орудий она равна $1/5$. Батарея дала два залпа, причём одно из орудий дало только один выстрел; было получено одно попадание и шесть перелетов и недолетов. Какова вероятность того, что один выстрел дало первое орудие?

7.34. Вероятность того, что замаскировавшийся противник находится на обстреливаемом участке, равна $3/10$; вероятность попадания в него в этом случае при каждом отдельном выстреле равна $1/5$. Какова вероятность попадания при 2 выстрелах? Какова вероятность попадания при 10 выстрелах?

7.35. Подводная лодка атакует корабль, выпуская по нему последовательно и независимо одну за другой n торпед. Каждая торпеда попадает в корабль с вероятностью p и, при попадании, — с одинаковой вероятностью в любой из k отсеков, на которые разделена подводная часть корабля. Торпеда, попавшая в отсек, приводит к его затоплению водой. Корабль идёт ко дну, если водой заполнено не менее двух отсеков. С какой вероятностью корабль будет затоплен?

7.36. Группа, состоящая из трех самолетов-разведчиков, высылается в район противника с целью уточнить координаты объекта, который предполагается подвергнуть обстрелу ракетами. Для поражения объекта выделено n ракет. При уточненных координатах объекта вероятность его поражения одной ракетой равна p_1, при неуточненных — p_2. Каждый разведчик перед выходом в район объекта может быть сбит противовоздушными средствами противника с вероятностью p_3. Если разведчик не сбит, он сообщает координаты объекта по радио. Каждое сообщение принимается командным пунктом с вероятностью p_4. Для уточнения координат достаточно приема сообщения от одного разведчика. Найти вероятность поражения объекта с учетом деятельности разведки.

7.37. Из N стрелков можно выделить четыре группы: a_1 отличных стрелков, a_2 хороших, a_3 посредственных и a_4 плохих. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для стрелка i-й группы равна p_i. Вызываются наугад два стрелка и стреляют по одной и той же мишени. Найти вероятность хотя бы одного попадания в мишень.

7.38. По резервуару с горючим производится n независимых выстрелов зажигательными снарядами. Каждый снаряд попадает в резервуар с вероятностью p. Если в резервуар попал один снаряд, горючее воспламеняется с вероятностью p_0; если два снаряда — с полной достоверностью. Найти вероятность того, что при n выстрелах горючее воспламенится.

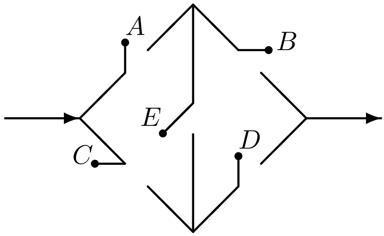
7.39. В автобусе едут n пассажиров. На следующей остановке каждый из них выходит с вероятностью p; кроме того, в автобус с вероятностью p_0 не входит ни один пассажир; с вероятностью $1 - p_0$ входит один новый пассажир. Найти вероятность того, что:

а) когда автобус снова тронется в путь после следующей остановки, в нем будет по-прежнему n пассажиров;

б) после двух остановок в автобусе будет снова n пассажиров.

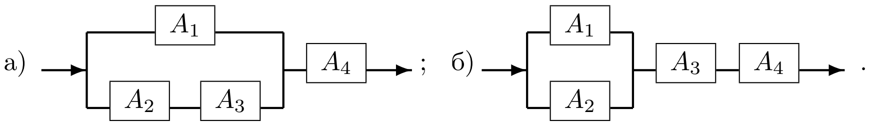
7.40. В ящике находится a новых и b игранных теннисных мячей. Из ящика наугад вынимаются два мяча и ими играют. После этого мячи возвращают в ящик. Через некоторое время из ящика снова берут наугад два мяча. Найти вероятность того, что они будут новыми.

7.41. Рассматривается электрическая цепь, составленная из реле по следующей схеме:



Каждое из реле A, B, C, D и E, работающих независимо, открывается и закрывается с вероятностями p и $1-p$ соответственно. Какова вероятность того, что сигнал, поданный на вход, будет получен на выходе? Какова условная вероятность того, что реле E было открыто, если на выходе был получен сигнал?

7.42. Электрическая цепь состоит из элементов A_k, соединенных по следующей схеме:



Вероятность выхода из строя элемента A_k равна p_k; элементы выходят из строя независимо друг от друга. С какой вероятностью цепь будет пропускать ток?

ОТДЕЛ III

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

§ 8. Случайные величины

Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство. Функция $\xi : \Omega \to \mathbf{R}$ называется *случайной величиной*, если для любого x множество $A_x = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\}$ является событием, т. е. $A_x \in \mathscr{F}$.

σ-Алгеброй, порождённой случайной величиной ξ, называется σ-алгебра, порождённая классом событий $\{A_x, x \in \mathbf{R}\}$.

8.1. Пусть ξ и η — случайные величины. Доказать, что следующие множества являются событиями:

а) $A = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < \eta(\omega)\}$;
б) $C = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \leqslant \eta(\omega)\}$;
в) $B = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = \eta(\omega)\}$.

8.2. Пусть функция $\xi : \Omega \to \mathbf{R}$ такова, что для каждого $x \in \mathbf{R}$ множество $A_x = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = x\}$ является событием. Верно ли, что в этом случае ξ — случайная величина?

8.3. Построить пример вероятностного пространства $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ и функции $\xi : \Omega \to \mathbf{R}$ таких, что ξ не является случайной величиной.

8.4. Обязана ли функция ξ быть случайной величиной, если случайной величиной является функция:

а) $\eta = \xi^2$;
б) $\eta = e^{\xi}$;
в) $\eta = |\xi|$;
г) $\eta = \xi + 1$.

8.5. Пусть вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ есть отрезок $[0,1]$ с σ-алгеброй борелевских множеств и мерой Лебега. Описать σ-алгебру, порождённую случайной величиной

а) $\xi(\omega) = 1/2$;
б) $\xi(\omega) = \begin{cases} \omega, & \omega \in [0, 1/2), \\ 1, & \omega \in [1/2, 1]; \end{cases}$
в) $\xi(\omega) = \omega/2$;
г) $\xi(\omega) = \begin{cases} 1/4, & \omega \in [0, 1/4), \\ 1/2, & \omega \in [1/4, 3/4), \\ 1, & \omega \in [3/4, 1]. \end{cases}$

8.6. Пусть вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ есть прямая $\mathbf{R}$ с

σ-алгеброй борелевских множеств и некоторой вероятностью. Описать σ-алгебру, порождённую случайной величиной $\xi(\omega) = \sin\omega$.

§ 9. Функции распределения

Функцией распределения случайной величины ξ называется функция

$$F(x) = \mathbf{P}\{\xi < x\} \equiv \mathbf{P}\{\omega : \xi(\omega) < x\}$$

действительного аргумента x. *Распределением* случайной величины ξ называется функция

$$F(B) = \mathbf{P}\{\xi \in B\},$$

где аргумент B есть произвольное борелевское множество в $\mathbf{R}$.

Распределение случайной величины ξ называется *дискретным*, если существует не более чем счётное множество точек $\{x_i\}$ в $\mathbf{R}$ такое, что

$$\sum_i \mathbf{P}\{\xi = x_i\} = 1.$$

Рядом распределения дискретной случайной величины ξ называется таблица

x_1	x_2	$\ldots$
$\mathbf{P}\{\xi = x_1\}$	$\mathbf{P}\{\xi = x_2\}$	$\ldots$

Распределение случайной величины ξ называется *абсолютно непрерывным*, если существует неотрицательная измеримая функция p такая, что для любого борелевского множества B

$$\mathbf{P}\{\xi \in B\} = \int\limits_B p(x)dx.$$

Функция p называется *плотностью распределения* случайной величины ξ.

Медианой распределения случайной величины ξ называется любое число a такое, что $\mathbf{P}\{\xi \leqslant a\} \geqslant 1/2$ и $\mathbf{P}\{\xi \geqslant a\} \geqslant 1/2$.

9.1. Дискретная случайная величина ξ имеет ряд распределения

x_i	-1	0	1
$\mathbf{P}\{\xi = x_i\}$	$1/3$	$1/3$	$1/3$

Построить ряды распределения следующих случайных величин:

а) $2\xi + 5$;
б) $\xi^2 + 1$;
в) $|\xi|$;
г) 2^ξ;
д) $\min(\xi, 1)$;
е) $1/(3 - \xi)$.

9.2. Решить задачу **9.1**, если дискретная случайная величина ξ имеет ряд распределения

x_i	-2	-1	0	1	2
$\mathbf{P}\{\xi = x_i\}$	$1/10$	$1/5$	$3/10$	$3/10$	$1/10$

9.3. Решить задачу **9.1**, если дискретная случайная величина ξ имеет ряд распределения

x_i	-2	0	1	5
$\mathbf{P}\{\xi = x_i\}$	$1/4$	$1/4$	$1/4$	$1/4$

9.4. Пусть вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ есть отрезок $[0,1]$ с σ-алгеброй борелевских множеств и мерой Лебега. Найти функцию распределения случайной величины ξ, если:

а) $\xi(\omega) = \omega$;
в) $\xi(\omega) = \omega^2$;
б) $\xi(\omega) = \omega^\alpha$, $\alpha < 0$;
г) $\xi(\omega) = \sin(\pi\omega)$;

д) $\xi(\omega) = \begin{cases} 2\omega, & \omega \in [0, 1/2), \\ 2(1-\omega), & \omega \in [1/2, 1); \end{cases}$

е) $\xi(\omega) = \begin{cases} \omega, & \omega \in [0, 1/3), \\ -1, & \omega \in [1/3, 2/3), \\ -\omega^3, & \omega \in [2/3, 1]; \end{cases}$

ж) $\xi(\omega) = \begin{cases} 1/4, & \omega \in [0, 1/4), \\ 1, & \omega \in [1/4, 3/4), \\ 1/4, & \omega \in [3/4, 1]. \end{cases}$

9.5. Найти плотности (если они существуют) распределения случайных величин, определенных в задаче **9.4**.

9.6. Точка $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ выбирается наудачу в треугольнике с вершинами в точках $(0,0)$, $(2,1)$ и $(2,0)$. Найти функцию распределения и плотность случайной величины ξ, если:

а) $\xi(\omega) = \omega_1$;
б) $\xi(\omega) = \omega_2$.

9.7. Равнобедренный треугольник образован единичным вектором в направлении оси абсцисс и единичным вектором в случайном направлении. Найти функцию распределения длины третьей стороны

а) в $\mathbf{R}^2$;
б) в $\mathbf{R}^3$.

9.8. Из точки $(0, a)$ проведена прямая под углом φ к оси ординат. Найти функцию распределения точки пересечения этой прямой с осью абсцисс, если угол φ равномерно распределен в промежутке

а) $(0, \pi/2)$;
б) $(-\pi/2, \pi/2)$.

9.9. На окружность радиуса R с центром в начале координат наудачу брошена точка. Найти плотность распределения

а) абсциссы точки попадания;

б) длины хорды, соединяющей точку попадания с точкой $(-R, 0)$.

9.10. На отрезок оси ординат между точками $(0,0)$ и $(0,R)$ наудачу брошена точка. Через точку попадания проведена хорда окружности $x^2+y^2 = R^2$, перпендикулярная оси ординат. Найти распределение длины этой хорды.

9.11. Диаметр круга измерен приближенно. Считая, что его величина равномерно распределена на отрезке $[a, b]$, найти распределение площади круга.

В задачах **9.12–9.15** под $p(x)$ понимается плотность распределения. Найти значение входящей в определение $p(x)$ постоянной c.

9.12. $p(x) = \begin{cases} ce^{-\alpha x} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leqslant 0, \quad \alpha > 0. \end{cases}$

9.13. $p(x) = \dfrac{c}{1 + (x - \alpha)^2}$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

9.14. $p(x) = \begin{cases} cx^{\beta} e^{-\alpha x} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leqslant 0, \quad \alpha > 0, \ \beta > 0. \end{cases}$

9.15. $p(x) = \dfrac{c}{e^{-x} + e^{x}}$.

9.16. Можно ли подобрать постоянную c так, чтобы функция cx^{-4} была плотностью распределения на множестве

а) $[1, \infty)$;
б) $[0, \infty)$;
в) $[-2, -1]$;
г) $[-3, 0)$.

9.17. Пусть случайная величина ξ распределена равномерно на отрезке $[0, 1]$. Найти плотности распределения следующих случайных величин:

а) $-\ln \xi$;
б) $2\xi + 1$;
в) $\xi - 1/\xi$;
г) $-\ln(1 - \xi)$;
д) ξ^2;
е) $e^{\xi - 1}$.

9.18. Пусть случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром α. Найти плотности распределения следующих случайных величин:

а) $\sqrt{\xi}$;
б) ξ^2;
в) 2ξ;
г) $\ln(\alpha\xi)$;
д) $e^{-\alpha\xi}$;
е) $\min(\xi, \xi^2)$.

9.19. Пусть случайная величина ξ имеет стандартное распределение Коши. Найти плотности распределения следующих случайных величин:

а) $2\xi + 1$;
б) $1/\xi$;
в) $1/(1 + \xi^2)$;
г) $\xi^2/(1 + \xi^2)$.

9.20. Пусть случайная величина ξ имеет стандартное нормальное распределение. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = e^{\xi}$ (эта плотность называется *логарифмически нормальной*).

9.21. Пусть случайная величина ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 2\pi]$. Найти плотность распределения тангенса ξ.

9.22. Пусть случайная величина ξ имеет плотность распределения p. Найти плотности распределения следующих величин:

а) $a\xi + b$, a, $b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$;
б) ξ^{-1};
в) ξ^2;
г) $\min(\xi, \xi^2)$;
д) $\cos\xi$;
е) дробной части ξ;
ж) $|\xi - 1|$;
з) $\max(\xi, \xi^2)$.

9.23. Доказать, что для любой случайной величины ξ с непрерывной функцией распределения F выполняется равенство

$$\mathbf{P}\{F(\xi) < x\} = x, \quad x \in [0, 1].$$

9.24. Что можно сказать о распределении случайной величины $F(\xi)$ в предыдущей задаче, если функция распределения F не является непрерывной?

9.25. Пусть случайная величина ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Доказать, что для любой функции распределения F существует измеримая функция f такая, что случайная величина $\eta = f(\xi)$ имеет функцию распределения F.

9.26. Пусть случайная величина ξ имеет непрерывную функцию распределения F. Найти функцию распределения случайной величины $\eta = -\ln F(\xi)$.

9.27. Привести пример случайной величины ξ с абсолютно непрерывным распределением и непрерывной функции g таких, что $g(\xi)$ имеет невырожденное дискретное распределение.

9.28. Случайная величина ξ имеет функцию распределения F. Найти функцию распределения случайной величины $\eta = |\xi|^s$, $s > 0$.

9.29. Функция распределения F случайной величины ξ непрерывна в нуле. Найти распределение случайной величины

$$\eta = \begin{cases} \xi/|\xi|, & \text{если } \xi \neq 0, \\ 1, & \text{если } \xi = 0. \end{cases}$$

9.30. Случайная величина ξ имеет функцию распределения F. Найти функции распределения случайных величин

а) $\max(0, \xi)$;
б) $\min(0, \xi)$;
в) $(\xi + |\xi|)/2$;
г) $2 - 3\xi$.

9.31. Доказать, что если случайная величина ξ имеет абсолютно непрерывное распределение, то величина $|\xi|$ также имеет абсолютно непрерывное распределение. Верно ли обратное утверждение?

В задачах **9.32** и **9.33** доказать, что любая функция распределения F обладает следующими свойствами:

9.32. $\lim\limits_{x\to\infty} x \int\limits_x^\infty \frac{1}{z} dF(z) = 0.$

9.33. $\lim\limits_{x\to+0} x \int\limits_x^\infty \frac{1}{z} dF(z) = 0.$

9.34. Доказать, что для любой непрерывной функции распределения F справедливы следующие равенства:

а) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dF(x) = \frac{1}{2}$; б) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F^2(x)dF(x) = \frac{1}{3}$.

9.35. Доказать, что если $F(x)$ — функция распределения, то при любом $h > 0$ функции

а) $\displaystyle G(x) \equiv \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} F(y)dy$; б) $\displaystyle H(x) \equiv \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} F(y)dy$

также являются функциями распределения.

9.36. Доказать, что множество точек разрыва функции распределения не более чем счётно.

9.37. Какова мощность множества всех функций распределения?

9.38. Пусть число a таково, что $\mathbf{P}\{|\xi| < a\} > 2/3$. Доказать, что медиана распределения величины ξ лежит в отрезке $[-a, a]$.

§ 10. Совместное распределение. Независимость

Совместным распределением случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ называется функция

$$F(B) = \mathbf{P}\{(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in B\},$$

где аргумент B есть произвольное борелевское множество в $\mathbf{R}^n$.

Совместной функцией распределения случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ называется функция

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{P}\{\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_n < x_n\}$$

вещественных переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Говорят, что распределение случайного вектора $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *абсолютно непрерывно*, если существует неотрицательная функция p такая, что для любого борелевского множества B в $\mathbf{R}^n$

$$\mathbf{P}\{(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in B\} = \int_B p(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n.$$

Функция p называется *совместной плотностью распределения* случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ называются *независимыми*, если для любых борелевских множеств $B_1, \ldots, B_n$ в $\mathbf{R}$ выполняется равенство

$$\mathbf{P}\{\xi_1 \in B_1, \ldots, \xi_n \in B_n\} = \mathbf{P}\{\xi_1 \in B_1\} \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}\{\xi_n \in B_n\}.$$

10.1. Для данной линии трамвая известна функция $F(a, b)$, равная вероятности того, что пассажир, едущий по этой линии, вошел в точке $x < a$ и едет до точки $y \leqslant b$. Найти вероятность того, что:

а) пассажир, едущий по данной линии, проезжает через точку z;

б) пассажир вошел в трамвай до пункта z;

в) пассажир сошел до пункта z.

10.2. Двумерное распределение пары целочисленных случайных величин ξ и η задается с помощью таблицы

	$\xi=-1$	$\xi=0$	$\xi=1$
$\eta=-1$	$1/8$	$1/12$	$7/24$
$\eta=1$	$5/24$	$1/6$	$1/8$

,

где в пересечении столбца $\xi = i$ и строки $\eta = j$ находится вероятность $\mathbf{P}\{\xi = i, \eta = j\}$. Выяснить, зависимы или нет случайные величины ξ и η. Найти:

а) одномерные распределения $\mathbf{P}\{\xi = i\}$ и $\mathbf{P}\{\eta = j\}$;

б) условные вероятности $\mathbf{P}\{\eta = 1|\xi = 0\}$ и $\mathbf{P}\{\xi = 1|\eta = -1\}$;

в) совместное распределение величин $\xi + \eta$ и $\xi\eta$;

г) одномерные распределения величин $\xi + \eta$ и $\xi\eta$;

д) совместное распределение величин $\max(\xi, \eta)$ и $\min(\xi, \eta)$;

е) совместное распределение величин $|\xi + 2\eta|$ и $|\xi - \eta|$.

10.3. Решить задачу **10.2**, если двумерное распределение пары целочисленных случайных величин ξ и η задается с помощью таблицы

	$\xi=-2$	$\xi=0$	$\xi=1$
$\eta=-1$	$1/6$	$1/6$	$1/6$
$\eta=2$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

.

10.4. Решить задачу **10.2**, если двумерное распределение пары целочисленных случайных величин ξ и η задается с помощью таблицы

	$\xi=-1$	$\xi=0$	$\xi=1$
$\eta=-1$	$1/8$	$1/12$	$7/24$
$\eta=0$	$2/24$	$1/12$	$1/16$
$\eta=1$	$3/24$	$1/12$	$1/16$

.

10.5. На отрезок $[0, a]$ наудачу независимо брошены две точки. Найти функцию распределения расстояния между ними.

10.6. Точка $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ выбрана наудачу в квадрате $[0, 1]^2$. Найти функцию распределения и плотность случайной величины $\xi + \eta$, если:

а) $\xi(\omega) = \omega_1 + \omega_2$, $\eta(\omega) = \omega_1 - \omega_2$;

б) $\xi(\omega) = \omega_1$, $\eta(\omega) = \omega_2$;

в) $\xi(\omega) = 1$ при $\omega_1 = \omega_2$ и $\xi(\omega) = 0$ при $\omega_1 \neq \omega_2$; $\eta(\omega) = \omega_1\omega_2$.

10.7. Являются ли случайные величины ξ и η, описанные в задаче **10.6**, независимыми?

10.8. Пусть $F(x, y)$ обозначает двумерную функцию распределения. Положим $G(x, y) = 0$ при $x < 0$ и $y < 0$; $G(x, y) = F(x, y)$ во всех других точках. Показать, что G — монотонная функция каждой переменной, но G не обязательно является функцией распределения.

10.9. Пусть ξ и η — случайные величины с функциями распределения F и G соответственно. Доказать, что если $\mathbf{P}\{\xi \leqslant \eta\} = 1$, то $F(x) \geqslant G(x)$ при любом x.

10.10. Пусть независимые случайные величины ξ и η показательно распределены с параметрами α и β соответственно. Найти $\mathbf{P}\{\xi < \eta\}$.

10.11. Пусть случайные величины ξ и η независимы и имеют одинаковую непрерывную функцию распределения. Найти:

а) $\mathbf{P}\{\xi = \eta\}$; б) $\mathbf{P}\{\xi < \eta\}$.

10.12. Пусть $p(x, y)$ — плотность совместного распределения случайных величин ξ и η. Найти:

а) $\mathbf{P}\{\xi > \eta\}$; в) $\mathbf{P}\{|\xi| > \eta\}$;
б) $\mathbf{P}\{\xi > |\eta|\}$; г) $\mathbf{P}\{\xi - \eta > 1\}$.

10.13. Случайная величина ξ имеет плотность распределения $p(x)$. Найти совместную функцию распределения случайного вектора (ξ, ξ^2).

10.14. Совместное распределение случайных величин ξ и η имеет плотность

$$p(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{при } (x, y) \in G, \\ 0 & \text{при } (x, y) \notin G, \end{cases}$$

где $G = \{(x, y) : x, y \geqslant 0, x + 2y \leqslant 2\}$. Найти плотность распределения случайной величины ξ.

10.15. Совместное распределение случайных величин ξ и η имеет плотность

$$p(x, y) = \begin{cases} c(x + y) & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти:

а) постоянную c;
б) плотность распределения случайной величины ξ;
в) плотность распределения случайной величины $\max(\xi, \eta)$.

10.16. Совместное распределение случайных величин ξ и η имеет плотность

$$p(x, y) = \frac{c}{1 + x^2 + x^2 y^2 + y^2}.$$

а) Найти постоянную c.
б) Установить, зависимы или нет случайные величины ξ и η.
в) Найти плотность распределения ξ.
г) Найти плотность распределения η.

д) Найти вероятность $\mathbf{P}\{|\xi| \leqslant 1, |\eta| \leqslant 1\}$.

10.17. Случайная точка (ξ, η) распределена равномерно внутри квадрата $\{(x, y) : |x| + |y| \leqslant 1\}$.

а) Найти плотность распределения ξ.

б) Найти плотность распределения η.

в) Установить, зависимы или нет случайные величины ξ и η.

10.18. Совместное распределение случайных величин ξ и η имеет плотность

$$p(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi(x^2 + y^2)^3} & \text{при } x^2 + y^2 \geqslant 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти плотность распределения случайной величины $\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$.

10.19. Совместное распределение случайных величин ξ и η имеет плотность

$$p(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{-(x^2 + 2xy + 5y^2)/2}.$$

Найти плотности распределения

а) ξ;

б) η;

в) $\xi + \eta$;

г) вектора $(\xi + \eta, \xi - \eta)$.

10.20. Совместное распределение случайных величин ξ и η имеет плотность $p(x, y) = e^{-x-y}$, x, $y \geqslant 0$. Найти плотность совместного распределения случайных величин $\xi + \eta$ и ξ/η.

10.21. Случайные величины ξ и η независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Найти вероятность попадания случайной точки (ξ, η)

а) в кольцо $\{(x, y) : 2 \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant 3\}$;

б) в квадрат $\{(x, y) : |x| + |y| \leqslant \sqrt{2}\}$.

10.22. Случайная точка (ξ, η) распределена на плоскости по нормальному закону с плотностью

$$p_{\xi\eta}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} e^{-(2(x-1)^2 + (y+1)^2)/4}.$$

Найти вероятность попадания случайной точки (ξ, η) в область, ограниченную эллипсом

$$(x - 1)^2 + \frac{(y + 1)^2}{2} = 1.$$

10.23. Когда случайная величина ξ не зависит сама от себя?

10.24. При каких условиях на ξ случайные величины ξ и $\sin \xi$ независимы?

10.25. Доказать, что если случайные величины ξ и $f(\xi)$ (f — борелевская функция) независимы, то $f(\xi) = const$ с вероятностью 1.

10.26. Доказать, что если случайные величины ξ и η, а также ξ и $\xi - \eta$ независимы, то $\xi = const$ с вероятностью 1.

10.27. Пусть ξ и η — случайные величины. Обязаны ли они быть независимыми, если случайные величины ξ^2 и η^2 независимы?

10.28. Пусть ξ и η — случайные величины, $\mathbf{P}\{\xi > 0\} = \mathbf{P}\{\eta > 0\} = 3/4$, $\mathbf{P}\{\xi + \eta > 0\} = 1/2$. Доказать что ξ и η зависимы.

10.29. Пусть ξ имеет стандартное нормальное распределение. Положим $\eta = 1$ при $\xi > 0$ и $\eta = 0$ при $\xi \leqslant 0$. Доказать, что случайные величины $|\xi|$ и η независимы.

10.30. Случайная точка (ξ, η) имеет равномерное распределение в круге $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$. Найти вероятность $\mathbf{P}\{|\xi| < 1/\sqrt{2}, |\eta| < 1/\sqrt{2}\}$. Являются ли случайные величины ξ и η независимыми?

10.31. Пусть случайные величины ξ и η независимы и одинаково распределены, причём $\mathbf{P}\{\xi = 1\} = p$ и $\mathbf{P}\{\xi = 0\} = 1 - p$. Введем новую случайную величину ζ, положив

$$\zeta = \begin{cases} 0, & \text{если } \xi + \eta \text{ — чётное число,} \\ 1, & \text{если } \xi + \eta \text{ — нечётное число.} \end{cases}$$

При каком значении p случайные величины ξ и ζ независимы?

10.32. Случайный вектор (ξ, η, ζ) имеет плотность распределения

$$p(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{6}{(1 + x + y + z)^4} & \text{при } x > 0, y > 0, z > 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти распределение величины $\xi + \eta + \zeta$.

10.33. Рассмотрим на плоскости область Ω, имеющую площадь $1/2$ и являющуюся объединением четырехугольника с вершинами (0,0), (1,1), (0,1/2), (1/2,1) и треугольника с вершинами (1/2,0), (1,0), (1,1/2). Случайная точка (ξ, η) распределена равномерно в Ω. Доказать, что:

а) ξ и η распределены равномерно на $[0, 1]$;

б) сумма $\xi + \eta$ имеет такую же плотность, как если бы ξ и η были независимыми.

10.34. Пусть независимые случайные величины ξ, η и ζ имеют одинаковое геометрическое распределение с параметром p. Найти:

а) $\mathbf{P}\{\xi = \eta\}$;

б) $\mathbf{P}\{\xi \geqslant 2\eta\}$;

в) $\mathbf{P}\{\xi + \eta \leqslant \zeta\}$.

10.35. Пусть независимые случайные величины ξ и η имеют одинаковое геометрическое распределение с параметром p. Положим $U =$

$\min(\xi, \eta)$ и $V = \xi - \eta$. Доказать, что случайные величины U и V независимы.

10.36. Доказать, что утверждение задачи **10.35** остается справедливым, если независимые случайные величины ξ и η имеют одно и то же показательное распределение с параметром α.

10.37. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, причём $\mathbf{P}\{\xi = 0\} = \mathbf{P}\{\xi = 1\} = 1/2$, а $\mathbf{P}\{\eta < x\} = x$ при $x \in [0, 1]$. Найти функцию распределения следующих случайных величин:

а) $\xi + \eta$; г) $\xi\eta$;
б) $\xi/2 + \eta$; д) η^{ξ};
в) $\xi + \eta/2$; е) $|\xi - \eta|$.

10.38. Величину $Q_\xi(y) = \sup\limits_x \mathbf{P}\{x \leqslant \xi \leqslant x + y\}$ называют *функцией концентрации* случайной величины ξ. Доказать, что для любой случайной величины η, не зависящей от ξ, функция концентрации суммы $\xi + \eta$ удовлетворяет неравенству $Q_{\xi+\eta}(y) \leqslant Q_\xi(y)$.

10.39. Пусть дискретные случайные величины ξ и η независимы и имеют распределения Пуассона с параметрами λ и μ соответственно. Найти распределение суммы $\xi + \eta$.

10.40. Пусть дискретные случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы и имеют распределения Пуассона с параметрами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ соответственно. Найти распределение суммы $\xi_1 + \cdots + \xi_n$.

10.41. Пусть случайные величины ξ и η независимы и хотя бы одна из них имеет плотность. Доказать, что сумма $\xi + \eta$ также имеет плотность.

10.42. Решить задачу **3.14** о встрече в предположении, что время прихода лица A имеет по-прежнему равномерное распределение между двумя и тремя часами дня, а плотность распределения времени прихода B имеет вид $c(t - 2)$ при $2 \leqslant t \leqslant 3$.

10.43. Пусть случайные величины ξ и η независимы, причём ξ имеет нормальное распределение с параметрами a и σ^2, а η — нормальное распределение с параметрами b и θ^2. Найти распределение суммы $\xi + \eta$.

10.44. Пусть случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы, причём ξ_i имеет нормальное распределение с параметрами a_i и σ_i^2. Найти распределение суммы $\xi_1 + \cdots + \xi_n$.

10.45. Пусть случайные величины ξ и η независимы, причём ξ имеет гамма-распределение с параметрами α и β_1, а η — гамма-распределение с параметрами α и β_2. Найти распределение суммы $\xi + \eta$.

10.46. Пусть случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы, причём ξ_i имеет гамма-распределение с параметрами α и β_i. Найти распределение суммы $\xi_1 + \dots + \xi_n$.

10.47. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, причём ξ имеет показательное распределение с параметром α, а η — показательное распределение с параметром β. Найти распределение суммы $\xi + \eta$, если:

а) $\alpha = \beta$; б) $\alpha < \beta$.

10.48. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимые случайные величины, каждая из которых имеет показательное распределение с параметром α. Найти распределение суммы $\xi_1 + \dots + \xi_n$.

10.49. Пусть случайные величины ξ и η независимы и имеют распределения Лапласа. Найти плотность распределения суммы $\xi + \eta$.

10.50. Пусть случайные величины ξ и η независимы и имеют распределения Коши с параметрами сдвига a и b соответственно. Найти плотность распределения суммы $\xi + \eta$.

10.51. Пусть случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ независимы и имеют распределения Коши с параметрами сдвига $a_1, \dots, a_n$ соответственно. Найти плотность распределения суммы $\xi_1 + \dots + \xi_n$.

10.52. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, причём ξ равномерно распределена на отрезке $[a, b]$, а η равномерно распределена на отрезке $[c, d]$. Найти распределение суммы $\xi + \eta$, если:

а) $[a, b] = [c, d] = [0, 1]$; б) в общем случае.

10.53. Найти плотность распределения частного ξ/η, если числитель и знаменатель независимы и каждый имеет:

а) показательное распределение с параметром α;

б) равномерное распределение на отрезке $[0, a]$;

в) стандартное нормальное распределение.

10.54. Найти плотность распределения произведения $\xi\eta$, если сомножители независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[-a, a]$.

10.55. Пусть случайные величины ξ и η независимы и каждая имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 2]$. Найти функции распределения и плотности следующих величин:

а) $|\xi - \eta|$; г) $\max(2\xi, \eta^2)$;

б) $\min(\xi, \eta^3)$; д) $\max(3\xi, \eta^3)$;

в) $\xi - 3\eta$; е) $\xi - \eta^2$.

10.56. Решить задачу **10.55** в предположении, что случайные величины ξ и η имеют показательное распределение с параметром α.

10.57. Пусть ξ и η — независимые случайные величины с функциями распределения $F(x)$ и $G(x)$ соответственно. Найти функции распределения следующих величин:

а) $\max(\xi, \eta)$; в) $\max(3\xi, \eta)$;

б) $\min(\xi, \eta)$; г) $\min(\xi, \eta^3)$.

10.58. На отрезок $[0, 1]$ брошены наудачу независимо друг от друга n точек. Пусть ξ_i — координата i-ой точки. Найти:

а) плотность распределения координаты самой правой точки;

б) плотность распределения координаты k-ой слева точки;

в) плотность распределения расстояния между самой левой и самой правой точками;

г) совместную плотность распределения абсцисс самой левой и самой правой точек;

д) совместную плотность распределения абсцисс k-й и m-й точек слева $(k < m)$.

10.59. К переговорному пункту с двумя кабинами подошли три клиента: первый и второй клиенты заняли соответственно кабины №1 и №2, а третий клиент остался ждать. Предполагая, что времена τ_1, τ_2 и τ_3 разговоров клиентов независимы и распределены показательно с параметром α, найти:

а) вероятность того, что третий клиент попадет в кабину №1;

б) плотность распределения времени ожидания третьего клиента;

в) вероятность того, что третий клиент закончит разговор раньше первого или второго клиента (т. е. раньше одного из них).

10.60. Пусть случайные величины ξ и η независимы, причём ξ имеет показательное распределение с параметром α, а η — равномерное на отрезке $[0, h]$. Найти плотности для суммы $\xi + \eta$ и разности $\xi - \eta$.

10.61. Независимые случайные величины ξ, η и ζ имеют показательные плотности с параметром α. Найти плотности $\dfrac{\xi + \eta}{\xi}$ и $\dfrac{\xi + \eta}{\zeta}$.

10.62. Пусть ξ, η и ζ — независимые случайные величины, имеющие показательные распределения с параметром α. Найти совместную плотность распределения случайного вектора $(\eta - \xi, \zeta - \xi)$.

10.63. Пусть ξ_1, ξ_2, ... — независимые одинаково распределённые случайные величины, причём ξ_1 принимает значения 0, 1, ..., 9 с вероятностью 1/10 каждое. Найти распределение суммы ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i}{10^i}.$$

10.64. Пусть ξ_1, ξ_2, ... — независимые одинаково распределённые случайные величины, причём ξ_1 принимает значения 0 и 1 с вероятностью 1/2 каждое. Найти распределения сумм следующих рядов:

а) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{\xi_i}{2^i}$; б) $\dfrac{2}{3} \sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{\xi_i}{3^{i-1}}$.

10.65. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины, каждая из которых принимает значения 0 и 1 с вероятностью $1/2$. Найти распределение произведения $\eta = \prod\limits_{i=1}^{n} \xi_i$.

10.66. Частица единичной массы расщепляется случайным образом на два осколка с массами ξ и $1 - \xi$. Плотность f случайной величины ξ сосредоточена в $[0, 1]$ и, из соображений симметрии, $f(x) = f(1 - x)$. Массу наименьшего осколка обозначим через ξ_1, а наибольшего — ξ_2. Предположим, что эти два осколка независимо друг от друга расщепляются таким же образом и дают в результате четыре осколка с массами ξ_{11}, ξ_{12}, ξ_{21} и ξ_{22}. Найти а) плотность ξ_{11}, б) совместную плотность ξ_{11} и ξ_{22}. Используйте б) для проверки а).

10.67. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые одинаково распределённые случайные величины с непрерывной функцией распределения F. Обозначим через $\nu_n(x)$ число величин ξ_i, которые меньше x. Доказать, что распределение случайной величины

$$D_n = \sup_x \left| \frac{\nu_n(x)}{n} - F(x) \right|$$

не зависит от F.

10.68. Сколько раз надо бросить правильную игральную кость, чтобы с вероятностью $1/2$ сумма выпавших очков превысила 100?

10.69. Пусть независимые случайные величины ξ и η имеют стандартное нормальное распределение. Доказать, что случайные величины $\xi + \eta$ и $\xi - \eta$ независимы.

10.70. Пусть независимые случайные величины ξ и η имеют нормальное распределение с параметрами α и σ^2. Найти плотность распределения случайной величины $\dfrac{\xi + \eta - 2\alpha}{\xi - \eta}$.

10.71. Пусть независимые случайные величины ξ и η имеют стандартное нормальное распределение. Найти распределение случайной величины $\xi^2 + \eta^2$.

10.72. Пусть независимые случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$. Найти распределение произведения $\eta = \prod\limits_{i=1}^{n} \xi_i$.

10.73. Пусть случайные величины ξ и η независимы и имеют показательное распределение с параметром 1. Доказать, что величины $\xi+\eta$ и ξ/η также независимы.

10.74. Пусть случайные величины ξ и η независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Доказать, что величины $\xi^2+\eta^2$ и ξ/η также независимы.

10.75. Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Найти совместную плотность распределения величин $\eta = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ и $\zeta = \sum\limits_{k=1}^{m} \xi_k$ при $m < n$.

10.76. Случайные величины ξ и η независимы и имеют одинаковое распределение с плотностью

$$p_\xi(x) = p_\eta(x) = \frac{c}{1+x^4}.$$

Найти постоянную c и доказать, что величина ξ/η распределена по закону Коши.

10.77. Случайные величины ξ и η независимы и их плотности распределения равны

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} & \text{при } |x| \leqslant 1, \\ 0 & \text{при } |x| > 1, \end{cases} \qquad p_\eta(x) = \begin{cases} xe^{-x^2/2} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Доказать, что величина $\xi\eta$ нормально распределена.

10.78. Случайные величины ξ и η независимы и имеют показательное распределение с параметром 1. Доказать, что отношение $\dfrac{\xi}{\xi+\eta}$ распределено равномерно на отрезке $[0, 1]$.

10.79. Пусть независимые случайные величины ξ, η и ζ принимают лишь значения 0, 1, 2, ..., причём каждое с положительной вероятностью. Доказать, что не существует целого $n \geqslant 2$, для которого равенство $\xi^n + \eta^n = \zeta^n$ выполнялось бы с вероятностью 1.

10.80. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, причём $\xi+\eta$ принимает значения 0, 1 и 2 с вероятностями $1/3$ каждое. Доказать, что одна из величин ξ или η имеет вырожденное распределение.

10.81. Пусть случайная величина принимает ровно два значения. Доказать, что она не может быть представлена в виде суммы двух независимых невырожденных случайных величин.

10.82. Пусть случайная величина имеет равномерное распределение на некотором отрезке. Выяснить, может ли она быть представлена в виде суммы двух независимых случайных величин с невырожденными распределениями.

10.83. Пусть случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы и каждая имеет симметричное распределение. Доказать, что сумма $\xi_1 + \cdots + \xi_n$ также имеет симметричное распределение.

10.84. Число ξ выбирается случайно среди чисел 1, 2, 3 и 4; число η выбирается случайно среди $\xi, \xi+1, \ldots, 4$. Найти совместное распределение чисел ξ и η и их средние значения.

10.85. Две точки выбираются случайно и независимо на отрезке $[0, 1]$; третья точка выбирается случайно между первыми двумя. Доказать, что распределение координаты третьей точки абсолютно непрерывно; найти его плотность.

10.86. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины, принимающие целые неотрицательные значения. При каких условиях события $\{\xi_1$ — чётно$\}$ и $\{\xi_1 + \xi_2$ — чётно$\}$ независимы?

10.87. Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и имеют одну и ту же непрерывную функцию распределения F. Пусть $A_n = \{\xi_n > \max(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})\}$ — событие, состоящее в том, что в момент времени n произошел «рекорд» в том смысле, что ξ_n превзошло все предыдущие значения $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$. Доказать, что:

а) события $A_1, A_2, \ldots$ независимы;

б) $\mathbf{P}\{A_n\} = 1/n$;

в) $\mathbf{P}\{$для бесконечно многих n произошло $A_n\} = 1$.

10.88. Показать, что если $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые случайные величины, то случайные величины $\liminf\limits_{n\to\infty} \xi_n$ и $\limsup\limits_{n\to\infty} \xi_n$ вырождены.

10.89. Доказать, что интегральное уравнение

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t)dt}{(y-t)^2+1} = e^{-y^2}$$

не имеет решения в классе неотрицательных функций.

§ 11. Моменты

Средним значением (*математическим ожиданием*) $\mathbf{E}\xi$ случайной величины ξ называется интеграл

$$\mathbf{E}\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x d\mathbf{P}\{\xi < x\},$$

при условии, что интеграл сходится абсолютно. Если случайная величина ξ принимает лишь счётное число значений $x_1, x_2, \ldots$, то её среднее значение может быть вычислено по формуле

$$\mathbf{E}\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \mathbf{P}\{\xi = x_i\}.$$

Если случайная величина ξ имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью $p(x)$, то её среднее значение может быть вычислено по формуле

$$\mathbf{E}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx.$$

Другие числовые характеристики случайных величин:
$\mathbf{D}\xi = \mathbf{E}(\xi - \mathbf{E}\xi)^2$ — *дисперсия* случайной величины ξ;
$\mathbf{Cov}(\xi, \eta) = \mathbf{E}(\xi - \mathbf{E}\xi)(\eta - \mathbf{E}\eta)$ — *ковариация* случайных величин ξ и η;
$\rho(\xi, \eta) = \dfrac{\mathbf{Cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{\mathbf{D}\xi\mathbf{D}\eta}}$ — *коэффициент корреляции* случайных величин ξ и η;
$\mathbf{E}\xi^k$ — *момент порядка* k (k*-й момент*) случайной величины ξ.

11.1. Доказать, что:
а) $\mathbf{D}\xi = \mathbf{E}\xi^2 - (\mathbf{E}\xi)^2$; б) $\mathbf{Cov}(\xi, \eta) = \mathbf{E}\xi\eta - \mathbf{E}\xi\mathbf{E}\eta$.

11.2. Случайные величины ξ и η независимы, причём $\mathbf{E}\xi = 2$, $\mathbf{D}\xi = 1$, $\mathbf{E}\eta = 1$, $\mathbf{D}\eta = 3$. Найти среднее значение и дисперсию случайной величины
а) $\xi - 2\eta$; б) $2\xi - \eta$.

11.3. Пусть случайная величина имеет:
а) биномиальное распределение;
б) распределение Пуассона с параметром λ;
в) геометрическое распределение с параметром p;
г) равномерное распределение на отрезке $[-a, a]$;
д) равномерное распределение на отрезке $[a, b]$;
е) распределение Коши с параметром сдвига a;
ж) показательное распределение с параметром α;
з) распределение Лапласа;
и) нормальное распределение с параметрами a и σ^2.
Существует ли у нее математическое ожидание и дисперсия? Если «да», посчитать соответствующие значения.

11.4. Дискретная случайная величина ξ имеет ряд распределения

x_i	-1	0	1	2
$\mathbf{P}\{\xi = x_i\}$	$1/5$	$1/10$	$3/10$	$2/5$

Найти математические ожидания и дисперсии случайных величин:
а) ξ; в) ξ^2;
б) $|\xi|$; г) 2^ξ.

11.5. Решить задачу **11.4**, если дискретная случайная величина ξ имеет ряд распределения

x_i	-1	0	1
$\mathbf{P}\{\xi = x_i\}$	$1/3$	$1/6$	$1/2$

.

11.6. Решить задачу **11.4**, если дискретная случайная величина ξ имеет ряд распределения

x_i	-2	0	1	5
$\mathbf{P}\{\xi = x_i\}$	$3/8$	$1/8$	$1/4$	$1/4$

.

11.7. Пусть случайная величина ξ принимает значения -2, -1, 0, 1 и 2 с вероятностью $1/5$ каждое. Найти математические ожидания и дисперсии случайных величин:

а) ξ; в) $|\xi|$;
б) $-\xi$; г) ξ^2.

11.8. Вычислить $\mathbf{E}(1+\xi)^{-1}$, если случайная величина ξ имеет:

а) распределение Пуассона с параметром λ;

б) биномиальное распределение с параметрами n и p.

11.9. В предположениях задачи **11.8** вычислить $\mathbf{E}(2+\xi)^{-1}$.

11.10. Находящийся в силовом поле электрон имеет энергию V, принимающую значения $v_i = a(i+1/2)$, $i = 1, 2, \ldots$, с вероятностями, пропорциональными e^{-bv_i}; a и b — постоянные. Найти $\mathbf{E}V$ и $\mathbf{E}V^2$.

11.11. В дополнение к условиям задачи **6.23** предположим, что организаторы матча учредили призовой фонд в 100 тугриков. Какую сумму денег следует присудить игроку A?

11.12. Пусть случайная величина ξ принимает конечное число неотрицательных значений $x_1, \ldots, x_s$. Доказать, что при $n \to \infty$

а) $\dfrac{\mathbf{E}\xi^{n+1}}{\mathbf{E}\xi^n} \to \max(x_1, \ldots, x_s)$; б) $\sqrt[n]{\mathbf{E}\xi^n} \to \max(x_1, \ldots, x_s)$.

11.13. Случайная величина ξ может принимать только следующие значения: -2, -1, 0, 1 и 2. С какими вероятностями ξ принимает эти значения, если:

а) $\mathbf{E}\xi = \mathbf{E}\xi^3 = 0$, $\mathbf{E}\xi^2 = 1$ и $\mathbf{E}\xi^4 = 2$;

б) $\mathbf{E}\xi = \mathbf{E}\xi^3 = 0$, $\mathbf{E}\xi^2 = 2$ и $\mathbf{E}\xi^4 = 6$.

11.14. Выяснить, существует ли случайная величина ξ такая, что $\mathbf{E}\xi = 1$, $\mathbf{E}\xi^2 = 2$, $\mathbf{E}\xi^3 = 3$, $\mathbf{E}\xi^4 = 4$ и $\mathbf{E}\xi^5 = 5$?

11.15. Распределение случайной величины ξ имеет плотность

$$p(x) = \begin{cases} 2x & \text{при } x \in [0,1], \\ 0 & \text{при } x \notin [0,1]. \end{cases}$$

Найти математические ожидания и дисперсии следующих величин:

а) ξ; в) ξ^2;
б) $|\xi - 1/2|$; г) 2^ξ.

11.16. Распределение случайной величины ξ имеет плотность

$$p(x) = \begin{cases} 3x^{-4} & \text{при } x \geqslant 1, \\ 0 & \text{при } x < 1. \end{cases}$$

Найти математические ожидания и дисперсии следующих величин:

а) ξ; б) $1/\xi$.

11.17. Пусть случайная величина ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[0,1]$. Вычислить $\mathbf{E}\sin^2\pi\xi$, $\mathbf{D}\sin^2\pi\xi$.

11.18. Пусть случайная величина ξ имеет стандартное распределение Коши. Вычислить $\mathbf{E}\min(|\xi|,1)$.

11.19. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром α. Установить, при каких значениях α существуют математическое ожидание и дисперсия случайной величины e^{ξ}.

11.20. Диаметр круга измерен приближенно. Считая, что его величина равномерно распределена на отрезке $[a,b]$, найти среднее значение и дисперсию площади круга.

11.21. Случайная величина ξ имеет стандартное нормальное распределение. Найти:

а) $\mathbf{E}|\xi|$; б) $\mathbf{E}\xi^n$, $n \in \mathbf{N}$.

11.22. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами a и σ^2. Найти $\mathbf{E}|\xi - \mathbf{E}\xi|$.

11.23. Случайные величины ξ, η и ζ независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Найти среднее значение и дисперсию случайной величины $\xi + \xi\eta + \xi\eta\zeta$.

11.24. Случайные величины ξ и η независимы, причём ξ имеет нормальное распределение с параметрами 2 и $1/2$, а η — равномерное распределение на отрезке $[0,4]$. Найти:

а) $\mathbf{E}(\xi+\eta)$; г) $\mathbf{E}(\xi-\eta^2)$;
б) $\mathbf{E}\xi\eta$; д) $\mathbf{D}(\xi+\eta)$;
в) $\mathbf{E}\xi^2$; е) $\mathbf{D}(\xi-\eta)$.

11.25. Двумерное распределение пары целочисленных случайных величин ξ и η задается с помощью таблицы

	$\xi=-1$	$\xi=0$	$\xi=1$
$\eta=-1$	$1/8$	$1/12$	$7/24$
$\eta=1$	$5/24$	$1/6$	$1/8$

,

где в пересечении столбца $\xi = i$ и строки $\eta = j$ находится вероятность $\mathbf{P}\{\xi = i, \eta = j\}$. Найти:

а) $\mathbf{E}\xi$, $\mathbf{D}\xi$; в) $\mathbf{Cov}(\xi,\eta)$;
б) $\mathbf{E}\eta$, $\mathbf{D}\eta$; г) $\mathbf{E}(\xi-2\eta)$, $\mathbf{D}(\xi-2\eta)$.

11.26. Решить задачу **11.25**, если двумерное распределение случайных величин ξ и η задается с помощью таблицы

	$\xi=-2$	$\xi=0$	$\xi=1$
$\eta=-1$	$1/6$	$1/6$	$1/6$
$\eta=2$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

.

11.27. Решить задачу **11.25**, если двумерное распределение случайных величин ξ и η задается с помощью таблицы

	$\xi=-1$	$\xi=0$	$\xi=1$
$\eta=-2$	$1/8$	$1/12$	$7/24$
$\eta=0$	$2/24$	$1/12$	$1/16$
$\eta=1$	$3/24$	$1/12$	$1/16$

.

11.28. Случайная точка (ξ,η) имеет равномерное распределение в треугольнике с вершинами в точках $(0,0)$, $(2,1)$, $(2,0)$. Найти $\mathbf{E}\xi$, $\mathbf{E}\eta$, $\mathbf{D}\xi$, $\mathbf{D}\eta$, $\mathbf{Cov}(\xi,\eta)$. Проверить, зависимы или нет ξ и η.

11.29. Случайная точка (ξ,η) имеет равномерное распределение в квадрате $\{(x,y) : |x|+|y| \leqslant \sqrt{2}\}$. Найти $\mathbf{E}\xi$, $\mathbf{E}\eta$, $\mathbf{D}\xi$, $\mathbf{D}\eta$, $\mathbf{Cov}(\xi,\eta)$. Проверить, зависимы или нет ξ и η.

11.30. Случайная точка (ξ,η) распределена равномерно внутри единичного круга с центром в начале координат.

а) Найти математическое ожидание и дисперсию $\zeta=\xi\eta$.

б) Найти $\mathbf{Cov}(\xi,\eta)$.

в) Проверить, зависимы или нет ξ и η.

11.31. Случайная точка (ξ,η) распределена равномерно в квадрате $\{(x,y) : 0 \leqslant x, y \leqslant 1\}$. Найти средние значения и дисперсии следующих величин:

а) $\zeta=\xi\eta$; б) $\zeta=\max(\xi,\eta)$.

11.32. Пусть случайные величины ξ и η независимы, причём ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[0,1]$, а η — на отрезке $[1,2]$. Найти средние значения и дисперсии следующих величин:

а) $\zeta=\xi\eta$; б) $\zeta=\max(\xi,\eta)$.

11.33. Совместное распределение случайных величин ξ и η имеет плотность

$$p(x,y)=\begin{cases} x+y & \text{при } 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Найти $\mathbf{E}\xi$, $\mathbf{E}\eta$, $\mathbf{D}\xi$, $\mathbf{D}\eta$, $\mathbf{Cov}(\xi,\eta)$.

11.34. Доказать, что если случайная величина ξ принимает лишь целые неотрицательные значения, то

$$\mathbf{E}\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\xi \geqslant n\}.$$

11.35. Доказать, что если случайная величина ξ принимает лишь неотрицательные значения, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\xi \geqslant n\} \leqslant \mathbf{E}\xi \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\xi \geqslant n\} + 1.$$

11.36. а) Доказать, что если $\mathbf{P}\{\xi \geqslant 0\} = 1$, то

$$\mathbf{E}\xi = \int\limits_0^{\infty} \mathbf{P}\{\xi \geqslant x\} dx.$$

б) Доказать, что если $\mathbf{E}|\xi| < \infty$, то

$$\mathbf{E}\xi = \int\limits_0^{\infty} \mathbf{P}\{\xi \geqslant x\} dx - \int\limits_{-\infty}^{0} \mathbf{P}\{\xi < x\} dx.$$

11.37. а) Доказать, что $\mathbf{E}|\xi| < \infty$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n} \mathbf{P}\{|\xi| > n\} < \infty.$$

б) Доказать, что $\mathbf{E}\xi^2 < \infty$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n} n\mathbf{P}\{|\xi| > n\} < \infty.$$

11.38. Привести пример случайной величины ξ, у которой не существует среднего значения.

11.39. Привести пример случайной величины ξ, у которой среднее значение существует, а дисперсия не существует.

11.40. Доказать, что если случайная величина ξ имеет момент порядка k, то её функция распределения F удовлетворяет соотношению

$$\lim_{x \to \infty} x^k (1 - F(x) + F(-x)) = 0.$$

11.41. Доказать, что $\mathbf{E}\xi^2 = 0$ равносильно $\mathbf{P}\{\xi = 0\} = 1$.

11.42. Пусть случайная величина ξ имеет математическое ожидание, причём $\mathbf{E}\{\xi; A\} = 0$ для любого события A. Доказать, что $\mathbf{P}\{\xi = 0\} = 1$.

11.43. Какому условию должны удовлетворять независимые случайные величины ξ и η, чтобы $\mathbf{D}(\xi\eta) = \mathbf{D}\xi\mathbf{D}\eta$.

11.44. Доказать, что если $\mathbf{E}\xi^2 = \mathbf{E}\xi^3 = \mathbf{E}\xi^4$, то случайная величина ξ дискретна и может принимать лишь значения 0 и 1.

11.45. Доказать следующие неравенства:

а) $\mathbf{E}\xi^4 \geqslant (\mathbf{E}\xi)^4$; б) $\mathbf{E}\xi^2\mathbf{E}\xi^4 \geqslant (\mathbf{E}\xi^3)^2$.

Когда в этих неравенствах возможен знак равенства?

11.46. Пусть случайная величина ξ такова, что $\mathbf{P}\{0 < \xi < 1\} = 1$. Доказать, что $\mathbf{D}\xi < \mathbf{E}\xi$.

11.47. Пусть ξ и η — случайные величины. Доказать, что если существуют $\mathbf{E}\xi$ и $\mathbf{E}\eta$, то существует $\mathbf{E}\max(\xi, \eta)$. Верно ли обратное?

11.48. Пусть ξ и η — случайные величины. Доказать, что если существуют $\mathbf{E}\max(\xi, \eta)$ и $\mathbf{E}\min(\xi, \eta)$, то существуют $\mathbf{E}\xi$ и $\mathbf{E}\eta$, причём $\mathbf{E}\xi + \mathbf{E}\eta = \mathbf{E}\max(\xi, \eta) + \mathbf{E}\min(\xi, \eta)$.

11.49. Пусть ξ и η — независимые случайные величины такие, что существует $\mathbf{E}|\xi + \eta|^a$, $a > 0$. Доказать, что существуют $\mathbf{E}|\xi|^a$ и $\mathbf{E}|\eta|^a$.

11.50. Привести пример двух случайных величин ξ и η таких, что $\mathbf{E}\xi$ и $\mathbf{E}\eta$ существуют, а $\mathbf{E}\xi\eta$ не существует.

11.51. Найти $\inf\limits_{a\in\mathbf{R}} \mathbf{E}(\xi - a)^2$.

11.52. Найти $\inf\limits_{a\in\mathbf{R}} \mathbf{E}|\xi - a|$.

11.53. Пусть положительные случайные величины ξ и η независимы и имеют плотности f и g соответственно. Доказать, что если $\mathbf{E}\xi < \infty$, то отношение ξ/η имеет конечное математическое ожидание тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_0^1 \frac{g(y)}{y}\,dy < \infty.$$

11.54. Пусть случайные величины ξ и η имеют плотности f и g соответственно; a — некоторое число. Доказать, что если $f(x) \geqslant g(x)$ при $x < a$ и $f(x) \leqslant g(x)$ при $x > a$, то $\mathbf{E}\xi \leqslant \mathbf{E}\eta$.

11.55. Бросается n игральных костей. Найти математическое ожидание и дисперсию суммы очков на всех костях.

11.56. Для группы из n человек найти математическое ожидание и дисперсию числа дней в году, на каждый из которых не приходятся ни одного дня рождения.

11.57. Для группы из n человек найти математическое ожидание числа дней в году, на каждый из которых приходятся дни рождения ровно k человек.

11.58. Для группы из n человек найти математическое ожидание числа дней в году, на каждый из которых приходится дни рождения по крайней мере двух человек. Как велико должно быть n, чтобы это среднее было больше 1?

11.59. На отрезок $[0, a]$ наудачу брошены две точки. Найти математическое ожидание и дисперсию расстояния между ними, а также ковариацию координат левой и правой точек.

11.60. Пусть случайные величины ξ_1 и ξ_2 положительны и одинаково распределены. Верно ли, что

$$\mathbf{E}\frac{\xi_1}{\xi_1+\xi_2} = \mathbf{E}\frac{\xi_2}{\xi_1+\xi_2}?$$

11.61. Доказать, что если случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы, положительны и одинаково распределены, то при $k \leqslant n$

$$\mathbf{E}\frac{\xi_1+\cdots+\xi_k}{\xi_1+\cdots+\xi_n} = \frac{k}{n}.$$

11.62. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые случайные величины, принимающие значения 1 и 0 с вероятностями p и $1-p$ соответственно. Найти среднее значение и дисперсию суммы $\zeta = \eta_1 + \cdots + \eta_n$, если:

а) $\eta_i = \xi_i \xi_{i+1}$;

б) $\eta_i = \xi_i \xi_{i+1} \xi_{i+2}$;

в) $\eta_i = \begin{cases} 0, & \text{если } \xi_i + \xi_{i+1} \text{ — число чётное,} \\ 1, & \text{если } \xi_i + \xi_{i+1} = 1. \end{cases}$

11.63. Написаны n писем, предназначенных разным адресатам. Имеется n конвертов с соответствующими адресами. Письма в случайном порядке вложены в конверты. Найти среднее значение и дисперсию числа писем, посланных по правильному адресу.

11.64. Найти коэффициент корреляции между числом «единиц» и числом «шестерок» при n бросаниях правильной игральной кости.

11.65. Пусть r занумерованных частиц случайно размещаются в n ячейках. Найти среднее значение числа пустых ячеек.

11.66. В урне a белых и b черных шаров. Из урны вынимают одновременно k шаров ($k \leqslant a + b$). Найти математическое ожидание и дисперсию числа вынутых белых шаров.

11.67. Построить пример двух зависимых случайных величин, у которых коэффициент корреляции равен нулю.

11.68. Доказать, что если каждая из случайных величин ξ и η принимает только два значения, то из равенства $\mathbf{E}\xi\eta = \mathbf{E}\xi\mathbf{E}\eta$ вытекает независимость ξ и η.

11.69. Найти коэффициент корреляции между ξ и ξ^2, если:

а) $\mathbf{P}\{\xi = 0\} = 1/3$, $\mathbf{P}\{\xi = 1\} = 1/2$, $\mathbf{P}\{\xi = -1\} = 1/6$;

б) $\mathbf{P}\{\xi = -2\} = \mathbf{P}\{\xi = -1\} = \mathbf{P}\{\xi = 1\} = \mathbf{P}\{\xi = 2\} = 1/4$.

Являются ли случайные величины ξ и ξ^2 независимыми?

11.70. Найти коэффициент корреляции между ξ и $\eta = e^{-\xi}$, если:

а) ξ имеет стандартное нормальное распределение;

б) ξ имеет нормальное распределение с параметрами a и σ^2.

11.71. Доказать, что не существует трех случайных величин ξ, η и ζ таких, что коэффициент корреляции любых двух из них равен -1.

11.72. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — случайные величины, причём коэффициент корреляции любых двух из них равен одному и тому же числу ρ. Доказать, что $\rho \geqslant -1/(n-1)$.

11.73. Пусть ξ — случайная величина с симметричным распределением и конечной дисперсией. Найти коэффициент корреляции случайных величин ξ и $|\xi|$.

11.74. Пусть случайные величины ξ и η независимы, причём $\mathbf{P}\{\xi = 1\} = \mathbf{P}\{\xi = -1\} = 1/2$, $\mathbf{P}\{\eta = 1\} = \mathbf{P}\{\eta = -1\} = 1/4$, $\mathbf{P}\{\eta = 0\} = 1/2$. Будут ли случайные величины $\xi\eta$ и η

а) независимыми; б) некоррелированными?

11.75. Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_{n+m}$ $(n > m)$ независимы, одинаково распределены и имеют конечную дисперсию. Найти коэффициент корреляции между суммами $\xi_1 + \cdots + \xi_n$ и $\xi_{m+1} + \cdots + \xi_{m+n}$.

11.76. Случайные величины ξ и η независимы и нормально распределены с параметрами a и σ^2. Найти коэффициент корреляции величин $\alpha\xi + \beta\eta$ и $\alpha\xi - \beta\eta$, а также их совместное распределение.

11.77. Найти возможное распределение случайной величины ξ, если $\mathbf{E}\xi^{2n}$, $\mathbf{E}\xi^{2n+1}$ и $\mathbf{E}\xi^{2n+2}$ при некотором натуральном n являются последовательными членами арифметической прогрессии.

11.78. Найти возможное распределение случайной величины ξ, если $\mathbf{E}\xi^{n}$, $\mathbf{E}\xi^{n+1}$ и $\mathbf{E}\xi^{n+2}$ при некотором натуральном n являются последовательными членами геометрической прогрессии.

11.79. Пусть случайные величины ξ и η имеют нулевые средние значения, единичные дисперсии и коэффициент корреляции ρ. Показать, что $\mathbf{E}\max(\xi^2, \eta^2) \leqslant 1 + \sqrt{1-\rho^2}$.

11.80. Пусть случайные величины ξ и η имеют нулевые средние значения, единичные дисперсии и коэффициент корреляции ρ, $0 < \rho < 1$. Найти все значения a и b, при которых случайные величины $\xi - a\eta$ и $\eta - b\xi$ некоррелированы.

11.81. Пусть $g(x)$ — чётная функция, а ξ — случайная величина такая, что $\mathbf{E}\xi = 0$ и существуют $\mathbf{E}\xi^2$ и $\mathbf{E}g^2(\xi)$. Найти $\mathbf{Cov}(\xi, g(\xi))$.

11.82. Пусть ξ и η — случайные величины с конечными дисперсиями. Доказать, что $|\sqrt{\mathbf{D}\xi} - \sqrt{\mathbf{D}\eta}| \leqslant \sqrt{\mathbf{D}(\xi+\eta)} \leqslant \sqrt{\mathbf{D}\xi} + \sqrt{\mathbf{D}\eta}$.

11.83. Пусть ξ_1, ξ_1, ... — независимые одинаково распределённые случайные величины со средним значением a и дисперсией σ^2. Пусть ν — положительная целочисленная случайная величина, не зависящая от $\{\xi_n\}$ и имеющая среднее значение b и дисперсию θ^2. Найти среднее значение и дисперсию случайной суммы $\xi_1 + \dots + \xi_\nu$.

11.84. Случайные величины ξ_1, ξ_2, ... независимы и равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$. Определим случайную величину ν равной тому значению k, при котором впервые сумма $\xi_1 + \dots + \xi_k$ превзойдет 1. Найти $\mathbf{E}\nu$.

11.85. Пусть случайные величины ξ_1, ξ_2, ... независимы и имеют одну и ту же функцию распределения F. Пусть x — некоторое число такое, что $0 < F(x) < 1$. Обозначим через $\nu(x) + 1$ номер первой случайной величины, значение которой превышает x. Доказать, что $\mathbf{E}\nu(x) = (1 - F(x))^{-1}$.

11.86. Независимые случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ равномерно распределены в множестве $\{1, 2, \ldots, J\}$. Определим случайную величину ν равной числу различных значений среди ξ_1, ..., ξ_n. Найти $\mathbf{E}\nu$.

11.87. Пусть ξ — случайная величина, $\mathbf{E}f(\xi) < \infty$, где неотрицательная функция $f(t)$ принимает при $t \geqslant x$ значения, не меньшие $s \geqslant 0$. Доказать, что

$$\mathbf{P}\{\xi \geqslant x\} \leqslant \mathbf{E}f(\xi)/s.$$

11.88. Пусть ξ — случайная величина, $\mathbf{E}e^{h\xi} < \infty$, $h > 0$. Доказать, что для любого $x > 0$

$$\mathbf{P}\{\xi \geqslant x\} \leqslant \mathbf{E}e^{h\xi}/e^{hx}.$$

11.89. Пусть случайная величина ξ имеет распределение Пуассона с параметром λ. Доказать, что для любого $x > 0$

а) $\mathbf{P}\{\xi \geqslant x\} \leqslant \lambda/x$;

б) $\mathbf{P}\{\xi \geqslant x\} \leqslant e^\lambda/2^x$;

в) $\mathbf{P}\{\xi \geqslant 2\lambda\} \leqslant 1/\max(2, \lambda)$.

Доказать, что $\mathbf{P}\{\xi \geqslant x\} \leqslant 4\lambda/x^2$ при $x > 2\lambda$.

11.90. Пусть случайная величина ξ имеет:

а) распределение Пуассона с параметром λ;

б) показательное распределение с параметром α;

в) стандартное нормальное распределение.

Определить значение параметра h, при котором выражение в правой части неравенства в задаче **11.88** достигает своего наименьшего значения и найти значение этого минимума.

11.91. Доказать неравенство Кантелли: если существует $\mathbf{D}\xi$, то для любого $x > 0$

$$\mathbf{P}\{|\xi - \mathbf{E}\xi| > x\} \leqslant \frac{2\mathbf{D}\xi}{x^2 + \mathbf{D}\xi}.$$

11.92. Пусть ξ — случайная величина и $a > 1$ — действительное число. Доказать, что если $\mathbf{P}\{|\xi| > ax\}/\mathbf{P}\{|\xi| > x\} \to 0$ при $x \to \infty$, то $\mathbf{E}|\xi|^k$ существует при любом $k > 0$.

11.93. В одной западной стране мальчик подрабатывает тем, что торгует газетами; он закупает газету по 4 цента за штуку и продает по 7 центов. При этом он не может возвращать обратно непроданные газеты и несет на них убыток. Предположим, что число возможных продаж в один день случайно и имеет распределение Пуассона со средним значением 50. Сколько газет должен закупать бедняга для того, чтобы максимизировать свою среднюю прибыль?

11.94. Правомерно ли следующее рассуждение: «От дома до работы 1 км, хожу я в среднем со скоростью 5 км/час, следовательно, в среднем на дорогу у меня уходит 12 мин»?

11.95. Доказать, что для любой неотрицательной случайной величины ξ с конечной дисперсией выполняется неравенство

$$\mathbf{P}\{\xi = 0\} \leqslant \frac{\mathbf{D}\xi}{\mathbf{D}\xi + (\mathbf{E}\xi)^2}.$$

§ 12. Характеристические функции

Характеристической функцией случайной величины ξ называется функция $\varphi(t)$ действительного аргумента t, определяемая равенством $\varphi(t) = \mathbf{E}e^{it\xi}$.

Для любой комплекснозначной функции φ через $\operatorname{Re}\varphi$ обозначается вещественная часть этой функции.

12.1. Вычислить характеристическую функцию

а) распределения Бернулли с параметром p;

б) биномиального распределения с параметрами p и n;

в) распределения Пуассона с параметром λ;

г) геометрического распределения с параметром p;

д) равномерного распределения на отрезке $[-a, a]$;

е) равномерного распределения на отрезке $[a, b]$;

ж) распределения Коши с параметром сдвига a;

з) показательного распределения с параметром α;

и) распределения Лапласа с параметром α;

к) нормального распределения с параметрами a и σ^2.

12.2. Найти закон распределения со следующей характеристической функцией:

а) $\cos t$;

б) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kt)$, где $a_k \geqslant 0$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = 1$;

в) $\cos^2 t$;

г) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\cos t}{2} + \dfrac{i \sin t}{6}$;

д) e^{-t^2};

е) $e^{-|t|}$;

ж) $1/(1+t^2)$;

з) $1/(1-it)$;

и) $(\sin t)/t$;

к) $e^{-|t|} \cos t$.

12.3. Пусть в качестве вероятностного пространства $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ взят отрезок $[0,1]$ с борелевской σ-алгеброй подмножеств и мерой Лебега. Найти характеристическую функцию случайной величины ξ, если:

а) $\xi(\omega) = \ln \omega$, $\xi(0) = 0$;

б) $\xi(\omega) = \begin{cases} 2\omega & \text{при } 0 \leqslant \omega \leqslant 1/2, \\ 2\omega - 1 & \text{при } 1/2 < \omega \leqslant 1; \end{cases}$

в) $\xi(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leqslant \omega \leqslant 1/3, \\ 0 & \text{при } 1/3 < \omega \leqslant 2/3, \\ 1 & \text{при } 2/3 < \omega \leqslant 1. \end{cases}$

Пусть ξ — случайная величина с характеристической функцией φ. Найти характеристические функции случайных величин

12.4. $-\xi$.

12.5. $a\xi + b$, где $a, b \in \mathbf{R}$.

12.6. Доказать, что характеристическая функция чётна тогда и только тогда, когда соответствующая функция распределения F удовлетворяет соотношению $F(x) = 1 - F(-x-0)$.

12.7. Доказать, что характеристическая функция вещественна тогда и только тогда, когда она чётна.

12.8. Пусть ξ и η — независимые одинаково распределённые случайные величины с характеристической функцией φ. Найти характеристическую функцию случайной величины $\xi - \eta$.

В задачах **12.9–12.19** выяснить, являются ли следующие функции характеристическими:

12.9. $\sin t$.

12.10. $\sin t + 1$.

12.11. e^{-t^4}.

12.12. $\dfrac{1}{1-|t|i}$.

12.13. $\varphi(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| < 1, \\ 0, & |t| \geqslant 1. \end{cases}$

12.14. $\cos(t^2)$.

12.15. $\cos^5 t$.

12.16. $e^{-i|t|}$.

12.17. $\varphi(t) = \begin{cases} \sqrt{1-t^2}, & |t| < 1, \\ 0, & |t| \geqslant 1. \end{cases}$

12.18. $\varphi(t) = \begin{cases} 1 - t^2, & |t| < 1, \\ 0, & |t| \geqslant 1. \end{cases}$

12.19. Вещественная функция, не являющаяся чётной.

12.20. Доказать, что из равенства $\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_\xi(t)\varphi_\eta(t)$ не следует, вообще говоря, независимость случайных величин ξ и η.

12.21. Пусть $\varphi(t)$ — чётная непрерывная функция выпуклая при $t \geqslant 0$ и такая, что $0 \leqslant \varphi(t) \leqslant 1$ и $\varphi(0) = 1$. Доказать, что $\varphi(t)$ является характеристической функцией.

12.22. Существуют ли две различные характеристические функции, совпадающие на некотором отрезке, содержащем начало координат?

12.23. Пусть случайная величина ξ не зависит от η и ζ, причём суммы $\xi + \eta$ и $\xi + \zeta$ имеют одинаковое распределение. Верно ли, что случайные величины η и ζ имеют одинаковое распределение?

12.24. Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ — характеристические функции и $a_1, a_2, \ldots$ — неотрицательные числа такие, что $a_1 + a_2 + \cdots = 1$. Доказать, что функция $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i\varphi_i$ также является характеристической.

В задачах **12.25–12.30** доказать, что если φ является характеристической функцией, то характеристическими являются также и функции:

12.25. $e^{\varphi-1}$.

12.26. $\dfrac{2}{2-\varphi} - 1$.

12.27. φ^2.

12.28. $\operatorname{Re}\varphi$.

12.29. $\dfrac{1}{t}\int\limits_0^t \varphi(z)dz$.

12.30. $|\varphi|^2$.

12.31. Пусть ξ и η — независимые случайные величины с функциями распределения F и G и характеристическими функциями φ и ψ соответственно. Доказать, что произведение $\xi\eta$ имеет характеристическую функцию

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(tz)dG(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(tz)dF(z).$$

12.32. Пусть φ — характеристическая функция. Доказать, что:

а) $|\varphi(t+h) - \varphi(t)| \leqslant \sqrt{2[1 - \operatorname{Re}\varphi(h)]}$;

б) $1 - \operatorname{Re}\varphi(2t) \leqslant 4(1 - \operatorname{Re}\varphi(t))$.

12.33. Доказать, что для любой случайной величины ξ, соответствующей характеристической функции φ и любого $x > 0$

$$\mathbf{P}\{|\xi| > 2/x\} \leqslant \frac{1}{x}\int\limits_{-x}^{x}(1-\varphi(u))du.$$

12.34. Рассмотрим распределение, симметричное относительно 0.

Пусть $F(x)$ — соответствующая функция распределения, а $\varphi(t)$ — характеристическая функция. Доказать, что если $x(1-F(x)) \to c > 0$ при $x \to \infty$, то $\varphi(t) = 1 - c\pi|t| + o(t)$ при $t \to 0$.

12.35. Доказать, что если величины ξ и η независимы, одинаково распределены и их сумма нормально распределена, то ξ и η также нормально распределены.

§ 13. Производящие функции

Производящей функцией абсолютно суммируемой числовой последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется функция $\varphi(z)$ комплексного аргумента z, $|z| \leqslant 1$, определяемая равенством

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n a_n.$$

Производящей функцией неотрицательной целочисленной случайной величины ξ называется производящая функция последовательности $\{\mathbf{P}\{\xi = n\}\}_{n=0}^{\infty}$.

13.1. Пусть случайная величина ξ принимает лишь целые неотрицательные значения и пусть $g(z)$, $|z| \leqslant 1$, — ее производящая функция. Определяет ли производящая функция $g(z)$ однозначным образом распределение случайной величины ξ?

13.2. Пусть ξ — неотрицательная целочисленная случайная величина с производящей функцией φ. Найти производящие функции величин $\xi + 1$ и 2ξ.

13.3. Пусть ξ — неотрицательная целочисленная случайная величина. Найти производящие функции следующих последовательностей:

а) $\mathbf{P}\{\xi \leqslant n\}$;
б) $\mathbf{P}\{\xi \geqslant n\}$;
в) $\mathbf{P}\{\xi = 2n\}$;
г) $\mathbf{P}\{\xi < n\}$;
д) $\mathbf{P}\{\xi > n\}$.

13.4. Найти законы распределения, которым соответствуют следующие производящие функции:

а) $\dfrac{(1+z)^2}{4}$;
б) $e^{\lambda(z-1)}$, $\lambda > 0$;
в) $\dfrac{1}{2(1-z/2)}$;
г) $(1/3 + 2z/3)^n$, $n \in \mathbf{N}$.

13.5. Пусть случайная величина ξ имеет производящую функцию φ. Найти распределение ξ, если $\varphi(1/2^n) = 1/2^n$ для любого n.

13.6. Доказать, что функция $\varphi(z) = |z|$ не может быть производящей функцией вероятностного распределения.

13.7. Пусть случайная величина ξ принимает значения $0, 1, \ldots, n-1$ с вероятностью $1/n$ каждое. Показать, что если число n — составное, то

ξ можно представить в виде суммы независимых целочисленных случайных величин.

13.8. Пусть p_n — вероятность того, что число успехов в n испытаниях Бернулли делится на 3. Найти рекуррентное соотношение для p_n, а из него — производящую функцию.

13.9. Пусть случайная величина ξ принимает значения 0 и 1 с вероятностью $1/2$ каждое, а η — 0, 1, 2 и 3 с вероятностями $1/8$, $1/4$, $1/2$ и $1/8$ соответственно. Доказать, что не существует случайной величины ζ, не зависящей от ξ и такой, что $\xi + \zeta = \eta$.

13.10. Решить задачу **10.80**, используя производящие функции.

13.11. Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин с общей функцией распределения F. Пусть ν — положительная целочисленная случайная величина, не зависящая от $\{\xi_n\}$ и имеющая производящую функцию φ. Доказать, что функция распределения случайной величины $\max(\xi_1, \ldots, \xi_\nu)$ равна $\varphi(F(x))$.

13.12. Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность целочисленных неотрицательных независимых одинаково распределённых случайных величин с производящей функцией φ. Пусть ν — положительная целочисленная случайная величина, не зависящая от $\{\xi_n\}$ и имеющая производящую функцию ψ. Найти производящую функцию суммы случайного числа слагаемых $\xi_1 + \cdots + \xi_\nu$.

§ 14. Безгранично делимые распределения

Говорят, что случайная величина ξ имеет *безгранично делимое распределение*, если для любого натурального n найдутся независимые одинаково распределённые случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ такие, что распределение суммы $\xi_1 + \cdots + \xi_n$ совпадает с распределением ξ.

14.1. Пусть случайная величина ξ имеет безгранично делимое распределение. Доказать, что при любых вещественных a и b распределение случайной величины $a\xi + b$ также безгранично делимое.

14.2. Доказать, что слабый предел последовательности безгранично делимых распределений безгранично делим.

14.3. Пусть $\varphi(t)$ — характеристическая функция безгранично делимого распределения. Доказать, что для любого $c > 0$ функция $\varphi^c(t)$ также является характеристической функцией безгранично делимого распределения.

14.4. Пусть ξ и η — независимые случайные величины с безгранично делимыми распределениями. Доказать, что распределение случайной величины $\xi + \eta$ также безгранично делимое.

14.5. Пусть $\varphi(t)$ — характеристическая функция безгранично делимого распределения. Доказать, что функция $|\varphi(t)|$ также является характеристической функцией безгранично делимого распределения.

14.6. Доказать, что характеристическая функция безгранично делимого распределения нигде не обращается в нуль.

14.7. Доказать безграничную делимость

а) распределения Пуассона;

б) нормального распределения;

в) распределения Коши;

г) Г-распределения;

д) показательного распределения;

е) распределения хи-квадрат.

14.8. Пусть $\varphi(t)$ — характеристическая функция. Доказать, что для любого $\lambda > 0$ функция $e^{\lambda(\varphi(t)-1)}$ является характеристической функцией безгранично делимого распределения.

14.9. Доказать, что если сумма двух независимых безгранично делимых случайных величин распределена по закону Пуассона, то каждое из слагаемых также распределено по закону Пуассона.

14.10. Доказать, что если сумма двух независимых безгранично делимых случайных величин распределена по нормальному закону, то каждое из слагаемых также распределено по нормальному закону.

14.11. Доказать, что равномерное на отрезке распределение не может быть безгранично делимым.

14.12. Доказать, что невырожденное безгранично делимое распределение не может быть сосредоточено на конечном отрезке.

14.13. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, причём ξ имеет равномерное на некотором отрезке распределение. Доказать, что случайная величина $\xi + \eta$ не может иметь безгранично делимое распределение.

14.14. Выписать в явном виде последовательность сложных пуассоновских законов, которые сходятся к нормальному распределению. Показать, что само нормальное распределение не является сложным пуассоновским.

О Т Д Е Л IV

СХОДИМОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

§ 15. Сходимость почти наверное

Говорят, что последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ *сходится почти наверное* (*с вероятностью* 1) к случайной величине ξ и пишут $\xi_n \to \xi$ п. н., если $\mathbf{P}\{\omega : \xi_n(\omega) \to \xi(\omega)$ при $n \to \infty\} = 1$.

15.1. Пусть $\xi_n \to \xi$ п. н. Доказать, что:

а) $|\xi_n| \to |\xi|$ п. н.; б) $\xi_n^2 \to \xi^2$ п. н.

15.2. Пусть $\xi_n \to 1$ и $\eta_n \to 1$ п. н. Доказать, что

а) $\dfrac{1}{\xi_n + \eta_n} \to \dfrac{1}{2}$ п. н.; в) $\xi_n + \eta_n \to 2$ п. н.

б) $\xi_n \eta_n \to 1$ п. н.;

15.3. Пусть $\xi_n \to \xi$ п. н. и $g(x)$ — непрерывная функция. Доказать, что $g(\xi_n) \to g(\xi)$ п. н.

15.4. Пусть $\xi_n \to \xi$, $\eta_n \to \eta$ п. н. и $g(x, y)$ — непрерывная функция. Доказать, что $g(\xi_n, \eta_n) \to g(\xi, \eta)$ п. н.

15.5. Пусть $\xi_n \to \xi$ и $\xi_n \to \eta$ п. н. Доказать, что $\mathbf{P}\{\xi = \eta\} = 1$.

15.6. Пусть $(\xi_n - \xi)^2 \to 0$ п. н. Доказать, что $\xi_n^2 \to \xi^2$ п. н.

15.7. Доказать, что $\xi_n \to \xi$ п. н. тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon \text{ для бесконечно многих } n\} = 0.$$

15.8. Доказать, что последовательность случайных величин сходится с вероятностью 1 к некоторой случайной величине тогда и только тогда, когда она фундаментальна с вероятностью 1.

15.9. Доказать, что $\xi_n \to \xi$ п. н. тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{i \geqslant n} |\xi_i - \xi| > \varepsilon\right\} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

15.10. Доказать, что последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ с вероятностью 1 фундаментальна тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{i\geqslant 1}|\xi_{n+i} - \xi_n| > \varepsilon\right\} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

15.11. Пусть $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ — две последовательности случайных величин такие, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{|\xi_n - \eta_n| > \varepsilon\} < \infty.$$

Доказать, что если $\eta_n \to a$ п. н., то $\xi_n \to a$ п. н.

15.12. Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность случайных величин такая, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} < \infty.$$

Доказать, что $\xi_n \to \xi$ п. н.

15.13. Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и $\xi_n \to 0$ п. н. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{|\xi_n| > 1\}$ сходится.

15.14. Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность случайных величин. Доказать, что если для некоторой суммируемой последовательности положительных чисел $\{\varepsilon_n\}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{|\xi_{n+1} - \xi_n| > \varepsilon_n\} < \infty,$$

то последовательность $\{\xi_n\}$ с вероятностью 1 сходится к некоторой почти наверное конечной случайной величине.

15.15. Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность случайных величин. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}\xi_n^2$ сходится, то $\xi_n \to 0$ п. н.

15.16. Пусть $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ — случайные величины такие, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}|\xi_n - \xi|^a$ сходится при некотором $a > 0$. Доказать, что $\xi_n \to \xi$ п. н.

15.17. Пусть последовательность независимых случайных величин ξ_n сходится с вероятностью 1. Доказать, что дисперсия предела равна нулю.

15.18. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин таких, что $\mathbf{E}\xi_n^2 < \sigma^2$ и $\mathbf{E}\xi_n = 0$. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{2^n}$ сходится с вероятностью 1.

15.19. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n$ из некоррелированных случайных величин сходится в среднеквадратичном тогда и только тогда, когда сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}\xi_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{D}\xi_n$.

15.20. Доказать, что радиус сходимости R случайного степенного ряда $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \xi_i z^i$, коэффициенты ξ_i которого независимы, есть константа (почти наверное).

15.21. Доказать, что радиус сходимости R случайного степенного ряда $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \xi_i z^i$, коэффициенты ξ_i которого независимы и имеют одинаковое невырожденное распределение, равен 1 или 0 в зависимости от того, конечен или бесконечен момент $\mathbf{E}\ln(1 + |\xi_0|)$.

15.22. Пусть ξ_1, ξ_2 ... — независимые случайные величины, имеющие распределение Коши. Доказать, что

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} = \infty \quad \text{п. н.},$$

а при $\alpha > 0$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n^{1+\alpha}} = 0 \quad \text{п. н.}$$

15.23. Пусть случайные величины ξ_1, ξ_2, ... независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \prod\limits_{i=1}^{n} \xi_i$ сходится п. н.

15.24. Пусть независимые одинаково распределённые случайные величины ξ_1, ξ_2, ... принимают значения в множестве $\{1, 2, \dots, J\}$, причём $p(k) = \mathbf{P}\{\xi_1 = k\} > 0$ при любом $k \in \{1, 2, \dots, J\}$. Обозначим через

$$N_n(k) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{I}\{\xi_i = k\},$$

число элементов ξ_1, ..., ξ_n равных k; положим

$$\eta_n = \prod_{k=1}^{J} (p(k))^{N_n(k)}.$$

Доказать, что $n^{-1} \ln \eta_n$ сходится п. н. и найти предел.

§ 16. Сходимость по вероятности

Говорят, что последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ *сходится по вероятности* к случайной величине ξ и пишут $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$, если для любого $\varepsilon > 0$ имеет место сходимость $\mathbf{P}\{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\} \to 0$ при $n \to \infty$.

16.1. Доказать, что из сходимости почти наверное вытекает сходимость по вероятности.

16.2. Доказать, что если $\xi_1 \leqslant \xi_2 \leqslant \ldots$ и ξ_n сходятся по вероятности к ξ, то ξ_n сходятся к ξ п. н.

16.3. Доказать, что из сходимости по вероятности не вытекает, вообще говоря, сходимость почти наверное.

16.4. Доказать, что если ξ_n сходятся по вероятности к ξ, то $\xi_{n_k} \to \xi$ п. н. при $k \to \infty$ для некоторой подпоследовательности индексов n_k.

16.5. Пусть случайные величины ξ_1, ξ_2, $\ldots$ независимы. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n$ сходится по вероятности, то он сходится и п. н.

16.6. Доказать, что ξ_n сходятся по вероятности к ξ и η_n сходятся по вероятности к η тогда и только тогда, когда случайные векторы (ξ_n, η_n) сходятся по вероятности к (ξ, η).

16.7. Пусть $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$. Доказать, что:

а) $|\xi_n| \xrightarrow{p} |\xi|$, б) $\xi_n^2 \xrightarrow{p} \xi^2$.

16.8. Пусть $\xi_n \xrightarrow{p} 1$ и $\eta_n \xrightarrow{p} 1$. Доказать, что

а) $\dfrac{1}{\xi_n + \eta_n} \xrightarrow{p} \dfrac{1}{2}$; в) $\xi_n + \eta_n \xrightarrow{p} 2$.

б) $\xi_n \eta_n \xrightarrow{p} 1$;

16.9. Пусть $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$, причём $\mathbf{P}\{\xi = 0\} = 0$. Доказать, что $\dfrac{1}{\xi_n} \xrightarrow{p} \dfrac{1}{\xi}$.

16.10. Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность случайных величин, причём ξ_n принимает значения $e^{-\alpha n}$ и $e^{\alpha n}$ с вероятностями $1 - e^{-\beta n}$ и $e^{-\beta n}$ соответственно. При каких значениях α и β имеет место сходимость $\xi_n \xrightarrow{p} 0$?

16.11. Пусть $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$ и $g(x)$ — равномерно непрерывная ограниченная функция. Доказать, что $g(\xi_n) \xrightarrow{p} g(\xi)$.

16.12. Пусть $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$ и $g(x)$ — непрерывная функция. Доказать, что $g(\xi_n) \xrightarrow{p} g(\xi)$.

16.13. Пусть $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{p} \eta$ и $g(x, y)$ — равномерно непрерывная ограниченная функция. Доказать, что $g(\xi_n, \eta_n) \xrightarrow{p} g(\xi, \eta)$.

16.14. Пусть $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{p} \eta$ и $g(x, y)$ — непрерывная функция. Доказать, что $g(\xi_n, \eta_n) \xrightarrow{p} g(\xi, \eta)$.

16.15. Пусть $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$ и $g(x)$ — функция, непрерывная во всех точках множества A. Доказать, что если $\mathbf{P}\{\xi \in A\} = 1$, то $g(\xi_n) \xrightarrow{p} g(\xi)$.

16.16. Пусть $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$ и $\xi_n \xrightarrow{p} \eta$. Доказать, что $\mathbf{P}\{\xi = \eta\} = 1$.

16.17. Пусть $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{p} \eta$ и $\mathbf{P}\{\xi = \eta\} = 1$. Доказать, что $\xi_n - \eta_n \xrightarrow{p} 0$ при $n \to \infty$.

16.18. Пусть g — непрерывная, монотонно возрастающая и ограниченная на полупрямой $[0, \infty)$ функция, причём $g(0) = 0$. Доказать, что условие $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{E}g(|\xi_n|) = 0$ необходимо и достаточно для того, чтобы $\xi_n \xrightarrow{p} 0$.

16.19. Доказать, что ξ_n сходятся по вероятности к ξ тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{E}\frac{|\xi_n - \xi|}{1 + |\xi_n - \xi|} \to 0.$$

16.20. Пусть $(\xi_n - \xi)^2 \xrightarrow{p} 0$. Доказать, что $\xi_n^2 \xrightarrow{p} \xi^2$.

16.21. Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями. Вытекает ли из сходимости $\xi_n \xrightarrow{p} 0$ при $n \to \infty$ сходимость

$$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{p} 0?$$

16.22. Пусть $\{\xi_n\}$ — стационарная последовательность случайных величин, причём $\mathbf{E}|\xi_1| < \infty$. Выяснить условия, при которых последовательность $\{\xi_n\}$ сходится по вероятности при $n \to \infty$.

§ 17. Слабая сходимость

Говорят, что последовательность распределений $\{F_n\}$ *слабо сходится* к распределению F и пишут $F_n \Rightarrow F$, если для любой ограниченной непрерывной функции $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ имеет место сходимость

$$\int\limits_{\mathbf{R}} g(x) F_n(dx) \to \int\limits_{\mathbf{R}} g(x) F(dx) \quad \text{при } n \to \infty.$$

Если при каждом n случайная величина ξ_n имеет распределение F_n, а случайная величина ξ — распределение F, то используется также запись $\xi_n \Rightarrow \xi$. При этом условие слабой сходимости может быть записано в виде $\mathbf{E}g(\xi_n) \to \mathbf{E}g(\xi)$.

17.1. Пусть $\xi_n \Rightarrow \xi$ и $g(x)$ — непрерывная функция. Доказать, что $g(\xi_n) \Rightarrow g(\xi)$.

17.2. Пусть $\xi_n \Rightarrow 0$. Доказать, что $\xi_n \xrightarrow{p} 0$.

17.3. Пусть $\xi_n \Rightarrow \xi$. Верно ли, что $\xi_n - \xi \Rightarrow 0$?

17.4. Пусть $\xi_n \Rightarrow \xi$ и $a_n \to a$, где $\{a_n\}$ — числовая последовательность, $a \in \mathbf{R}$. Доказать, что $a_n\xi_n \Rightarrow a\xi$.

17.5. Пусть $\xi_n \Rightarrow \xi$ и $\eta_n \Rightarrow \eta$, причём, во-первых, ξ_n и η_n независимы при каждом n и, во-вторых, ξ и η также независимы. Доказать, что:

а) $\xi_n + \eta_n \Rightarrow \xi + \eta$;

б) $\xi_n\eta_n \Rightarrow \xi\eta$;

в) $f(\xi_n, \eta_n) \Rightarrow f(\xi, \eta)$ для любой непрерывной функции $f(x, y)$.

17.6. Пусть $\xi_n \Rightarrow \xi$ и $\eta_n \xrightarrow{p} 0$. Доказать, что:

а) $\xi_n + \eta_n \Rightarrow \xi$;
б) $\xi_n\eta_n \Rightarrow 0$.

17.7. Доказать, что сходимость по вероятности последовательности случайных величин влечет слабую сходимость последовательности соответствующих распределений.

17.8. Доказать, что из слабой сходимости распределений не вытекает, вообще говоря, сходимость по вероятности последовательности случайных величин.

17.9. Пусть $\xi_n \Rightarrow c = const$. Доказать, что тогда $\xi_n \xrightarrow{p} c$.

17.10. Пусть $\{F_n\}$ — последовательность вырожденных распределений, причём F_n сосредоточено в точке x_n. Доказать, что слабая сходимость $F_n \Rightarrow F$ влечет существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ и вырожденность распределения F в точке x. Доказать обратное.

17.11. Пусть $\{F_n\}$ — последовательность целочисленных распределений. Доказать, что $F_n \Rightarrow F$ тогда и только тогда, когда $F_n(\{i\}) \to F(\{i\})$ для каждого целого i.

17.12. Пусть F — мера Лебега на отрезке $[0, 1]$, а распределение F_n приписывает вероятность $1/n$ точкам, выбранным по одной в интервалах $\left[\dfrac{i-1}{n}, \dfrac{i}{n}\right)$, $i = 1, \ldots, n$. Доказать, что $F_n \Rightarrow F$.

17.13. Привести пример последовательности распределений $\{F_n\}$ и ограниченной функции g таких, что $F_n \Rightarrow F$, но не выполняется соотношение

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)F_n(dx) \to \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)F(dx).$$

17.14. Привести пример последовательности распределений $\{F_n\}$ и непрерывной функции g таких, что $F_n \Rightarrow F$, но не выполняется соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)F_n(dx) \to \int_{-\infty}^{\infty} g(x)F(dx).$$

17.15. Пусть $\{F_n\}$ — последовательность распределений в $\mathbf{R}$. Доказать, что следующие три условия эквивалентны:

1) $F_n \Rightarrow F$;

2) $\limsup\limits_{n\to\infty} F_n(B) \leqslant F(B)$ для любого замкнутого множества B;

3) $\liminf\limits_{n\to\infty} F_n(B) \geqslant F(B)$ для любого открытого множества B.

17.16. Пусть $\{F_n\}$ — последовательность распределений и пусть для любой ограниченной равномерно непрерывной функции g

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)F_n(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)F(dx).$$

Доказать, что $F_n \Rightarrow F$.

17.17. Пусть $\{F_n\}$ — последовательность распределений и пусть для любой финитной бесконечно дифференцируемой функции g

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)F_n(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)F(dx).$$

Доказать, что $F_n \Rightarrow F$.

17.18. Пусть $F, F_1, F_2, \ldots$ — абсолютно непрерывные распределения с плотностями $p, p_1, p_2, \ldots$ соответственно. Доказать, что если $p_n(x) \to p(x)$ при $n \to \infty$ равномерно на любом компакте, то $F_n \Rightarrow F$. Верно ли обратное?

17.19. Пусть ξ_n — независимые одинаково распределённые случайные величины с конечной дисперсией. Доказать, что

$$\frac{\max(\xi_1, \ldots, \xi_n)}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.$$

17.20. Пусть $\xi_1, \xi_n, \ldots$ — независимые случайные величины, каждая из которых имеет показательное распределение с параметром 1. Положим $\zeta_n = \max(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

а) Найти предельное распределение $n^\gamma \zeta_n$ при $\gamma < 0$.

б) Найти такие постоянные a_n, что законы распределения $\zeta_n - a_n$ стремятся к невырожденному предельному закону.

17.21. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые случайные величины, каждая из которых имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Положим

$\zeta_n = \min(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

а) Найти предельное распределение $n^\gamma \zeta_n$ при $\gamma \in \mathbf{R}$.

б) Найти такие постоянные a_n, что законы распределения $\zeta_n - a_n$ стремятся к невырожденному предельному закону.

17.22. Пусть ξ_1, ξ_2, ... — независимые одинаково распределённые случайные величины с непрерывной функцией распределения F. Положим $M_n = \max(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и $\zeta_n = n(1 - F(M_n))$. Найти предельное распределение ζ_n.

§ 18. Сходимость средних и в среднем

Говорят, что последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ *сходится в среднем порядка* $\alpha > 0$ к случайной величине ξ, если $\mathbf{E}|\xi_n - \xi|^\alpha \to 0$ при $n \to \infty$.

Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ называется *равномерно интегрируемой*, если $\sup\limits_n \mathbf{E}\{|\xi_n|; |\xi_n| > x\} \to 0$ при $x \to \infty$.

18.1. Доказать, что из сходимости в среднем какого-либо порядка вытекает сходимость по вероятности.

18.2. Пусть $\alpha > 0$. Доказать, что из сходимости с вероятностью 1 не вытекает, вообще говоря, сходимость в среднем порядка α.

18.3. Пусть $x \in \mathbf{R}$ и $\{\xi_n\}$ — последовательность случайных величин с конечными средними значениями такая, что $\mathbf{E}|\xi_n| \to \mathbf{E}|\xi|$ при $n \to \infty$. Выяснить, следует ли отсюда сходимость $\mathbf{E}|\xi_n + x| \to \mathbf{E}|\xi + x|$?

18.4. Пусть $|\xi_n| \leqslant c < \infty$ п. н. при всех n и $\xi_n \to \xi$ по вероятности при $n \to \infty$. Доказать, что $\mathbf{E}|\xi_n - \xi|^\alpha \to 0$ при любом $\alpha > 0$.

18.5. Пусть $\mathbf{E}|\xi_n - \xi|^\alpha \to 0$ при $n \to \infty$. Доказать, что если $0 < \beta < \alpha$, то $\mathbf{E}|\xi_n - \xi|^\beta \to 0$.

18.6. Пусть ξ, ξ_1, ξ_2, ... — неотрицательные случайные величины такие, что $\mathbf{E}\xi_n \to \mathbf{E}\xi$ и $\mathbf{P}\{\xi > \xi_n + \varepsilon\} \to 0$ при $n \to \infty$ для любого $\varepsilon > 0$. Доказать, что $\mathbf{E}|\xi_n - \xi| \to 0$.

18.7. Пусть $|\xi_n - \xi| \leqslant \eta_n$ п. н. для любого n, $\mathbf{E}|\xi| < \infty$ и $\mathbf{E}\eta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Доказать, что $\xi_n \to \xi$ по вероятности и $\mathbf{E}\xi_n \to \mathbf{E}\xi$.

18.8. Пусть $\alpha > 0$ и $\mathbf{E}|\xi_n|^\alpha < \infty$ при всех n. Доказать, что следующие утверждения эквивалентны:

1) $\xi_n \to \xi$ по вероятности и $\mathbf{E}|\xi_n|^\alpha \to \mathbf{E}|\xi|^\alpha < \infty$ при $n \to \infty$;

2) $\mathbf{E}|\xi_n - \xi|^\alpha \to 0$ при $n \to \infty$.

18.9. Пусть случайные величины ξ, ξ_1, ξ_2, ... таковы, что $\xi_n \Rightarrow \xi$ и $\mathbf{D}\xi_n \to \mathbf{D}\xi$. Доказать, что $\mathbf{E}\xi_n \to \mathbf{E}\xi$.

18.10. Пусть $\xi_n \Rightarrow \xi$. Доказать, что $\liminf\limits_{n\to\infty} \mathbf{D}\xi_n \geqslant \mathbf{D}\xi$.

18.11. Пусть последовательность $\{\xi_n\}$ случайных величин равномерно интегрируема. Доказать, что $\sup\limits_n \mathbf{E}|\xi_n| < \infty$.

18.12. Пусть последовательность $\{\xi_n\}$ случайных величин такова, что $\sup\limits_n \mathbf{E}|\xi_n|^{1+\delta} < \infty$ при некотором $\delta > 0$. Доказать, что эта последовательность равномерно интегрируема.

18.13. Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность случайных величин. Доказать, что следующие условия эквивалентны:

1) последовательность $\{\xi_n\}$ равномерно интегрируема;

2) существует неотрицательная функция $f(x)$ такая, что $f(x) \to \infty$ при $x \to \infty$ и $\sup\limits_n \mathbf{E}|\xi_n| f(|\xi_n|) < \infty$.

18.14. Пусть последовательность $\{\xi_n\}$ случайных величин такова, что $\mathbf{P}\{|\xi_n| \geqslant x\} \leqslant \mathbf{P}\{|\eta| \geqslant x\}$ для любого $x > 0$, причём $\mathbf{E}|\eta| < \infty$. Доказать, что $\{\xi_n\}$ равномерно интегрируема.

18.15. Пусть $\{\xi_n\}$ — равномерно интегрируемая последовательность случайных величин такая, что распределение ξ_n слабо сходится к распределению случайной величины ξ. Доказать, что существует $\mathbf{E}\xi$ и что $\mathbf{E}\xi_n \to \mathbf{E}\xi$ при $n \to \infty$.

18.16. Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность неотрицательных случайных величин с конечными средними значениями такая, что распределение ξ_n слабо сходится к распределению случайной величины ξ и $\mathbf{E}\xi_n \to \mathbf{E}\xi < \infty$ при $n \to \infty$. Доказать, что эта последовательность равномерно интегрируема.

18.17. Пусть ξ, ξ_1, ξ_2, ... — неотрицательные случайные величины такие, что $\xi_n \to \xi$ по вероятности и $\mathbf{E}\xi_n \to \mathbf{E}\xi < \infty$ при $n \to \infty$. Доказать, что $\mathbf{E}|\xi_n - \xi| \to 0$.

18.18. Пусть $\xi_n \Rightarrow \xi$ при $n \to \infty$. Доказать, что следующие утверждения эквивалентны:

1) последовательность $\{\xi_n\}$ равномерно интегрируема;

2) $\mathbf{E}|\xi_n| < \infty$, $\mathbf{E}|\xi| < \infty$ и при $n \to \infty$

$$\mathbf{E}\max(0, \xi_n) \to \mathbf{E}\max(0, \xi), \quad \mathbf{E}\min(0, \xi_n) \to \mathbf{E}\min(0, \xi).$$

18.19. Пусть независимые случайные величины ξ_1, ξ_2, ... одинаково распределены и имеют конечное среднее значение; положим $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Доказать, что последовательность случайных величин $\{S_n/n, n \geqslant 1\}$ равномерно интегрируема.

18.20. Пусть $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$, причём $\limsup\limits_{n\to\infty} \mathbf{E}|\xi_n| \leqslant \mathbf{E}|\xi| < \infty$. Доказать, что последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ равномерно интегрируема и $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{E}|\xi_n - \xi| \to 0$.

18.21. Пусть $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$, причём $\limsup\limits_{n\to\infty} \mathbf{E}\xi_n^2 \leqslant \mathbf{E}\xi^2 < \infty$. Доказать, что последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ равномерно интегрируема и $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{E}(\xi_n - \xi)^2 \to 0$.

ОТДЕЛ V
ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Всюду в настоящем отделе через $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ обозначается частичная сумма первых n элементов последовательности случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$. Пусть $\mathbf{E}\xi_n$ существует при любом n. Говорят, что для последовательности $\xi_1, \xi_2, \dots$ *выполнен закон больших чисел* (ЗБЧ), если при $n \to \infty$

$$\frac{S_n - \mathbf{E}S_n}{n} \xrightarrow{p} 0.$$

§ 19. Независимые одинаково распределённые слагаемые

В настоящем параграфе всюду предполагается, что $\{\xi_n\}$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин.

19.1. Пусть $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ — непрерывная функция. Доказать, что полиномы Бернштейна

$$B_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) C_n^i x^i (1-x)^{n-i}$$

стремятся к $f(x)$ при $n \to \infty$ равномерно по $x \in [0,1]$.

19.2. Пусть $f : [0,\infty) \to \mathbf{R}$ — непрерывная ограниченная функция, K — компакт в $[0,\infty)$. Доказать, что полиномы

$$B_n(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f\left(\frac{i}{n}\right) \frac{(nx)^i}{i!} e^{-nx}$$

стремятся к $f(x)$ при $n \to \infty$ равномерно по $x \in K$.

19.3. Пусть $f : [0,\infty) \to \mathbf{R}$ — непрерывная ограниченная функция, K — компакт в $[0,\infty)$. Доказать, что полиномы

$$B_n(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f\left(\frac{i}{n+1}\right) C_{n+i}^i \frac{x^i}{(1+x)^{n+i+1}}$$

стремятся к $f(x)$ при $n \to \infty$ равномерно по $x \in K$.

19.4. В условиях задач а) **19.1**; б) **19.2**; в) **19.3** доказать, что если функция f имеет непрерывную производную f', то производные полиномов $B_n(x)$ равномерно стремятся к $f'(x)$ при $n \to \infty$.

19.5. Пусть $f(x, y)$ — непрерывная в треугольнике $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 1$ функция. Доказать, что полиномы Бернштейна в $\mathbf{R}^2$

$$B_n(x, y) = \sum_{i,j=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} x^i y^j (1-x-y)^{n-i-j}$$

стремятся к $f(x, y)$ при $n \to \infty$ равномерно по x, y.

19.6. Пусть ξ_1 имеет стандартное нормальное распределение. Положим

$$\chi_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \quad \text{и} \quad \tau_n = \frac{\xi_{n+1}}{\sqrt{\chi_n^2/n}}.$$

Найти предельное при $n \to \infty$ распределение величины τ_n.

19.7. Пусть ξ_1 имеет стандартное распределение Коши. Будет ли выполнен закон больших чисел для последовательности $\{\xi_n\}$?

19.8. Пусть ξ_1 имеет стандартное нормальное распределение. Найти предельное при $n \to \infty$ распределение величины η_n/ζ_n, где

$$\eta_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\xi_{2i+1}}{\xi_{2i+2}} \quad \text{и} \quad \zeta_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2.$$

19.9. Пусть $\mathbf{E}\xi_1 = a$, $\mathbf{D}\xi_1 = \sigma^2$. Доказать, что последовательность случайных величин η_n, определяемых равенствами

$$\eta_n = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2},$$

сходится по вероятности. Найти предел.

19.10. Пусть случайная величина η_n имеет

а) распределение Пуассона с параметром n;

б) биномиальное распределение с параметрами n и p;

в) нормальное распределение с параметрами 0 и n.

Выяснить, существует ли предел при $n \to \infty$ отношения η_n/n.

§ 20. Независимые разнораспределённые слагаемые

В настоящем параграфе всюду предполагается, что случайные величины ξ_1, ξ_2, ... независимы в совокупности.

20.1. Пусть ξ_n принимает значения $\sqrt{n}$, $-\sqrt{n}$ и 0 с вероятностями

$1/2n$, $1/2n$ и $1-1/n$ соответственно. Будет ли выполнен ЗБЧ для последовательности $\{\xi_n\}$?

20.2. Пусть ξ_n принимает значения n, $-n$ и 0 с вероятностями

а) $1/2n^2$, $1/2n^2$ и $1-1/n^2$;

б) $1/2\sqrt{n}$, $1/2\sqrt{n}$ и $1-1/\sqrt{n}$;

в) $1/4$, $1/4$ и $1/2$;

г) 2^{-n}, 2^{-n} и $1-2^{-n}$

соответственно. Выполнен ли ЗБЧ для последовательности $\{\xi_n\}$?

20.3. Пусть ξ_n принимает значения 2^n и -2^n с вероятностью $1/2$ каждое. Выполнен ли ЗБЧ для последовательности $\{\xi_n\}$?

20.4. Пусть ξ_n принимает значения 2^n, -2^n и 0 с вероятностями $2^{-(2n+1)}$, $2^{-(2n+1)}$ и $1-2^{-2n}$ соответственно. Выполнен ли ЗБЧ для последовательности $\{\xi_n\}$?

20.5. Пусть ξ_n принимает значения 3^n, -3^n и 0 с вероятностями $3^{-(2n+2)}$, $3^{-(2n+2)}$ и $1-2\cdot 3^{-2n+2}$ соответственно. Выполнен ли ЗБЧ для последовательности $\{\xi_n\}$?

20.6. Пусть ξ_n принимает значения 1 и -1 с вероятностями $(1-2^{-n})/2$ и значения 2^n и -2^n с вероятностями 2^{-n-1}. Доказать, что для последовательности $\{\xi_n\}$ выполнен ЗБЧ.

20.7. Пусть ξ_n принимает значения n^λ и $-n^\lambda$ с вероятностями $1/2$. Выяснить, при каких значениях λ для последовательности $\{\xi_n\}$ выполнен ЗБЧ.

20.8. Пусть ξ_n принимает $2n+1$ значений $0, \pm L_n, \pm 2L_n, \ldots, \pm nL_n$ с вероятностью $1/(2n+1)$ каждое. Найти условия для констант L_n, обеспечивающие выполнение ЗБЧ для последовательности $\{\xi_n\}$.

20.9. Пусть ξ_n принимает значения a_n, $-a_n$, и 0 с вероятностями p_n, p_n и $1-2p_n$ соответственно. Найти условия на константы a_n и p_n, обеспечивающие выполнение ЗБЧ для последовательности $\{\xi_n\}$.

20.10. Если n — точный квадрат, то случайная величина ξ_n принимает значения $-\sqrt{n}$ и $\sqrt{n}$ с вероятностью $1/2$ каждое; в остальных случаях ξ_n принимает значения -1 и 1 с вероятностью $1/2$ каждое. Выполнен ли ЗБЧ для последовательности $\{\xi_n\}$?

20.11. Пусть ξ_n имеет распределение Пуассона с параметром α_n, причём

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \to \alpha < \infty, \quad n \to \infty.$$

Выполнен ли ЗБЧ для последовательности $\{\xi_n\}$?

20.12. Пусть $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ — две последовательности, в каждой из которых случайные величины независимы. Предположим, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\xi_n \neq \eta_n\}$$

сходится. Доказать, что если $\mathbf{E}\xi_n = \mathbf{E}\eta_n$ при каждом n и ЗБЧ выполнен для последовательности $\{\xi_n\}$, то он выполнен и для последовательности $\{\eta_n\}$.

20.13. Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин, $\{a_n\}$ — ограниченная последовательность неотрицательных чисел. Можно ли утверждать, что если ЗБЧ выполнен для последовательности $\{\xi_n\}$, то он выполнен и для последовательности $\{\eta_n\}$, где $\eta_n = a_n\xi_n$?

20.14. Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность независимых случайных величин, причём ξ_n равномерно распределена на отрезке $[-n, n]$. Выполнен ли ЗБЧ для последовательности $\{\xi_n\}$?

20.15. Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность независимых случайных величин, причём ξ_n равномерно распределена на отрезке $[-n^\alpha, n^\alpha]$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Выяснить, при каких значениях α для последовательности $\{\xi_n\}$ будет выполнен ЗБЧ.

20.16. Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность независимых случайных величин, причём ξ_n имеет биномиальное распределение с параметрами n и $1/n^\alpha$, где $\alpha > 0$. Выяснить, при каких значениях α для последовательности $\{\xi_n\}$ будет выполнен ЗБЧ.

§ 21. Зависимые слагаемые

21.1. Пусть ξ — случайная величина и случайная последовательность ξ_n определяется равенствами $\xi_n = \xi$. Удовлетворяет ли последовательность $\{\xi_n\}$ ЗБЧ?

21.2. Игральная кость A имеет четыре красных и две белых грани, а кость B — две красных и четыре белых грани. *Один раз* бросается монета. Если выпал герб, то далее все время бросается кость A, если решка — только кость B. Положим $\xi_n = 1$, если при n-ом бросании кости выпала красная грань, и $\xi_n = 0$ — в противном случае. Показать, что ЗБЧ для последовательности $\{\xi_n\}$ не выполнен.

21.3. Проводятся испытания Бернулли с вероятностью успеха p. Положим $\xi_n = 1$, если n-е и $(n+1)$-е испытания закончились успехом, и $\xi_n = 0$ иначе. Выполнен ли для последовательности $\{\xi_n\}$ ЗБЧ?

21.4. Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность случайных величин такая, что $\mathbf{D}\xi_n \leqslant c < \infty$, и ξ_n не зависит от ξ_m, если $|n-m| > 1$. Доказать, что для последовательности $\{\xi_n\}$ выполнен ЗБЧ.

21.5. Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность случайных величин такая, что $\mathbf{D}\xi_n \leqslant c < \infty$, а ковариации отрицательны. Доказать, что для последовательности $\{\xi_n\}$ выполнен ЗБЧ.

21.6. Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность случайных величин такая, что $\mathbf{D}\xi_n \leqslant c < \infty$, а ковариации $r_{ij} = \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j)$ удовлетворяют условию $r_{ij} \to 0$ равномерно при $|i-j| \to \infty$. Доказать, что для последовательности $\{\xi_n\}$ выполнен ЗБЧ.

21.7. Доказать, что если $|S_n| < cn$, а $\mathbf{D}S_n > \alpha n^2$, то ЗБЧ для последовательности $\{\xi_n\}$ не выполнен.

21.8. Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин с конечной ненулевой дисперсией. Доказать, что для последовательности $\{S_n\}$ ЗБЧ не выполнен.

21.9. Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин с конечной дисперсией. Доказать выполнение ЗБЧ для последовательности $\{a_n S_n\}$, если $a_n\sqrt{n} \to 0$ при $n \to \infty$.

21.10. Урна содержит b черных и r красных шаров. Случайно извлекается шар. Он возвращается обратно, и, кроме того, добавляется c шаров одного с ним цвета. Производится новое случайное извлечение из урны (теперь содержащей $b+r+c$) шаров, и описанная процедура повторяется. Положим случайную величину ξ_n равной 1 или 0 в зависимости от того, был ли n-й извлеченный шар черным или красным. Доказать, что ЗБЧ для последовательности $\{\xi_n\}$ не выполнен.

21.11. Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность случайных величин, для которой выполнен закон больших чисел. Обязан ли выполняться ЗБЧ для последовательности $\{|\xi_n|\}$?

21.12. Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями. Вытекает ли из сходимости $\xi_n \xrightarrow{p} 0$ выполнение ЗБЧ для последовательности $\{\xi_n\}$?

21.13. Пусть случайная величина ξ_1 равномерно распределена на множестве $S = \{1, 2, \ldots, s\}$ и $f : S \to S$ — взаимно-однозначная функция. Доказать, что случайная последовательность, определяемая равенствами $\xi_n = f(\xi_{n-1})$, стационарна. Выяснить, при каких условиях на f последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет ЗБЧ?

21.14. Пусть случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$ и α — иррациональное число. Доказать, что случайная последовательность, определяемая равенствами $\xi_n = \xi + n\alpha \pmod 1$, стационарна. Удовлетворяет ли последовательность $\{\xi_n\}$ ЗБЧ?

21.15. Пусть случайный вектор (ξ_1, η_1) имеет равномерное распределение в единичном квадрате. Определим функцию f равенствами

$$f(x, y) = \begin{cases} (2x, 1/2), & \text{если } 0 \leqslant x < 1/2, \\ (2x, (y+1)/2), & \text{если } 1/2 \leqslant x < 1. \end{cases}$$

Положим $(\xi_n, \eta_n) = f(\xi_{n-1}, \eta_{n-1})$. Доказать, что случайная последовательность (ξ_n, η_n) стационарна. Удовлетворяет ли эта последовательность ЗБЧ?

ОТДЕЛ VI

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

§ 22. Центральная предельная теорема

Всюду в настоящем параграфе через $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ обозначается частичная сумма первых n элементов последовательности случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$. Пусть $\mathbf{E}\xi_n^2$ существует при любом n. Говорят, что для последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *выполнена центральная предельная теорема* (ЦПТ), если распределения случайных величин

$$\frac{S_n - \mathbf{E}S_n}{\sqrt{\mathbf{D}S_n}}$$

слабо сходятся при $n \to \infty$ к стандартному нормальному закону.

Во всех задачах настоящего параграфа $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — взаимно независимые случайные величины.

22.1. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ имеют одинаковое невырожденное распределение с конечной дисперсией. Доказать, что для любых a и b

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{a \leqslant S_n \leqslant b\} = 0.$$

22.2. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ имеют одинаковое невырожденное распределение с конечной дисперсией. Доказать, что для любого b предел

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{S_n < b\}$$

равен либо 0, либо 1, либо 1/2. Указать условия, при которых имеет место каждая из указанных ситуаций.

22.3. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ имеют одинаковое невырожденное распределение с нулевым средним значением и с конечной дисперсией. Доказать, что для любого b предел

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\left|\frac{S_n}{n^\alpha}\right| < b\right\}$$

равен 0 при $\alpha < 1/2$ и 1 при $\alpha > 1/2$.

22.4. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ имеют одинаковое невырожденное распределение с нулевым средним значением и с конечной дисперсией. Найти

$\mathbf{D}\xi_1$, если

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} > 1\right\} = \frac{1}{3}.$$

22.5. Пусть ξ_n имеет равномерное на отрезке $[a_n-1, a_n+1]$ распределение, причём $\sum\limits_n |a_n| < \infty$. Найти

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{0 < \frac{S_n}{\sqrt{n}} < 1\right\}.$$

22.6. Пусть ξ_n принимает значения $\sqrt{n}$, $-\sqrt{n}$ и 0 с вероятностями $1/2n$, $1/2n$ и $1-1/n$ соответственно. Будет ли выполнена ЦПТ для последовательности $\{\xi_n\}$?

22.7. Пусть ξ_n принимает значения n, $-n$ и 0 с вероятностями

а) $1/2n^2$, $1/2n^2$ и $1-1/n^2$; в) $1/4$, $1/4$ и $1/2$;

б) $1/2\sqrt{n}$, $1/2\sqrt{n}$ и $1-1/\sqrt{n}$; г) 2^{-n}, 2^{-n} и $1-2^{-n}$

соответственно. Выполнена ли ЦПТ для последовательности $\{\xi_n\}$?

22.8. Пусть ξ_n принимает значения 2^n и -2^n с вероятностью $1/2$ каждое. Выполнена ли ЦПТ для последовательности $\{\xi_n\}$?

22.9. Пусть ξ_n принимает значения 2^n, -2^n и 0 с вероятностями $2^{-(2n+1)}$, $2^{-(2n+1)}$ и $1-2^{-2n}$ соответственно. Выполнена ли ЦПТ для последовательности $\{\xi_n\}$?

22.10. Пусть ξ_n принимает значения 1 и -1 с вероятностью $(1-2^{-n})/2$ каждое и значения 2^n и -2^n с вероятностью 2^{-n-1} каждое. Доказать, что для последовательности $\{\xi_n\}$ выполнена ЦПТ.

22.11. Пусть ξ_n принимает значения n^λ и $-n^\lambda$ с вероятностью $1/2$ каждое. Выяснить, при каких значениях λ для последовательности $\{\xi_n\}$ выполнена ЦПТ.

22.12. Пусть ξ_n принимает $2n+1$ значений $0, \pm L_n, \pm 2L_n, \ldots, \pm nL_n$ с вероятностью $1/(2n+1)$ каждое. Найти условия для констант L_n, обеспечивающие выполнение ЦПТ для последовательности $\{\xi_n\}$.

22.13. Пусть ξ_n принимает значения a_n, $-a_n$, и 0 с вероятностями p_n, p_n и $1-2p_n$ соответсвенно. Найти условия для констант a_n и p_n, обеспечивающие выполнение ЦПТ для последовательности $\{\xi_n\}$.

22.14. Пусть, когда n — точный квадрат, ξ_n принимает значения $-\sqrt{n}$ и $\sqrt{n}$ с вероятностью $1/2$ каждое, при остальных n величина ξ_n принимает значения -1 и 1 с вероятностью $1/2$ каждое. Выполнена ли ЦПТ для последовательности $\{\xi_n\}$?

22.15. Пусть случайная величина η_n имеет распределение Пуассона с параметром n. Выяснить, существует ли предел при $n\to\infty$ отношения $(\eta_n - n)/\sqrt{n}$?

22.16. Доказать, что при $n \to \infty$

$$e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \to \frac{1}{2}.$$

22.17. Пусть случайная величина η_n имеет биномиальное распределение с параметрами n и $1/2$. Выяснить, существует ли предел при $n \to \infty$ отношения $(2\eta_n - n)/\sqrt{n}$?

22.18. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ одинаково распределены, причём $\mathbf{E}\xi_1 = 0$ и $\mathbf{D}\xi_1 = 1$. Найти предельное распределение случайных величин

$$\eta_n = \sqrt{n}\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2} \quad \text{и} \quad \zeta_n = \frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{\sqrt{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2}}.$$

22.19. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ имеют распределение Пуассона с параметром λ. Существует ли слабый предел при $n \to \infty$ выражения

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (\xi_{2i-1} - \xi_{2i})?$$

22.20. Пусть ξ и η — независимые одинаково распределённые случайные величины с конечной дисперсией. Доказать, что если величины $\xi + \eta$ и $\xi - \eta$ независимы, то ξ и η имеют нормальное распределение (возможно, вырожденное).

22.21. Пусть ξ и η — независимые одинаково распределённые случайные величины с нулевым средним значением и конечной дисперсией. Используя ЦПТ доказать, что если ξ и $(\xi + \eta)/\sqrt{2}$ имеют одинаковое распределение, то это распределение — нормальное.

22.22. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ одинаково распределены, причём $\mathbf{E}\xi_1 = 0$ и $\mathbf{D}\xi_1 = \sigma^2 > 0$. Сходятся ли по вероятности при $n \to \infty$ величины

$$\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{\sqrt{n}}?$$

§ 23. Численные задачи на использование центральной предельной теоремы и теоремы Пуассона

Пусть $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, где $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые случайные величины, имеющие одинаковое распределение со средним значением a и дисперсией $\sigma^2 \in (0, \infty)$. Тогда выполнена *центральная предельная теорема* (ЦПТ), т. е. для любого вещественного x имеет место сходимость

$$\mathbf{P}\left\{\frac{S_n - an}{\sqrt{n\sigma^2}} < x\right\} \to \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy \equiv \Phi(x) \text{ при } n \to \infty.$$

Пусть независимые случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ принимают значения 1 и 0 с вероятностями p и $1-p$ соответственно, причём $p \leqslant 1/2$. В этом случае при сравнительно больших значениях $\lambda = np$ (обычно при $\lambda > 9$) используется нормальное приближение

$$\mathbf{P}\left\{S_n \leqslant k\right\} \approx \Phi\left(\frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right),$$

а при малых значениях λ — *приближение Пуассона*

$$\mathbf{P}\left\{S_n \leqslant k\right\} \approx \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}.$$

Таблицы нормального распределения и распределения Пуассона см. в Приложениях.

23.1. Известно, что левши составляют в среднем 1%. Оценить вероятность того, что по меньшей мере четверо левшей окажется среди

а) 200 человек; б) 10000 человек.

23.2. В некоторой группе людей дальтоники составляют 1%. Как велика должна быть случайная выборка, чтобы вероятность присутствия в ней хотя бы одного дальтоника была не меньше 0,95?

23.3. В задаче **23.2** найти вероятность того, что среди 100 человек

а) нет дальтоников; б) дальтоников два или больше.

23.4. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,001. Для поражения цели необходимо не менее двух попаданий. Произведено 5000 выстрелов. Найти вероятность поражения цели.

23.5. Известно, что вероятность рождения мальчика приблизительно равна 0,515. Какова вероятность того, что среди 10 тысяч новорожденных число мальчиков будет не больше, чем девочек?

23.6. В стране насчитывается 10 млн. избирателей, из которых 5,5 млн. принадлежит к партии A, и 4,5 млн. принадлежит к партии B. Назначаются жребием 20000 выборщиков. Какова вероятность того, что большинство выборщиков окажется сторонниками партии B?

23.7. Среди семян пшеницы 0,6% семян сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 1000 семян обнаружить не менее 3 семян сорняков; не более 16 семян сорняков; ровно 6 семян сорняков?

23.8. Книга в 500 страниц содержит 50 опечаток. Оценить вероятность того, что на случайно выбранной странице не менее 3 опечаток.

23.9. Для лица, дожившего до 20-летнего возраста, вероятность смерти на 21-м году жизни равна 0,006. Застрахована группа в 10000 человек 20-летнего возраста, причём каждый застрахованный внес 1 рубль 20 копеек страховых взносов за год. В случае смерти застрахованного страховое учреждение выплачивает наследникам 100 рублей. Какова вероятность, что:

а) к концу года страховое учреждение окажется в убытке;

б) его доход превысит 6000 рублей; 4000 рублей?

23.10. Вероятность выпуска сверла повышенной хрупкости (брак) равна 0,02. Сверла укладываются в коробки по 100 штук. Чему равна вероятность того, что:

а) в коробке не окажется бракованных сверл;

б) число бракованных сверл окажется не более 2?

Какое наименьшее количество сверл нужно класть в коробку для того, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,9, в ней было не менее 100 исправных?

23.11. Сколько изюминок в среднем должны содержать калорийные булочки для того, чтобы вероятность наличия в булочке хотя бы одной изюминки была не менее 0,99?

23.12. Театр, вмещающий 1000 человек, имеет два разных входа. Около каждого входа имеется свой гардероб. Сколько мест должно быть в каждом гардеробе для того, чтобы в среднем в 99 случаях из 100 все зрители могли раздеться в гардеробе того входа, через который они вошли? Предполагается, что зрители приходят парами и каждая пара независимо от других выбирает с вероятностью $1/2$ любой из входов. На сколько можно будет сократить число мест в гардеробе, если зрители будут приходить поодиночке и также независимо друг от друга с равной вероятностью выбирать любой из входов?

23.13. В поселке 2500 жителей. Каждый из них примерно 6 раз в месяц ездит на поезде в город, выбирая дни поездок по случайным мотивам независимо от остальных. Какой наименьшей вместимостью должен обладать поезд, чтобы он переполнялся в среднем не чаще одного раза в 100 дней (поезд ходит раз в сутки).

23.14. Некоторая машина состоит из 10 тысяч деталей. Каждая деталь независимо от других деталей может оказаться неисправной с вероятностью p_i, причём для $n_1 = 1000$ деталей $p_1 = 0,0003$, для $n_2 = 2000$ деталей $p_2 = 0,0002$ и для $n_3 = 7000$ деталей $p_3 = 0,0001$. Машина не работает, если в ней неисправны хотя бы две детали. Найти вероятность того, что машина не будет работать.

23.15. Для проверки влияния нового лекарства на кровяное давление у 100 пациентов было измерено давление до и после приема лекарства. При этом оказалось, что в 32 случаях давление после приема лекарства повысилось, а в 68 случаях понизилось. Можно ли считать установленным, что это лекарство влияет на кровяное давление? Какова вероятность, что чисто случайные колебания давления вызовут не меньшее отклонение от 50?

23.16. Игральная кость брошена 1000 раз. Найти пределы, в которых с вероятностью не менее 0,99 лежит суммарное число очков.

23.17. Игральная кость подбрасывается до тех пор, пока общая сумма выпавших очков не превысит 700. Оценить вероятность того, что для этого потребуется более 210 бросаний; менее 180 бросаний; от 190 до 210 бросаний?

23.18. Оценить вероятность того, что число выпадений единицы при 12000 бросаний игральной кости заключено между 1900 и 2150.

23.19. При выстреле по мишени стрелок попадает в десятку с вероятностью 0,5; в девятку — 0,3; в восьмерку — 0,1; в семерку — 0,05; в шестерку — 0,05. Стрелок сделал 100 выстрелов. Какова вероятность того, что он набрал более 980 очков; более 950 очков?

23.20. При составлении статистического отчета надо сложить 10^4 чисел, каждое из которых округлено с точностью до 10^{-m}. Предполагая, что ошибки, возникающие при округлении чисел, взаимно независимы и равномерно распределены в интервале $(-0,5 \cdot 10^{-m}, 0,5 \cdot 10^{-m})$, найти пределы, в которых с вероятностью не менее 0,997 будет лежать суммарная ошибка.

23.21. Мера длины фут, как видно из названия, — длина ступни. Но, как известно, размеры ног бывают разные. Немцы в XVI в. выходили из положения следующим способом. В воскрестный день ставили рядом 16 первых вышедших из церкви мужчин. Сумма длин их левых ступней делилась на 16. Средняя длина и была «правильным и законным футом». Известно, что размер стопы взрослого мужчины — случайная величина, имеющая нормальное распределение со средним значением 262,5 мм и квадратичным отклонением $\sigma = 12$ мм. Найти вероятность того, что два «правильных и законных» значения фута, определенных по двум различным группам мужчин, отличаются более чем на 5 мм. Сколько нужно было бы взять мужчин для того, чтобы с вероятностью не менее 0,99 средний размер их ступней отличался от 262,5 мм менее чем на 0,5 мм?

23.22. На улице стоит человек и продает газеты. Предположим, что каждый из проходящих мимо людей покупает газету с вероятностью $1/3$. Пусть ξ означает число людей, прошедших мимо продавца за время, пока он продавал первые 100 экземпляров газет. Найти приближенное распределение ξ.

23.23. Студент получает на экзамене 5 с вероятностью 0,2; 4 с вероятностью 0,4; 3 с вероятностью 0,3 и 2 с вероятностью 0,1. За время обучения он сдает 40 экзаменов. Найти пределы, в которых с вероятностью 0,95 лежит средний балл студента.

23.24. Урожайность куста картофеля равна 0 кг с вероятностью 0,1; 1 кг с вероятностью 0,2; 1,5 кг с вероятностью 0,2; 2 кг с вероятностью 0,3; 2,5 кг с вероятностью 0,2. На участке посажено 900 кустов. В каких пределах с вероятностью 0,95 будет находиться урожай? Какое наименьшее число кустов надо посадить, чтобы с вероятностью не менее 0,975 урожай был не менее тонны?

23.25. Имеется 1000 параллепипедов, у каждого из которых длина каждой стороны может принимать значения $1/2$ и 1 с вероятностями 0,3 и 0,7 соответственно. Пусть V — суммарный объем этих параллепипедов. Оценить вероятность того, что $580 < V < 605$.

23.26. Рыбак забросил спиннинг 100 раз. Какова вероятность того, что он поймал хотя бы одну рыбу, если одна рыба приходится в среднем на 200 забрасываний?

23.27. Предположим, что при наборе книги существует постоянная вероятность $p = 0,0001$ того, что любая буква будет набрана неправильно. После набора гранки прочитывает корректор, который обнаруживает каждую опечатку с вероятностью $q = 0,9$. После корректора — автор, обнаруживающий каждую из оставшихся опечаток с вероятностью $r = 0,5$. Найти вероятность того, что в книге со 100 тысячами печатных знаков останется после этого не более 10 незамеченных опечаток.

23.28. Найти вероятность того, что среди 10000 случайных цифр цифра 7 появится не более 968 раз.

23.29. Сколько случайных цифр нужно взять, чтобы вероятность появления среди них цифры 7 была не меньше $9/10$?

23.30. Монета брошена 1000 раз. При каком k число выпадений герба лежит между 490 и k с вероятностью $1/2$.

23.31. При $n = 14400$ бросаниях монеты герб выпал 7428 раз. Как вероятно столь большое или большее уклонение числа выпадений герба от $n/2$?

23.32. В жюри, состоящем из нечётного числа $n = 2m + 1$ членов, каждый независимо от других принимает правильное решение с вероятностью $p = 0,7$. Каково минимальное число членов жюри, при котором решение, принятое большинством голосов, будет справедливым с вероятностью не меньшей, чем 0,99?

23.33. Берутся два сосуда A и B, каждый из которых имеет объем 1 дм^3 и содержит $2,7 \cdot 10^{22}$ молекул газа. Эти сосуды приведены в соприкосновение так, что между ними происходит свободный обмен молекулами. Чему равна вероятность того, что через одни сутки в одном из сосудов молекул окажется по меньшей мере на одну десятимиллиардную часть больше, чем в другом?

ОТДЕЛ VII
ЦЕПИ МАРКОВА

§ 24. Переходные вероятности

Пусть случайные величины ξ_0, ξ_1, ... принимают значения в не более чем счётном множестве $\{x_1, x_2, \ldots\}$, элементы которого называются *состояниями.* Последовательность $\xi_0, \xi_1, \ldots$ называется *цепью Маркова*, если для любого момента времени n и для любых состояний x_{i_0}, ..., x_{i_n} выполняется равенство

$$\mathbf{P}\{\xi_n = x_{i_n} | \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}, \ldots, \xi_0 = x_{i_0}\} = \mathbf{P}\{\xi_n = x_{i_n} | \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}}\}.$$

Цепь Маркова $\{\xi_n\}$ называется однородной по времени с матрицей переходных вероятностей $||p_{ij}||$, если для любого n и для любых x_i и x_j

$$\mathbf{P}\{\xi_n = x_j | \xi_{n-1} = x_i\} = p_{ij}.$$

Матрица переходных вероятностей $||p_{ij}||$ является стохастической, т. е. её элементы неотрицательны и $\sum\limits_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$ для любого i.

В задачах **24.1–24.6** найти матрицы переходных вероятностей для марковских цепей, описывающих следующие процессы.

24.1. Пусть бросается монета, причём вероятность выпадения решетки равна p. Определим ξ_n как разность между числом выпадений решетки и числом выпадений герба после n бросаний монеты.

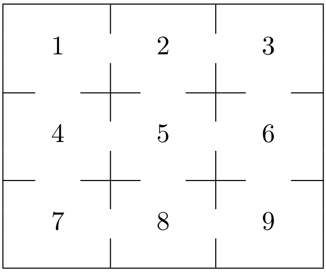
24.2. Бросается правильная игральная кость. Положим ξ_n равной наибольшему из чисел, выпавших в первых n бросаниях.

24.3. В двух урнах размещены N черных и N белых шаров так, что каждая содержит по N шаров. В каждый момент времени n случайно выбирают по одному шару из каждой урны и меняют их местами. Через ξ_n обозначается число белых шаров в первой урне в момент времени n.

24.4. Находящаяся на прямой частица движется по этой прямой под влиянием случайных толчков, происходящих в целочисленные моменты времени. Частица может находится в точках с целочисленными координатами 0, 1, ..., N; в точках 0 и N находятся отражающие стенки. Каждый толчок переводит частицу вправо с вероятностью p и влево с вероятностью $1-p$, если только частица не находится у стенки. Если же частица находится у стенки, любой толчок переводит её на единицу внутрь промежутка между стенками. Через ξ_n обозначается координата частицы после n-го толчка.

24.5. Находящаяся на прямой частица движется по этой прямой под влиянием случайных толчков, происходящих в целочисленные моменты времени. Частица может находится в точках с целочисленными координатами 0, 1, …, N; в точках 0 и N находятся поглощающие стенки. Каждый толчок переводит частицу вправо с вероятностью p и влево с вероятностью $1-p$, если только частица не находится у стенки. Если же частица находится у стенки, она навсегда остается там. Через ξ_n обозначается координата частицы после n-го толчка.

24.6. Белую крысу помещают в лабиринт, изображенный на рисунке. Крыса передвигается из ячейки в ячейку случайным образом, т. е. если ячейка имеет k выходов, то крыса выбирает каждый из них с вероятностью $1/k$. В каждый момент времени крыса обязательно переходит в одну из соседних ячеек. Через ξ_n обозначается номер ячейки, в которой находится крыса после n-го перехода.



24.7. К рабочему, стоящему на контроле, через минуту поступают изделия, причём каждое из них независимо от других может оказаться дефектным с вероятностью p. Поступившие изделия рабочий одно за другим проверяет, затрачивая на проверку каждого изделия одну минуту. Если же изделие оказывается дефектным, то рабочий прекращает проверку других изделий и исправляет дефектное. На это он тратит еще 5 минут. Является ли цепью Маркова величина ξ_n — число изделий, скопившихся у рабочего через n минут после начала работы?

24.8. Пусть ξ_n определено, как в предыдущей задаче, а ν_n — время, уже затраченное рабочим на проверку и ремонт изделия, которое в данный момент обслуживает рабочий. Является ли цепью Маркова вектор (ξ_n, ν_n)?

24.9. Точки A_1, …, A_n представляют собой вершины правильного n-угольника. Некоторая частица совершает случайное блуждание по точкам $A_1, \ldots, A_n$. Является ли цепью Маркова последовательность положений частицы, если частица

а) совершает детерминированное движение по часовой стрелке;

б) в начальный момент случайно выбирает направление по или против часовой стрелки и далее постоянно движется в выбранном направлении;

в) из любой точки A_i, $i \neq 1$, с вероятностью p сдвигается по часовой стрелке, а с вероятностью $1-p$ — против часовой стрелки в соседнюю точку. Попадая в точку A_1, частица возвращается в ту точку, из которой она пришла в A_1.

24.10. Частица совершает случайное блуждание в плоскости по целочисленным точкам (i,j) таким, что $0 \leqslant i, j \leqslant N$. Из любой внутренней точки указанного квадрата частица с равными вероятностями, независимо от её предыдущего движения, переходит в одну из соседних точек. Является ли цепью Маркова последовательность положений частицы, если при выходе на границу дальнейшее движение частицы подчиняется правилу:

а) движение частицы по границе квадрата детерминированно по часовой стрелке;

б) частица возвращается в ту точку, из которой она вышла на границу;

в) частица выбирает случайным образом направление на границе и движется по границе в выбранном направлении.

24.11. В начальный момент времени в урне имеется n_0 белых и m_0 черных шаров. Через каждую единицу времени из урны по схеме выбора без возвращения извлекается один шар. Пусть n_k — число белых и m_k — число черных шаров в урне в момент времени k. Какие из указанных ниже последовательностей образуют цепь Маркова, а какие нет:

а) n_k;

б) $n_k - m_k$;

в) $n_k + m_k$;

г) пара (n_k, m_k);

д) $n_k - m_k + \dfrac{1}{n_k + m_k + 2}$.

24.12. Электрон может находиться на одной из счётного множества орбит в зависимости от наличной энергии. Переход с i-й орбиты на j-ю происходит за одну секунду с вероятностью $c_i e^{-\alpha|i-j|}$. Найти:

а) постоянные c_i;

б) вероятности перехода за две секунды.

24.13. Пусть $\{\xi_n\}$ — простое случайное блуждание в $\mathbf{Z}$, т. е. цепь Маркова с переходными вероятностями $p_{i,i+1} = p$ и $p_{i,i-1} = 1-p$. Найти вероятности перехода за n шагов.

24.14. Пусть $\{\xi_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ — стационарная последовательность, члены которой принимают лишь значения 0 и 1. Положим

$$\eta_n = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\xi_{n-i}}{2^{i+1}}.$$

Доказать, что $\{\eta_n\}$ является цепью Маркова. Найти её переходные вероятности, если:

а) случайные величины $\{\xi_n\}$ независимы;

б) случайные величины ξ_n и ξ_m независимы при $|n-m| \geqslant 2$.

24.15. Пусть ξ_0, ξ_1, ... — независимые случайные величины, принимающие значения 1 и -1 с вероятностью $1/2$ каждое. Доказать, что случайные величины $\eta_n = \dfrac{\xi_n + \xi_{n+1}}{2}$ не образуют цепь Маркова.

24.16. Пусть независимые случайные величины ξ_0, ξ_1, ... принимают значения 1 и -1 с вероятностями p и $1-p$ соответственно. Будут ли цепями Маркова следующие последовательности случайных величин:

а) $\eta_n = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n} \xi_i$;

б) $\eta_n = \xi_n \xi_{n+1}$;

в) $\eta_n = \prod\limits_{i=0}^{n} \xi_i$;

г) $\eta_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$?

24.17. Рассмотрим последовательность испытаний Бернулли. Положим $\xi_n = 1$, если испытания с номерами $n-1$ и n привели к успеху, и $\xi_n = 0$ иначе. Доказать, что случайные величины ξ_n не образуют цепь Маркова.

24.18. Пусть $\{\xi_n\}$ — стационарная цепь Маркова, принимающая лишь значения 0 и 1, с матрицей переходных вероятностей

$$P = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}, \ 0 < p < q < 1, \ q = 1 - p.$$

Положим $\eta_n = 1$, если $(\xi_n, \xi_{n-1}) = (1,1)$ или $(0,0)$, и $\eta_n = 0$ иначе. Доказать, что случайные величины $\{\eta_n\}$ независимы и одинаково распределены.

24.19. Всякая ли стохастическая матрица может быть матрицей вероятностей перехода за два шага некоторой цепи Маркова?

§ 25. Классификация состояний. Эргодичность цепей

Определить число состояний цепи Маркова, классы эквивалентности и периодичность различных состояний, если матрица переходных вероятностей равна

25.1. $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \end{pmatrix}$.

25.2. $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

25.3. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$.

25.4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$.

25.5. $\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 4/5 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$.

25.6. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 7/8 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/8 & 3/8 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

25.7. Дать классификацию состояний цепи Маркова с матрицей переходных вероятностей

$$\begin{pmatrix} p & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 1-p \\ p & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 1-p \end{pmatrix}.$$

Эргодичны ли цепи Маркова со следующими матрицами вероятностей перехода за один шаг:

25.8. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

25.9. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

25.10. $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

25.11. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

25.12. $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

25.13. Пусть $\{\xi_n\}$ — цепь Маркова со значениями в $\mathbf{Z}^+$ и с переходными вероятностями

$$p_{ij} = \begin{cases} \lambda^{j-i}e^{-\lambda}/(j-i)!, & \text{если } j \geqslant i, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Доказать, что цепь $\{\xi_n\}$ не имеет инвариантного распределения.

25.14. Пусть $\{\xi_n\}$ — случайное блуждание с отражением в точках 0 и N, т. е. цепь Маркова со значениями в $\{0,\ldots,N\}$ и с переходными вероятностями $p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = 1/2$ если $0 < i < N$, $p_{0,1} = p_{N,N-1} = 1$. Доказать, что цепь $\{\xi_n\}$ эргодична и найти её инвариантное распределение.

25.15. Рассмотрим процесс случайного блуждания на целочисленном отрезке $[0,N]$, где $p_{i,i+1} = 1 - p_{i,i-1} = p$ при $i = 1,\ldots,N-1$ и $p_{0,0} = p_{N,N} = 1$. Найти вероятность поглощения состояниями 0 или N, если начальным состоянием является k.

25.16. Пусть $P = ||p_{ij}||$ — матрица переходных вероятностей неприводимой цепи Маркова. Доказать, что если матрица P идемпотентна (т. е. $P = P^2$), то $p_{ij} = p_{jj}$ для всех i и j и цепь непериодична.

25.17. Доказать, что если число N состояний цепи Маркова конечно и состояние j достижимо из состояния i, то оно достижимо не более чем за $N-1$ шаг.

25.18. Доказать, что неприводимая цепь Маркова, у которой положителен хотя бы один диагональный элемент матрицы переходов, не может быть периодической.

25.19. Могут ли все состояния цепи Маркова с конечным числом состояний быть несущественными?

25.20. Могут ли все состояния цепи Маркова со счётным числом состояний быть несущественными?

25.21. Показать, что у неэргодичной цепи Маркова может существовать инвариантное распределение, причём единственное.

25.22. Рассмотрим неразложимую цепь Маркова со множеством состояний $\{0,1,2,\ldots\}$. Доказать, что для невозвратности цепи необходимо и достаточно, чтобы система уравнений

$$u_i = \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}u_j, \quad i \geqslant 1,$$

имела ограниченное решение, не равное тождественно постоянной.

25.23. Рассмотрим неразложимую цепь Маркова со множеством состояний $\{0,1,2,\ldots\}$. Доказать, что для возвратности цепи достаточно существования последовательности u_1, u_2, $\ldots$ такой, что $u_i \to \infty$ при

$i \to \infty$ и для всех $i \neq 0$

$$u_i \geqslant \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} u_j.$$

25.24. Рассмотрим неразложимую цепь Маркова со множеством состояний $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Доказать, что для положительной возвратности цепи необходимо и достаточно, чтобы система уравнений

$$u_j = \sum_{i=0}^{\infty} u_i p_{ij}, \quad j = 0, 1, \ldots,$$

имела не равное тождественно постоянной решение, для которого

$$\sum_{i=0}^{\infty} |u_i| < \infty.$$

25.25. Рассмотрим цепь Маркова ξ_n со значениями 0, 1, 2, ..., $m-1$ и с матрицей вероятностей перехода за один шаг

$$\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & \cdots & p_{m-1} \\ p_{m-1} & p_0 & \cdots & p_{m-2} \\ .. & .. & .. & .. \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_0 \end{pmatrix},$$

где $0 \leqslant p_i < 1$, $\sum p_i = 1$. Доказать, что при любом i вероятность $\mathbf{P}\{\xi_n = i\}$ сходится к $1/m$ при $n \to \infty$.

25.26. Рассмотрим цепь Маркова ξ_n со значениями 0, 1, 2, ... и с матрицей вероятностей перехода за один шаг

$$\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \ldots \\ 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

Выяснить условия возвратности и положительной возвратности состояния 0.

25.27. Рассмотрим цепь Маркова ξ_n со значениями 0, 1, 2, ... и с матрицей вероятностей перехода за один шаг

$$\begin{pmatrix} p_0 & 1-p_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ p_1 & 0 & 1-p_1 & 0 & 0 & \ldots \\ p_2 & 0 & 0 & 1-p_2 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

Выяснить условия возвратности и положительной возвратности состояния 0.

25.28. В условиях задачи **25.26** выяснить условия на вероятности $\{p_i\}$ и функцию $f : \{0, 1, 2, \ldots\} \to \mathbf{R}$, при которых для последовательности $f(\xi_n)$

а) выполнен закон больших чисел;

б) выполнена центральная предельная теорема.

25.29. В условиях задачи **25.27** выяснить условия на вероятности $\{p_i\}$ и функцию $f : \{0, 1, 2, \ldots\} \to \mathbf{R}$, при которых для последовательности $f(\xi_n)$

а) выполнен закон больших чисел;

б) выполнена центральная предельная теорема.

25.30. Доказать, что если собственное значение λ конечной стохастической матрицы по модулю равно 1, то $\lambda = \sqrt[n]{1}$, где n — натуральное число.

25.31. Доказать, что если конечная стохастическая матрица имеет два различных собственных значения, по модулю равных единице, то соответствующая цепь Маркова неэргодична.

25.32. Пусть ξ_n — эргодическая цепь Маркова со значениями 0, 1, 2, … и с финальными вероятностями $\{\pi_i\}_{i=0}^{\infty}$. Положим

$$\zeta_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{I}\{\xi_i = k\}.$$

Доказать, что $\zeta_n/n \to \pi_k$ по вероятности.

25.33. Пусть ξ_n — эргодическая цепь Маркова со значениями 0, 1, 2, … . Доказать, что для любых множеств A и B при $|n - m| \to \infty$ имеет место сходимость

$$|\mathbf{P}\{\xi_n \in A, \xi_m \in B\} - \mathbf{P}\{\xi_n \in A\}\mathbf{P}\{\xi_m \in B\}| \to 0.$$

25.34. Цепь Маркова ξ_n принимает значения на отрезке $[0, 1]$, причём если $\xi_n = x$, то ξ_{n+1} равномерно распределена на отрезке $[1 - x, 1]$. Является ли эта цепь эргодической? Если «да», найти инвариантное распределение цепи.

ОТДЕЛ VIII

УСЛОВНОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ. МАРТИНГАЛЫ

§ 26. Условное математическое ожидание

Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, ξ — случайная величина с конечным математическим ожиданием и $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{F}$ — некоторая σ-алгебра. *Условным математическим ожиданием* (*условным средним значением*) $\mathbf{E}\{\xi|\mathscr{A}\}$ случайной величины ξ относительно σ-алгебры $\mathscr{A}$ называется $\mathscr{A}$-измеримая случайная величина ζ такая, что $\mathbf{E}\{\zeta; A\} = \mathbf{E}\{\xi; A\}$ для любого $A \in \mathscr{A}$.

Условным математическим ожиданием $\mathbf{E}\{\xi|\eta\}$ случайной величины ξ относительно случайной величины η называется $\mathbf{E}\{\xi|\sigma(\eta)\}$, где $\sigma(\eta)$ — σ-алгебра, порождённая случайной величиной η.

26.1. Пусть $\mathscr{A}$ — алгебра, состоящая из двух элементов: $\varnothing$ и всего пространства Ω. Найти $\mathbf{E}\{\xi|\mathscr{A}\}$.

26.2. Двумерное распределение пары целочисленных случайных величин ξ и η задается с помощью таблицы

	$\xi = -1$	$\xi = 0$	$\xi = 1$
$\eta = -1$	$1/8$	$1/12$	$7/24$
$\eta = 1$	$5/24$	$1/6$	$1/8$

,

где в пересечении столбца $\xi = i$ и строки $\eta = j$ находится вероятность $\mathbf{P}\{\xi = i, \eta = j\}$. Найти:

а) $\mathbf{E}\{\xi|\eta\}$;
б) $\mathbf{E}\{\eta|\xi\}$;
в) $\mathbf{E}\{\xi|\eta^2\}$;
г) $\mathbf{E}\{\xi|\eta^3\}$;
д) $\mathbf{E}\{\eta|\xi^2\}$;
е) $\mathbf{E}\{\eta|\xi^3\}$.

26.3. Решить задачу **26.2**, если двумерное распределение случайных величин ξ и η задается с помощью таблицы

	$\xi = -2$	$\xi = 0$	$\xi = 1$
$\eta = -1$	$1/6$	$1/6$	$1/6$
$\eta = 2$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

.

26.4. Решить задачу **26.2**, если двумерное распределение случайных величин ξ и η задается с помощью таблицы

	$\xi=-1$	$\xi=0$	$\xi=1$
$\eta=-2$	$1/8$	$1/12$	$7/24$
$\eta=0$	$1/12$	$1/12$	$1/16$
$\eta=1$	$1/8$	$1/12$	$1/16$

26.5. На вероятностном пространстве $(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$, где $\Omega=[0,1]$, $\mathscr{F}$ — σ-алгебра борелевских подиножеств и $\mathbf{P}$ — мера Лебега, задана случайная величина ξ. Пусть $\mathscr{A}$ — σ-алгебра, порождённая множествами $[0,1/3)$, $\{1/3\}$ и $(1/3,1/2)$. Найти $\mathbf{E}\{\xi|\mathscr{A}\}$, если:

а) $\xi=\omega$;

б) $\xi=\sin\pi\omega$;

в) $\xi=\begin{cases}1, \ \omega\in[0,1/3],\\ 2, \ \omega\in(1/3,1];\end{cases}$

г) $\xi=1-\omega$;

д) $\xi=\omega^2$;

е) $\xi=\begin{cases}0, \ \omega\in[0,2/3],\\ 1, \ \omega\in(2/3,1].\end{cases}$

26.6. На вероятностном пространстве $(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$, где $\Omega=[0,1]$, $\mathscr{F}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств и $\mathbf{P}$ — мера Лебега, задана случайная величина $\xi=\omega$. Найти $\mathbf{E}\{\xi|\mathscr{A}\}$, если $\mathscr{A}$ —

а) σ-алгебра всех борелевских подмножеств отрезка $[0,1]$, симметричных относительно точки $1/2$;

б) σ-алгебра, порождённая множествами $[0,1/3]$ и $[1/3,2/3]$;

в) σ-алгебра, порождённая случайной величиной $\eta=\min\{2\omega,1\}$.

26.7. На вероятностном пространстве $(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$, где $\Omega=[0,1]$, $\mathscr{F}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств и $\mathbf{P}$ — мера Лебега, заданы случайные величины $\xi=\omega^2$ и

$$\eta=\begin{cases}-1, \ \omega<1/2,\\ 1, \quad \omega\geqslant 1/2.\end{cases}$$

Построить графики $\mathbf{E}\{\xi|\eta\}$ и $\mathbf{E}\{\xi|\eta^2\}$.

26.8. Пусть случайная величина ξ принимает не более n значений. Верно ли, что $\mathbf{E}\{\xi|\mathscr{A}\}$ также принимает не более n значений?

26.9. Обязана ли случайная величина $\mathbf{E}\{\xi|\mathscr{A}\}$ быть измеримой относительно $\sigma(\xi)$?

26.10. Пусть ξ и η — две независимые одинаково распределённые случайные величины с конечным математическим ожиданием. Найти $\mathbf{E}\{\xi|\xi+\eta\}$.

26.11. Верно ли следующее утверждение: если $\xi_n\to\xi$ почти наверное, то $\mathbf{E}\{\eta|\xi_n\}\xrightarrow{p}\mathbf{E}\{\eta|\xi\}$ для любой случайной величины η?

26.12. Пусть случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром 1, а $t>0$. Найти:

а) $\mathbf{E}\{\xi|\min(\xi,t)\}$; б) $\mathbf{E}\{\xi|\max(\xi,t)\}$.

26.13. Решить задачу **26.12**, если случайная величина ξ имеет равномерное распределение в отрезке $[0,2]$.

26.14. Пусть случайная величина ξ имеет стандартное нормальное распределение. Найти $\mathbf{E}\{\xi|\xi^2\}$.

26.15. Пусть независимые случайные величины ξ и η имеют стандартное нормальное распределение. Найти $\mathbf{E}\{\xi^2+\eta^2|\xi+\eta\}$.

26.16. Пусть независимые случайные величины ξ и η имеют геометрическое распределение с параметром p каждая. Найти условное распределение $\mathbf{P}\{\xi=k|\xi+\eta=n\}$.

26.17. Пусть независимые случайные величины ξ и η имеют распределение Пуассона с параметром λ каждая. Найти:

а) $\mathbf{E}\{\xi^2|\xi+\eta=k\}$;

б) условное распределение $\mathbf{P}\{\xi=k|\xi+\eta=n\}$.

26.18. Пусть случайные величины ξ и η независимы и имеют биномиальное распределение с параметрами m и p. Найти:

а) $\mathbf{E}\{\xi^2|\xi+\eta=6\}$;

б) условную функцию распределения $\mathbf{P}\{\xi<x|\xi+\eta=6\}$.

26.19. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины, имеющие равномерное распределение в отрезке $[0,1]$. Найти:

а) $\mathbf{E}\{\xi_1|\max(\xi_1,\ldots,\xi_n)\}$; б) $\mathbf{E}\{\xi_1|\min(\xi_1,\ldots,\xi_n)\}$.

26.20. Решить задачу **26.19**, если случайные величины ξ_k имеют экспоненциальное распределение с параметром 1.

26.21. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, имеющие равномерное распределение в отрезке $[0,1]$. Найти:

а) $\mathbf{E}\{\xi|\xi+\eta\}$; в) $\mathbf{E}\{\xi^2-\eta^2|\xi+\eta\}$;

б) $\mathbf{E}\{\xi-\eta|\xi+\eta\}$; г) $\mathbf{E}\{\xi|\xi+2\eta\}$.

26.22. Пусть $\mathbf{E}\xi^2<\infty$. Доказать, что случайная величина ξ измерима относительно σ-алгебры $\mathscr{A}$ тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{E}\{\xi-\mathbf{E}\{\xi|\mathscr{A}\}\}^2=0.$$

26.23. Пусть $\mathbf{E}\xi^2<\infty$ и $\mathbf{E}\eta^2<\infty$. Доказать, что если $\mathbf{E}\{\xi|\eta\}=\eta$ и $\mathbf{E}\{\eta|\xi\}=\xi$, то $\xi=\eta$ п. н.

26.24. Найти $\mathbf{E}\{\xi|\eta\}$, если совместная плотность случайного вектора (ξ,η) равна:

а) $p(x,y)=\begin{cases}4xy & \text{при } 0\leqslant x,y\leqslant 1,\\ 0 & \text{иначе;}\end{cases}$

б) $p(x,y)=\begin{cases}2ye^{-x}+2e^{-2x} & \text{при } x\geqslant 0, 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0 & \text{иначе;}\end{cases}$

в) $p(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1+9x^2y^2}{8} & \text{при } -1 \leqslant x, y \leqslant 1, \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases}$

г) двумерной нормальной плотности с коэффициентом корреляции ρ.

26.25. Пусть совместная плотность случайного вектора (ξ, η) равна

$$p(x,y) = \begin{cases} xe^{-x(y+1)} & \text{при } x, y \geqslant 0, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Найти:

а) одномерные (маргинальные) распределения ξ и η;

б) условные плотности ξ относительно η и η относительно ξ.

26.26. Пусть случайная величина ξ имеет распределение Пуассона с параметром λ, а распределение случайной величины $\mathbf{E}\{\eta|\xi\}$ имеет нормальную плотность с нулевым средним значением и дисперсией ξ.

а) Найти характеристическую функцию случайной величины η.

б) Доказать, что распределение случайной величины η не имеет плотности.

в) Доказать, что $\eta/\sqrt{\lambda}$ слабо сходится при $\lambda \to \infty$ к стандартному нормальному закону.

26.27. Пусть случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром 1, а случайная величина $\mathbf{E}\{\eta|\xi\}$ имеет распределение Пуассона с параметром ξ. Найти распределение случайной величины η.

26.28. Пусть ξ_1, ξ_2, ... — независимые одинаково распределённые случайные величины с конечным математическим ожиданием, а $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Пусть $\mathscr{A}_n$ — σ-алгебра, порождённая суммами S_n, S_{n+1}, ... Доказать, что $\mathbf{E}\{\xi_1|\mathscr{A}_n\} = S_n/n$.

§ 27. Мартингалы

Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, $T \subseteq \mathbf{R}$. Пусть $\{\mathscr{A}_t\}$ — поток σ-алгебр, т. е. $\mathscr{A}_t \subseteq \mathscr{F}$ и $\mathscr{A}_t \subseteq \mathscr{A}_s$ для любых $t, s \in T$, $t < s$. Случайный процесс $\xi(t)$, $t \in T$, называется *мартингалом* относительно потока σ-алгебр $\{\mathscr{A}_t\}$, если случайная величина $\xi(t)$ измерима относительно $\{\mathscr{A}_t\}$, $\mathbf{E}|\xi(t)| < \infty$ и $\mathbf{E}\{\xi(s)|\mathscr{A}_t\} = \xi(t)$ п. н. для любых $t < s$. Если σ-алгебра $\mathscr{A}_t$ при каждом t порождена семейством $\{\xi(s), s \leqslant t\}$ и процесс $\xi(t)$ является мартингалом относительно потока $\{\mathscr{A}_t\}$, то говорят, что $\xi(t)$ — мартингал.

Случайный процесс $\xi(t)$, $t \in T$, называется *субмартингалом* (*супермартингалом*) относительно потока σ-алгебр $\{\mathscr{A}_t\}$, если выполнены два первых свойства из определения мартингала и $\mathbf{E}\{\xi(s)|\mathscr{A}_t\} \geqslant \xi(t)$ п. н. ($\mathbf{E}\{\xi(s)|\mathscr{A}_t\} \leqslant \xi(t)$ п. н.) для любых $t < s$.

27.1. Пусть ξ_1, ξ_2, ... — независимые случайные величины, причём $\mathbf{P}\{\xi_i = 0\} = \mathbf{P}\{\xi_i = 2\} = 1/2$. Доказать, что последовательность произведений $\eta_n = \prod\limits_{i=1}^{n} \xi_i$ образует мартингал.

27.2. Пусть ξ_1, ξ_2, ... — независимые случайные величины, причём $\mathbf{P}\{\xi_i = 1\} = 1 - \mathbf{P}\{\xi_i = -1\} = p$, $p \neq 1/2$. Положим $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ и $\mathscr{A}_n = \sigma(S_1, \dots, S_n)$. Доказать, что следующие последовательности будут мартингалами относительно потока $\{\mathscr{A}_n\}$:

а) $\eta_n = S_n - n(2p-1)$; б) $\eta_n = \left(\dfrac{1-p}{p}\right)^{S_n}$.

27.3. Пусть ξ_1, ξ_2, ... — независимые случайные величины, причём $\mathbf{P}\{\xi_i = 1\} = \mathbf{P}\{\xi_i = -1\} = 1/2$. Положим $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ и $\mathscr{A}_n = \sigma(S_1, \dots, S_n)$. Доказать, что для любых чисел $A \in (-\infty, \infty)$ и $\lambda \in (0, \pi/2)$ последовательность

$$\eta_n = \frac{e^{i\lambda(S_n + A)}}{\cos^n \lambda}$$

будет мартингалом относительно потока $\{\mathscr{A}_n\}$.

27.4. Пусть ξ_1, ξ_2, ... — независимые одинаково распределённые случайные величины, причём $\mathbf{E}\xi_1 = 0$. Положим $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ и $\mathscr{A}_n = \sigma(S_1, \dots, S_n)$. Доказать, что следующие последовательности будут мартингалами относительно потока $\{\mathscr{A}_n\}$:

а) $\eta_n = (S_n)^2 - n\mathbf{E}\xi_1^2$, если $\mathbf{E}\xi_1^2 < \infty$;

б) $\eta_n = \dfrac{e^{\lambda S_n}}{(\mathbf{E}e^{\lambda\xi_1})^n}$, если $\mathbf{E}e^{\lambda\xi_1} < \infty$.

27.5. Пусть ξ_1, ξ_2, ... — независимые случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Доказать, что последовательность сумм $\{S_n\}$ образует мартингал.

27.6. Пусть ξ_1, ξ_2, ... — неотрицательные случайные величины с конечными средними значениями, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Доказать, что последовательность сумм $\{S_n\}$ образует субмартингал.

27.7. Пусть ξ_1, ξ_2, ... — независимые случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и конечными дисперсиями. Обозначим $B_n = \mathbf{D}\xi_1 + \dots + \mathbf{D}\xi_n$ и $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Доказать, что последовательность $\{S_n^2 - B_n\}$ образует мартингал.

27.8. Пусть ξ_1, ξ_2, ... — независимые случайные величины, причём $\mathbf{E}\xi_n = 1$ для любого n. Доказать, что последовательность произведений $\eta_n = \prod\limits_{i=1}^{n} \xi_i$ образует мартингал.

27.9. Пусть ξ — случайная величина с конечным математическим ожиданием, $\{\mathscr{A}_n\}_{n\geqslant 0}$ — неубывающая последовательность σ-алгебр. Доказать, что последовательность $\xi_n = \mathbf{E}\{\xi|\mathscr{A}_n\}$ образует мартингал.

27.10. Пусть $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots$ — независимые одинаково распределённые случайные величины с конечным математическим ожиданием, а $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$. Доказать, что последовательность

$$\ldots,\ \frac{S_n}{n},\ \ldots,\ \frac{S_3}{3},\ \frac{S_2}{2},\ S_1$$

образует мартингал.

27.11. Пусть $\xi(t)$ — мартингал относительно потока $\{\mathscr{A}_t\}$. Доказать, что процесс $\xi(t)$ имеет некоррелированные приращения, т. е. $\mathbf{Cov}(\xi(s)-\xi(t), \xi(v)-\xi(u)) = 0$ при $t < s < u < v$.

27.12. Пусть $\xi(t)$ — однородный процесс Пуассона с параметром λ. Доказать, что $\zeta(t) = \exp\{\xi(t) - at\}$ представляет собой субмартингал при $a \leqslant \lambda(e-1)$ и супермартингал при $a \geqslant \lambda(e-1)$.

27.13. Доказать, что винеровский процесс, выходящий из нуля, является мартингалом с непрерывным временем.

27.14. Пусть $\{\xi_n\}$ — мартингал, причём $\mathbf{E}(\xi_n - \xi_{n-1})^2 \leqslant c$ для некоторого $c < \infty$. Доказать, что $\xi_n/n \to \mathbf{E}\xi_1$ по вероятности.

27.15. Пусть $\xi_0,\ \xi_1,\ \ldots$ — ветвящийся процесс, $\xi_0 = 1$, $\mathbf{E}\xi_1 = m$, $\eta_n = \xi_n/m^n$. Доказать, что $\{\eta_n\}$ образует мартингал.

ОТДЕЛ IX
СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

§ 28. Общие свойства

Пусть T — некоторое множество. Функция $\xi(t) = \xi(t, \omega) : T \times \Omega \to \mathbf{R}$ называется *случайным процессом*, если для любого фиксированного t функция $\xi(t, \omega)$ аргумента ω — случайная величина.

Конечномерными распределениями процесса $\xi(t)$, $t \in T$, называются распределения случайных векторов $(\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n))$, $t_1, \ldots, t_n \in T$.

Случайный процесс $\xi(t)$, $t \in [a, b]$, называется *стохастически непрерывным*, если $\xi(t) \to \xi(t_0)$ по вероятности при $t \to t_0$, для любого $t_0 \in [a, b]$.

Математическим ожиданием случайного процесса $\xi(t)$, $t \in T$, называется неслучайная функция $m(t) = \mathbf{E}\xi(t)$.

Ковариационной функцией случайного процесса $\xi(t)$, $t \in T$, называется неслучайная функция двух аргументов $B(t, s) = \mathbf{Cov}(\xi(t), \xi(s))$. Случайный процесс $\xi(t)$, $t \in [a, b]$, называется *стационарным* (в широком смысле), если ковариационная функция $B(t, s)$ зависит лишь от разности $s - t$ своих аргументов.

Пусть $\xi(t)$ — стационарный процесс с ковариационной функцией $b(t)$. Тогда существует неубывающая функция $F(u)$ такая, что $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = b(0)$ и для любого t выполняется равенство

$$b(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itu} dF(u).$$

Функция $F(u)$ называется *спектральной функцией* процесса $\xi(t)$. Если $F(u)$ абсолютно непрерывна, её производная называется *спектральной плотностью* процесса $\xi(t)$. Кроме того, существует процесс $\mu(u)$ с нулевым средним значением, ортогональными приращениями и со структурной функцией $F(u)$ такой, что для любого t справедливо *спектральное представление*

$$\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itu} d\mu(u).$$

28.1. Пусть η — случайная величина с функцией распределения $F(x)$. Найти все конечномерные распределения случайного процесса $\xi(t) = \eta + t$, его математическое ожидание $m(t)$ и ковариационную функцию $B(t, s)$.

28.2. Пусть η — случайная величина с равномерным на отрезке $[0,1]$ распределением. Найти все конечномерные распределения случайного процесса $\xi(t) = \mathbf{I}\{t < \eta\}$, $t \in [0,1]$, его математическое ожидание $m(t)$ и ковариационную функцию $B(t,s)$.

28.3. Пусть случайная величина ξ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2; $b \in \mathbf{R}$. Найти все конечномерные распределения случайного процесса $\xi(t) = \xi t + b$, его математическое ожидание $m(t)$ и ковариационную функцию $B(t,s)$.

28.4. Пусть φ — случайная величина с плотностью $\cos x$ при $x \in [0, \pi/2]$; a и ω — положительные постоянные. Является ли случайный процесс $\xi(t) = a\sin(\omega t + \varphi)$ стационарным?

28.5. Пусть ξ и η — некоррелированные случайные величины с нулевыми средними значениями и конечными дисперсиями, а α, $\beta > 0$ — некоторые постоянные. Найти все конечномерные распределения случайного процесса $\xi(t) = \xi e^{-\alpha t} + \eta e^{-\beta t}$, его математическое ожидание $m(t)$ и ковариационную функцию $B(t,s)$.

28.6. Пусть ξ и η — некоррелированные случайные величины с нулевыми средними значениями и единичными дисперсиями. Найти математическое ожидание $m(t)$ и ковариационную функцию $B(t,s)$ случайного процесса $\xi(t) = t + \xi\cos\gamma t + \eta\sin\gamma t$.

28.7. Пусть $\xi(t)$ — дифференцируемый случайный процесс с математическим ожиданием $m(t)$ и ковариационной функцией $B(t,s)$. Найти математическое ожидание и ковариационную функцию его производной $\dfrac{d\xi(t)}{dt}$.

28.8. Пусть случайный процесс $\xi(t)$ имеет математическое ожидание $m(t) = t^2 - 1$ и ковариационную функцию $B(t,s) = 2e^{-\alpha(s-t)^2}$. Найти математическое ожидание и ковариационную функцию случайного процесса

а) $2t\dfrac{d\xi(t)}{dt} + (1-t)^2$;

б) $t\xi(t) + t^2 + 1$;

в) $\dfrac{d^2\xi(t)}{dt^2} + 1$.

28.9. Пусть $\xi(t)$ — случайный процесс с математическим ожиданием $m(t)$ и ковариационной функцией $B(t,s)$; траектории процесса непрерывны с вероятностью 1. Найти математическое ожидание и ковариационную функцию интеграла $\displaystyle\int_0^t \xi(s)ds$.

28.10. Пусть случайный процесс $\xi(t)$ равен $\eta\cos(\gamma t - \theta)$, где η — случайная величина с нулевым средним значением и дисперсией σ^2; θ — случайная величина с равномерным на отрезке $[0, 2\pi]$ распределением;

γ — неслучайный параметр. Случайные величины η и θ независимы. Найти математическое ожидание и ковариационную функцию процесса $\xi(t)$. При каких условиях $\xi(t)$ — стационарный процесс?

28.11. Пусть случайный процесс $\xi(t)$ равен $\sigma\cos 2\pi(\xi t+\eta)$, где σ — положительная постоянная, ξ — случайная величина с плотностью $f(x)$, причём $0 \leqslant \xi \leqslant 1/2$, а η — случайная величина с равномерным на отрезке $[-1/2, 1/2]$ распределением. Случайные величины ξ и η независимы. Доказать, что $\xi(t)$ — стационарный процесс. Найти его ковариационную функцию и спектральную плотность.

28.12. Пусть случайный процесс $\xi(t)$ равен $\eta_1 f_1(t)+\dots+\eta_n f_n(t)$, где $\eta_1, \ldots, \eta_n$ — некоррелированные случайные величины с нулевыми средними значениями и дисперсиями $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_1^2$, а $f_1, \ldots, f_n$ — неслучайные функции. Найти математическое ожидание и ковариационную функцию процесса $\xi(t)$.

28.13. Показать, что не существует никакого стационарного процесса, ковариационная функция $b(s-t)=B(t,s)$ которого постоянна и отлична от нуля в каком-то интервале $(-t_1, t_1)$ и равна нулю вне его.

28.14. Найти спектральную плотность стационарного процесса, если его ковариационная функция равна:

а) $b(t)=ce^{-\alpha|t|}$; в) $b(t)=ce^{-(\alpha|t|)^2}$;

б) $b(t)=ce^{-\alpha|t|}\cos\beta t$; г) $b(t)=ce^{-(\alpha|t|)^2}\cos\beta t$.

28.15. Пусть спектральная плотность стационарного процесса равна

$$F(u)=\begin{cases} a \text{ при } |u|\leqslant u_1,\\ 0 \text{ при } |u|>u_1.\end{cases}$$

Найти ковариационную функцию процесса.

28.16. Пусть $\xi(t)$ — стационарный процесс с ковариационной функцией $b(t)=\dfrac{\sin t}{t}$. Найти ковариационную функцию и спектральную плотность производной этого процесса.

28.17. Пусть $\xi(t)$ — стационарный дифференцируемый в среднеквадратичном случайный процесс. Доказать, что при любом фиксированном t значения процесса $\xi(t)$ и его производной $\dfrac{d\xi(t)}{dt}$ не коррелированы.

28.18. Пусть $\xi(t)$ и $\eta(t)$ — стационарные процессы, заданные на одном вероятностном пространстве. Является ли сумма $\xi(t)+\eta(t)$ стационарным процессом?

28.19. Пусть $\xi(t)$ и $\eta(t)$ — стационарные процессы, заданные на одном вероятностном пространстве, причём $\{\xi(t)\}$ не зависит от $\{\eta(t)\}$. Является ли сумма $\xi(t)+\eta(t)$ стационарным процессом?

28.20. Пусть $\xi(t)$ — стационарный процесс. Выяснить условия, при которых процесс $\xi(t)$ сходится по вероятности при $t \to \infty$.

28.21. Пусть $\xi(t)$ — случайный процесс такой, что все $\xi(t)$ независимы друг от друга и имеют одинаковую плотность распределения p. Докажите, что этот процесс не является стохастически непрерывным ни в какой точке.

28.22. Пусть ξ и η — случайные величины, причём η имеет симметричное распределение и $\mathbf{P}\{\eta = 0\} = 0$. Найти вероятность того, что реализации случайного процесса $\xi(t) = \xi + t(\eta + t)$ возрастают.

28.23. Рассмотрим на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, представляющим собой отрезок $[0, 1]$ с σ-алгеброй борелевских подмножеств и мерой Лебега, случайный процесс $\xi(t, \omega)$, определенный следующим образом:

$$\xi(t,\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если прямая, проходящая через точку } (t,\omega) \\ & \text{параллельно прямой } t = \omega, \text{ пересекает} \\ & \text{ось } t \text{ в рациональной точке,} \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Показать, что процесс $\xi(t, \omega)$ стохастически непрерывен, но все его траектории разрывны в каждой точке.

28.24. Привести пример случайного процесса такого, что множество элементарных исходов, на которых процесс непрерывен, не является событием.

§ 29. Винеровский процесс

Стохастически непрерывный однородный процесс с независимыми приращениями $\xi(t)$ называется *винеровским*, если $\xi(0) = 0$ и $\xi(1)$ имеет нормальное распределение. Винеровский процесс $\xi(t)$ называется стандартным, если $\xi(1)$ имеет стандартное нормальное распределение. В настоящем параграфе всюду рассматриваются непрерывные модификации винеровского процесса.

Пусть $w(t)$ — винеровский процесс. В задачах **29.1–29.3** выяснить, является ли процесс $\eta(t)$ марковским и найти его распределение.

29.1.

$$\eta(t) = \begin{cases} w(t), & \text{если } \max\limits_{0 \leqslant s \leqslant t} w(s) < a, \\ a & \text{иначе.} \end{cases}$$

29.2.

$$\eta(t) = \begin{cases} w(t), & \text{если } w(t) \leqslant a, \\ 2a - w(t) & \text{иначе.} \end{cases}$$

29.3. $\eta(t) = w(t) - [w(t)]$, где $[x]$ — целая часть числа x.

29.4. Найти ковариационную функцию винеровского процесса.

29.5. Доказать, что винеровский процесс не дифференцируем по вероятности.

29.6. Пусть $w(t)$ — стандартный винеровский процесс. Найти ковариационную функцию случайного процесса $w^{(0)}(t) = w(t) - tw(1)$, рассматриваемого на отрезке времени $t \in [0, 1]$.

29.7. Пусть $w(t)$ — винеровский процесс. Найти ковариационную функцию случайного процесса $e^{-bt}w(ae^{2bt})$, где a и b — действительные числа (этот процесс называется *процессом Орнштейна — Уленбека*).

29.8. Пусть $w(t)$ — стандартный винеровский процесс. Найдите совместное распределение $w(t)$ и $\int_0^t w(s)ds$, $t \geqslant 0$.

29.9. Пусть $w(t)$ — стандартный винеровский процесс. Доказать, что случайный процесс $w^{(1)}(t) = tw(1/t)$ тоже стандартный винеровский.

29.10. Пусть $w(t)$ — винеровский процесс с нулевым сносом. Доказать, что процесс

$$\eta(t) = \begin{cases} w(t), & t \leqslant T, \\ 2w_T - w(t), & t > T, \end{cases}$$

тоже винеровский.

29.11. Пусть $w(t)$ — трехмерный винеровский процесс, выходящий из нуля. Доказать, что с вероятностью 1

$$\lim_{t\to\infty} |w(t)| = \infty.$$

29.12. Пусть $w(t)$ — винеровский процесс. Найти распределения следующих стохастических интегралов:

а) $\displaystyle\int\limits_0^t s^2 dw(s)$; б) $\displaystyle\int\limits_0^t e^s dw(s)$.

§ 30. Пуассоновский процесс

Стохастически непрерывный однородный процесс с независимыми приращениями $\xi(t)$ называется *пуассоновским*, если $\xi(0) = 0$ и $\xi(1)$ имеет распределение Пуассона. В настоящем параграфе всюду рассматриваются модификации процесса Пуассона, имеющие ступенчатые траектории с единичными скачками.

30.1. Пусть $(\xi(t), \eta(t))$ — вероятностный процесс в двумерном пространстве, где $\xi(t)$ — пуассоновский процесс с параметром λ, а $\eta(t)$ — пуассоновский процесс с параметром μ, не зависящий от $\xi(t)$. При условии что процесс находится в состоянии (x_0, y_0) в момент $t = 0$, $x_0 + y_0 < z$, найти вероятность пересечения процессом прямой $x' + y' = z$ в точке (x, y) этой прямой.

30.2. Пусть $\xi(t)$ — пуассоновский процесс с параметром λ. Предположим, что каждое событие «регистрируется» с вероятностью p независимо от остальных событий. Пусть $\eta(t)$ — процесс, скачки которого происходят лишь в моменты наступления «зарегистрированных» событий. Доказать, что $\eta(t)$ — пуассоновский процесс с параметром $p\lambda$.

30.3. Рассмотрим пуассоновский процесс с переменной интенсивностью, т. е. вероятность скачка в интервале времени $(t, t+h)$ не зависит от предыстории и равна $\lambda(t)h + o(h)$ при $h \to 0$ (заметим, что λ может зависеть от t).

(а) Доказать, что вероятность отсутствия скачков на отрезке времени $[0, t]$ равна

$$\exp\left\{-\int_0^t \lambda(s)ds\right\}.$$

(б) Доказать, что вероятность наличия ровно k скачков на отрезке времени $[0, t]$ равна

$$\frac{1}{k!}\left(\int_0^t \lambda(s)ds\right)^k \exp\left\{-\int_0^t \lambda(s)ds\right\}.$$

30.4. Найти ковариационную функцию

а) пуассоновского процесса с постоянной интенсивностью λ;

б) пуассоновского процесса с переменной интенсивностью $\lambda(t)$.

30.5. Пусть $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательные моменты скачков пуассоновского процесса с интенсивностью λ. Доказать, что для любого $T > 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\tau_k \leqslant T\} = \lambda T.$$

30.6. Доказать, что пуассоновский процесс:

а) дифференцируем по вероятности;

б) дифференцируем в смысле сходимости в среднем любого порядка $p \in (0, 1)$;

в) не дифференцируем в смысле сходимости в среднем любого порядка $p \geqslant 1$.

30.7. Пусть имеется пуассоновский процесс с интенсивностью λ. Пусть процесс $\xi(t)$ принимает значения -1 и 1, причём с течением времени $\xi(t)$ меняет свое значение с -1 на 1 и наоборот при наступлении каждого скачка в пуассоновском процессе. Пусть $\mathbf{P}\{\xi(0) = -1\} = \mathbf{P}\{\xi(0) = 1\} = 1/2$. Найти ковариационную функцию процесса $\xi(t)$. Будет ли процесс $\xi(t)$ стационарным?

30.8. Пусть имеется пуассоновский процесс с интенсивностью λ и последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин $\{\eta_n\}$, при этом процесс и $\{\eta_n\}$ независимы между собой. Определим процесс $\xi(t)$ следующим образом: $\xi(t) = \eta_n$, если момент времени t лежит в промежутке между n-м и $n+1$-м скачками пуассоновского процесса. Найти ковариационную функцию процесса $\xi(t)$. Будет ли процесс $\xi(t)$ стационарным?

30.9. Случайно расположенные на плоскости точки образуют пуассоновское поле с интенсивностью λ, т. е. число точек в любой области S площади $\mathrm{mes}S$ имеет пуассоновское распределение с параметром $\lambda\mathrm{mes}S$, причём числа точек в непересекающихся областях независимы. Пусть $\rho_1 \leqslant \rho_2 \leqslant \ldots$ — упорядоченные по возрастанию расстояния от начала координат до точек этого поля.

а) Как можно описать последовательность ρ_n, $n = 1, 2, \ldots$?

б) Найти плотность распределения ρ_n, среднее значение ρ_n и асимптотику этого среднего значения при $n \to \infty$.

30.10. В условиях задачи **30.9** доказать, что координаты (ξ, η) ближайшей к началу координат точки распределены по нормальному закону с параметрами $m_\xi = m_\eta = 0$ и $\sigma_\xi^2 = \sigma_\eta^2 = 1/2\pi\lambda$.

30.11. Случайно расположенные в трехмерном пространстве точки образуют пуассоновское поле с интенсивностью λ. Ответить на вопросы задачи **30.9**.

30.12. Пусть $\pi(t)$ — пуассоновский процесс с параметром 1. Найти распределение стохастического интеграла $\int\limits_0^t s^2 d(\pi(s) - s)$.

§ 31. Линейная теория случайных последовательностей

Пусть $\{\xi_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ — стационарная последовательность с ковариационной функцией $b(n)$. Тогда существует неубывающая функция $F(t)$ такая, что $F(-\pi) = 0$, $F(\pi - 0) < \infty$ и для любого n выполняется равенство

$$b(n) = \int\limits_{[-\pi,\pi)} e^{int} dF(t).$$

Функция $F(x)$ называется *спектральной функцией* последовательности $\{\xi_n\}$. Если $F(x)$ абсолютно непрерывна, ее производная называется *спектральной плотностью* последовательности $\{\xi_n\}$.

Кроме того, существует процесс $\mu(t)$ с нулевым средним значением, ортогональными приращениями и со структурной функцией $F(t)$ такой, что для любого n справедливо *спектральное представление*

$$\xi_n = \int\limits_{[-\pi,\pi)} e^{int} d\mu(t).$$

31.1. Построить стационарную последовательность, ковариационная функция $b(n)$ которой равна 1 при чётном n и 0 при нечётном n.

31.2. Пусть ξ — случайная величина, имеющая стандартное нормальное распределение. Положим $\xi_n = \xi$ для любого целого n. Является ли случайная последовательность $\{\xi_n\}$ стационарной? Если «да», найти её спектральную меру и спектральное представление.

31.3. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, каждая из которых принимает значения -1 и 1 с вероятностями $1/2$. Положим $\xi_{2n+1} = \xi$ и $\xi_{2n} = \eta$ для любого целого n. Является ли случайная последовательность $\{\xi_n\}$ стационарной? Если «да», найти её спектральную меру и спектральное представление.

31.4. Пусть ξ и η — некоррелированные случайные величины, каждая из которых имеет стандартное нормальное распределение. Положим $\xi_{2n+1} = \xi$ и $\xi_{2n} = \eta$ для любого целого n. Является ли случайная последовательность $\{\xi_n\}$ стационарной? Если «да», найти её спектральную меру и спектральное представление.

31.5. Пусть $\ldots, \eta_{-1}, \eta_0, \eta_1, \ldots$ — независимые случайные величины, имеющие равномерное распределение на отрезке $[-2, 2]$. Положим $\xi_n = \eta_{n-1}\eta_n$ для любого целого n. Является ли случайная последовательность $\{\xi_n\}$ стационарной? Если «да», найти разложение этой последовательности на вполне детерминированную и вполне недетерминированную составляющие, а также построить наилучший линейный прогноз ξ_1 по наблюдениям $\{\xi_n, n \leqslant 0\}$.

31.6. Пусть $\ldots, \eta_{-1}, \eta_0, \eta_1, \ldots$ — некоррелированные случайные величины с нулевыми средними значениями и единичными дисперсиями. Положим $\xi_n = \eta_{n-3} + \eta_{n-2} + \eta_{n-1} + \eta_n$ для любого целого n. Является ли случайная последовательность $\{\xi_n\}$ стационарной? Если «да», найти разложение этой последовательности на вполне детерминированную и вполне недетерминированную составляющие, а также построить наилучший линейный прогноз ξ_2 по наблюдениям $\{\xi(n), n \leqslant 0\}$.

31.7. Пусть $\ldots, \eta_{-1}, \eta_0, \eta_1, \ldots$ — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение. Положим $\xi_n = \eta_{n-2} + \eta_{n-1} + \eta_n$ для любого целого n. Является ли случайная последовательность $\{\xi_n\}$ стационарной? Если «да», найти разложение этой последовательности на вполне детерминированную и вполне недетерминированную составляющие, а также построить наилучший линейный прогноз ξ_1 по наблюдениям $\{\xi_n, n \leqslant 0\}$.

31.8. Пусть $\ldots, \eta_{-1}, \eta_0, \eta_1, \ldots$ — независимые случайные величины, имеющие равномерное распределение на отрезке $[-1, 1]$. Положим $\xi_n = \eta_{n-1}\eta_n$ для любого целого n. Является ли случайная последовательность $\{\xi_n\}$ стационарной? Если «да», найти разложение этой последовательности на вполне детерминированную и вполне недетерминированную составляющие, а также построить наилучший линейный прогноз ξ_1 по наблюдениям $\{\xi_n, n \leqslant 0\}$.

31.9. Пусть $w(u)$ — стандартный винеровский процесс. Найти распределения следующих случайных последовательностей:

а) $\xi(n) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{inu} dw(\pi + u)$; б) $\xi(n) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{2inu} dw(\pi + u)$.

§ 32. Ветвящиеся процессы с дискретным временем

32.1. Пусть $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — ветвящийся процесс, $\xi_0 = 1$, $\mathbf{E}\xi_1 = m$. Найти $\mathbf{E}\{\xi_{n+k} | \xi_n\}$.

32.2. Найти производящую функцию числа частиц в n-м поколении, если производящая функция потомков одной частицы равна:

а) $pz + 1 - p$;
б) $1 - p(1 - z)^\alpha$, $0 < \alpha < 1$;
в) $(1 - p)/(1 - pz)$.

32.3. Найти вероятность вырождения ветвящегося процесса, если производящая функция числа потомков одной частицы равна:

а) $pz + 1 - p$;
б) $1 - p(1 - z)^\alpha$, $0 < \alpha < 1$;
в) $(1 - p)/(1 - pz)$;
г) $1 - p + pz^2$;
д) $(1 + z + z^2 + z^3)/4$.

32.4. В задаче **32.3** а) — в) найти распределение времени вырождения ветвящегося процесса.

32.5. Пусть ξ_n — ветвящийся процесс с начальным размером популяции N и производящей функцией $\varphi(z) = 1 - p + pz$. Найти распределение времени вырождения процесса.

32.6. Пусть $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — ветвящийся процесс, $\xi_0 = 1$. Доказать, что

$$\mathbf{P}\{\xi_n > N \text{ при некотором } 1 \leqslant n \leqslant m - 1 | \xi_m = 0\} \leqslant \mathbf{P}^N\{\xi_m = 0\}.$$

32.7. Найти производящую функцию общего числа частиц в первых n поколениях, если производящая функция непосредственных потомков одной частицы равна $pz + 1 - p$.

32.8. Пусть частица имеет k прямых потомков с вероятностью $p_k = bc^{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$, и $p_0 = 1 - p_1 - p_2 - \cdots$, где b, $c > 0$ и $b + c < 1$. Найти производящую функцию непосредственных потомков одной частицы.

32.9. Рассмотрим ветвящийся процесс ξ_0, ξ_1, $\ldots$ с производящей функцией

$$\varphi(z) = \frac{1 - b - c}{1 - c} + \frac{bz}{1 - cz},$$

где $0 < c < b + c < 1$ и $1 - b - c > c(1 - c)$. Найти

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\xi_n = k | \xi_n > 0\}.$$

32.10. Пусть в ветвящемся процессе ξ_0, ξ_1, $\ldots$ из задачи **32.9** выполняется $1 - b - c = c(1 - c)$. Найти

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\xi_n \leqslant nx | \xi_n > 0\}.$$

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Важнейшие дискретные распределения

Тип распределения и обозначение	Параметры	Возможные значения k	Вероятность $\mathbf{P}\{\xi = k\}$
Бернулли, B_p	$p \in [0, 1]$	$k = 0,\ 1$	$\mathbf{P}\{\xi = 0\} = 1 - p$ $\mathbf{P}\{\xi = 1\} = p$
Биномиальное, $B_{m,p}$	$m \in \{1, 2, \ldots\}$, $p \in [0, 1]$	$k = 0,\ \ldots,\ m$	$C_m^k p^k (1-p)^{m-k}$
Отрицательное биномиальное, $\overline{B}_{m,p}$	$m \in \{1, 2, \ldots\}$, $p \in (0, 1]$	$k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$	$C_{m+k-1}^k (1-p)^k p^m$
Геометрическое, G_p	$p \in (0, 1]$	$k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$	$p(1-p)^k$
Пуассона, Π_λ	$\lambda \in (0, \infty)$	$k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$	$\dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

2. Таблица распределения Пуассона

В таблице приведены значения функции $\overline{\Pi}_\lambda(x) = \sum_{i=x}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$, $x = 1, 2, \ldots$

$x =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lambda = 0,2$	,181	,018	,001							
$\lambda = 0,4$	,330	,062	,008	,001						
$\lambda = 0,6$	,451	,122	,023	,003						
$\lambda = 0,8$	,551	,191	,047	,009	,001					
$\lambda = 1$	,632	,264	,080	,019	,004	,001				
$\lambda = 1,5$	,777	,442	,191	,066	,019	,004	,001			
$\lambda = 2$	,865	,594	,323	,143	,053	,017	,005	,001		
$\lambda = 2,5$	,918	,713	,456	,242	,109	,042	,014	,004	,001	
$\lambda = 3$	,950	,801	,577	,353	,185	,084	,034	,012	,004	,001
$\lambda = 3,5$	,970	,864	,679	,463	,275	,142	,065	,027	,010	,003
$\lambda = 4$	,982	,908	,762	,567	,371	,215	,111	,051	,021	,008
$\lambda = 5$	,993	,960	,875	,735	,560	,384	,238	,133	,068	,032
$\lambda = 6$	,998	,983	,938	,849	,715	,554	,394	,256	,153	,084
$\lambda = 7$	,999	,993	,970	,918	,827	,699	,550	,401	,271	,170
$\lambda = 8$	,9997	,997	,986	,958	,900	,809	,687	,547	,407	,283
$\lambda = 9$	,9999	,999	,994	,979	,945	,884	,793	,676	,544	,413
$\lambda = 10$	,9999	,9995	,997	,990	,971	,933	,870	,780	,667	,542

$x =$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\lambda = 6$	,043	,020	,009	,004	,001	,001				
$\lambda = 7$	,099	,053	,027	,013	,006	,002	,001			
$\lambda = 8$	,184	,112	,064	,034	,017	,008	,004	,002	,001	
$\lambda = 9$	,294	,197	,124	,074	,041	,022	,011	,005	,002	,001
$\lambda = 10$	,417	,303	,208	,136	,083	,049	,027	,014	,007	,003
$\lambda = 11$	,540	,421	,311	,219	,146	,093	,056	,032	,018	,009
$\lambda = 12$	,653	,538	,424	,318	,228	,156	,101	,063	,037	,021

Замечание 1. Значения вероятностей в пустых клетках таблиц меньше 0,0005.

Замечание 2. В учебниках и задачниках по теории вероятностей используются и другие варианты таблиц распределения Пуассона. Например, приводятся таблицы значений функций $(x = 0, 1, 2, \ldots)$

$$\Pi_\lambda(x) = \sum_{i=0}^{x} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \quad \text{и} \quad \pi_\lambda(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}.$$

Эти функции связаны с $\overline{\Pi}_\lambda(x)$ при любом $x = 0, 1, 2, \ldots$ следующими равенствами: $\Pi_\lambda(x) = 1 - \overline{\Pi}_\lambda(x+1)$ и $\pi_\lambda(x) = \overline{\Pi}_\lambda(x) - \overline{\Pi}_\lambda(x+1)$.

3. Важнейшие плотности распределения

Тип распределения и обозначение	Параметры	Область изменения y	Плотность в точке y
Стандартное нормальное, $N_{0,1}$		$y \in \mathbf{R}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}$
Невырожденное нормальное, N_{a,σ^2}	$a \in \mathbf{R}$, $\sigma^2 > 0$	$y \in \mathbf{R}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(y-a)^2/2\sigma^2}$
Равномерное на отрезке $[a,b]$, $U_{a,b}$	$a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$	$y \in [a,b]$ $y \notin [a,b]$	$(b-a)^{-1}$ 0
Бета-распределение, $B_{\alpha,\beta}$	$\alpha,\ \beta > 0$	$y \in [0,1]$ $y \notin [0,1]$	$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}$ 0
Показательное (экспоненциальное), E_α	$\alpha > 0$	$y \geqslant 0$ $y < 0$	$\alpha e^{-\alpha y}$ 0
Лапласа, L_α	$\alpha > 0$	$y \in \mathbf{R}$	$(\alpha/2)e^{-\alpha\|y\|}$
Гамма, $\Gamma_{\alpha,\beta}$	$\alpha > 0,\ \beta > 0$	$y \geqslant 0$ $y < 0$	$\frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} y^{\beta-1} e^{-\alpha y}$ 0
Коши, C_{a,σ^2}	$a \in \mathbf{R}$, $\sigma > 0$	$y \in \mathbf{R}$	$\frac{\sigma}{\pi(\sigma^2 + (y-a)^2)}$
Хи-квадрат с n степенями свободы, χ^2_n	$n \in \{1, 2, ...\}$	$y \geqslant 0$ $y < 0$	$\frac{(1/2)^{n/2}}{\Gamma(n/2)} y^{n/2-1} e^{-y/2}$ 0
Стьюдента с n степенями свободы, t_n	$n \in \{1, 2, ...\}$	$y \in \mathbf{R}$	$c_n(1 + y^2/n)^{-(n+1)/2}$, $c_n = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{n\pi}\Gamma(n/2)}$
Вейбулла, $W_{\alpha,\theta}$	$\alpha > 0,\ \theta > 0$	$y \geqslant 0$ $y < 0$	$\theta\alpha y^{\alpha-1} e^{-\theta y^\alpha}$ 0
Парето, $P_{\beta,\theta}$	$\beta > 0,\ \theta > 0$	$y \geqslant \theta$ $y < \theta$	$\beta\theta^\beta y^{-(\beta+1)}$ 0

4. Таблица нормального распределения

В таблице приведены значения функции $\overline{\Phi}(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_y^\infty e^{-z^2/2} dz.$

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	,500	,496	,492	,488	,484	,480	,476	,472	,468	,464
0,1	,460	,456	,452	,448	,444	,440	,436	,433	,429	,425
0,2	,421	,417	,413	,409	,405	,401	,397	,394	,340	,386
0,3	,382	,378	,374	,371	,370	,363	,359	,356	,352	,348
0,4	,345	,341	,337	,334	,330	,326	,323	,319	,316	,312
0,5	,309	,305	,302	,298	,295	,291	,288	,284	,281	,278
0,6	,274	,271	,268	,264	,261	,258	,255	,251	,248	,245
0,7	,242	,239	,236	,233	,230	,227	,224	,221	,218	,215
0,8	,212	,209	,206	,203	,200	,198	,195	,192	,189	,187
0,9	,184	,181	,179	,176	,174	,171	,169	,166	,164	,161
1,0	,159	,156	,154	,152	,149	,147	,145	,142	,140	,138
1,1	,136	,134	,131	,129	,127	,125	,123	,121	,119	,117
1,2	,115	,113	,111	,109	,107	,106	,104	,102	,100	,099
1,3	,097	,095	,093	,092	,090	,089	,087	,085	,084	,082
1,4	,081	,079	,078	,076	,075	,074	,072	,071	,069	,068
1,5	,067	,066	,064	,063	,062	,061	,059	,058	,057	,056
1,6	,055	,054	,053	,052	,051	,049	,048	,047	,046	,046
1,7	,045	,044	,043	,042	,041	,040	,039	,038	,038	,037
1,8	,036	,035	,034	,034	,033	,032	,031	,031	,030	,029
1,9	,029	,028	,027	,027	,026	,026	,025	,024	,024	,023
2,0	,023	,022	,022	,021	,021	,020	,020	,019	,019	,018
2,1	,018	,017	,017	,017	,016	,016	,015	,015	,015	,014
2,2	,014	,014	,013	,013	,013	,012	,012	,012	,011	,011
2,3	,011	,010	,010	,010	,010	,009	,009	,009	,009	,008
2,4	,008	,008	,008	,008	,007	,007	,007	,007	,007	,006
2,5	,006	,006	,006	,006	,006	,005	,005	,005	,005	,005
2,6	,005	,005	,004	,004	,004	,004	,004	,004	,004	,004
2,7	,003	,003	,003	,003	,003	,003	,003	,003	,003	,003
2,8	,003	,002	,002	,002	,002	,002	,002	,002	,002	,002
2,9	,002	,002	,002	,002	,002	,002	,002	,001	,001	,001

$\overline{\Phi}(3) = 0,00135$; $\overline{\Phi}(4) = 0,00003167$; $\overline{\Phi}(5) = 0,0000002867$; $\overline{\Phi}(6) = 0,00000000099$

Замечание. В учебниках и задачниках по теории вероятностей используются и другие варианты таблиц нормального распределения. Например, приводятся таблицы значений функций ($y \geqslant 0$)

$$\Phi(-y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{-y} e^{-z^2/2} dz \quad \text{и} \quad \Phi_1(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^y e^{-z^2/2} dz.$$

Эти функции связаны с $\overline{\Phi}(y)$ при любом $y \geqslant 0$ следующими равенствами: $\Phi(-y) = \overline{\Phi}(y)$ и $\Phi_1(y) = 1/2 - \overline{\Phi}(y)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

При подготовке сборника задач были использованы, в частности, следующие источники:

1. Агапов Г. И. *Задачник по теории вероятностей.* М.: Высшая школа, 1986.
2. Боровков А. А. *Теория вероятностей.* М.: Наука, 1986.
3. Вентцель А. Д. *Курс теории случайных процессов.* М.: Наука, 1975.
4. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. *Теория вероятностей. Задачи и упражнения.* М.: Наука, 1969.
5. Гиленко Н. Д. *Задачник по теории вероятностей.* М.: Учпедгиз, 1943.
6. Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И. *Теория вероятностей и математическая статистика.* Киев: Вища школа, 1979.
7. Гнеденко Б. В. *Курс теории вероятностей.* М.: Наука, 1969.
8. Емельянов Г. В., Скитович В. П. *Задачник по теории вероятностей и математической статистике.* Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1967.
9. Зубков А. М., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. *Сборник задач по теории вероятностей.* М.: Наука, 1989.
10. Карлин С. *Основы теории случайных процессов.* М.: Мир, 1971.
11. Коршунов Д. А., Чернова Н. И. *Сборник задач и упражнений по математической статистике.* Новосибирск: Изд-во Института математики, 2001.
12. Ламперти Дж. *Вероятность.* М.: Наука, 1973.
13. Мешалкин Л. Д. *Сборник задач по теории вероятностей.* М.: Изд-во Московского ун-та, 1963.
14. Прохоров А. В., Ушаков В. Г., Ушаков Н. Г. *Задачи по теории вероятностей.* М.: Наука, 1986.
15. Севастьянов Б. А. *Курс теории вероятностей и математической статистики.* М.: Наука, 1982.
16. Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения.* Т. 1, 2. М.: Мир, 1984.

17. Чистяков В. П. *Курс теории вероятностей.* М.: Наука, 1982.
18. Ширяев А. Н. *Вероятность.* М.: Наука, 1980.
19. Karr A. F. *Probability.* Springer–Verlag, New York, 1993.
20. Laha R. G., Rohatgi V. K. *Probability Theory.* J. Wiley, New York, 1979.
21. Lukacs E. *Probability and Mathematical Statistics.* Academic Press, Inc., New York, 1971.
22. Rosenblatt M. *Random Processes.* Springer–Verlag, Berlin, 1974.
23. Thomasian A. J. *The Structure of Probability. Theory with Applications.* McGraw-Hill Book Company, New York, 1969.
24. Thompson W. A. *Applied Probability.* Holt, Rinehart and Wiston, Inc., New York, 1969.
25. Tucker H. G. *A Graduate Course in Probability.* Academic Press, Inc., New York, 1967.
26. Whittle P. *Probability.* Penguin Books, Baltimore, 1970.

Учебное издание

Дмитрий Алексеевич Коршунов
Сергей Георгиевич Фосс

СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебное пособие

Подписано в печать 25.11.2003 г.
Формат 60×84 1/16. Офсетная печать.
Уч.-изд. л. 7,5. Тираж 170 экз.
Заказ № 572.

Лицензия ЛР № 021285 от 6 мая 1998 г.
Редакционно-издательский центр НГУ.
630090, Новосибирск-90, ул. Пирогова, 2.