Математическая статистика

Программа курса лекций, план семинарских занятий и список задач для студентов биологического отделения факультета естественных наук

Лектор — Линке Юлиана Юрьевна

I. Теория вероятностей

Пространство элементарных исходов. События. Примеры. Операции над событиями и отношения между ними. Вероятность и ее свойства. Дискретное пространство элементарных исходов. Классическое определение вероятности. Выборки с возвращением и без возвращения, с учетом и без учета порядка. Элементы комбинаторики. Вероятность на числовой прямой и плоскости. Геометрическая вероятность. Задача о встрече. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Независимые события. Схема Бернулли.

Случайные величины. Функции распределения и их свойства. Типы распределений: дискретный, абсолютно непрерывный. Основные семейства распределений. Независимые случайные величины. Формула свертки. Устойчивость по суммированию. Преобразования случайных величин. Математическое ожидание и его свойства. Дисперсия и ее свойства. Коэффициент корреляции и его свойства. Сходимость по вероятности и ее свойства. Закон больших чисел. Теорема Бернулли. Центральная предельная теорема. Теорема Муавра — Лапласа. Теорема Пуассона.

II. Математическая статистика

Выборка. Выборочные характеристики: вариационный ряд, эмпирическая функция распределения, гистограмма, выборочные моменты. Теорема Гливенко — Кантелли. Точечное оценивание неизвестных параметров. Свойства оценок: несмещенность, состоятельность. Свойства выборочных моментов. Метод моментов. Метод максимального правдоподобия. Сравнение оценок. Распределения, связанные с нормальным: хи-квадрат, Стьюдента, Фишера. Лемма Фишера. Теорема о свойствах выборок из нормального распределения. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения. Построение доверительных интервалов с помощью центральной предельной теоремы. Проверка гипотез: постановка задачи, основные понятия. Построение критерия с помощью доверительного интервала. Критерий Колмогорова. Критерий хи-квадрат. Проверка гипотез в случае нескольких выборок. Проверка гипотез о совпадении параметров двух нормальных совокупностей. Элементы регрессионного анализа.

Итоговая контрольная работа.

Литература

1. Лотов В.И. *Теория вероятностей и математическая статистика*. Новосибирск: НГУ, 2006.
2. Чернова Н.И. *Теория вероятностей*. Новосибирск: НГУ, 2007.
3. Чернова Н.И. *Математическая статистика*. Новосибирск: НГУ, 2007.
4. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. *Таблицы математической статистики*. М., 1965.

Примерный план семинарских занятий

1. Комбинаторика. Классическое определение вероятностей.
2. Геометрические вероятности.
3. Независимые события. Условные вероятности. Схема Бернулли.
4. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
5. Контрольная работа №1.
6. Распределения случайных величин.
7. Числовые характеристики случайных величин.
8. Предельные теоремы.
9. Контрольная работа №2.
10. Точечное оценивание. Выборочные характеристики. Свойства оценок.
11. Методы моментов и максимального правдоподобия. Сравнение оценок.
12. Интервальное оценивание.
13. Проверка статистических гипотез.
14. Расчетное задание.

Обработка числовых данных

1. По числовой выборке из нормальной совокупности с параметрами α, σ^2 построить доверительные интервалы для: а) α, если σ^2 известно; б) α, если σ^2 неизвестно; в) σ^2, если α известно; г) σ^2, если α неизвестно.

2. По данным числовым наблюдениям проверить основную гипотезу о равномерности распределения с помощью: а) критерия Колмогорова; б) критерия хи-квадрат.

3. По данным двум выборкам из нормальных совокупностей проверить гипотезу
а) о совпадении дисперсий
б) о совпадении средних, если известно, что дисперсии совпадают.

Задачи по теории вероятностей

1. Ребенок играет с 10 буквами разрезной азбуки А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т. Какова вероятность, что при случайном расположении букв в ряд он получит слово «МАТЕМАТИКА»?
2. Куб, все грани которого окрашены, распиливают на 1000 кубиков. Какова вероятность, что у случайно извлеченного кубика будет ровно две окрашенные грани?
3. В полуфинальном забеге участвуют 15 бегунов, среди которых — 3 товарища. Шесть человек из полуфинала проходят в финал. Какова вероятность, что трое друзей выйдут в финал? Решить задачу двумя способами. (*Указание:* В качестве элементарных исходов выбрать как «кучки», так и «цепочки».)
4. В лотерее n билетов, из которых m выигрышных. Некто приобретает k билетов. Найти вероятность того, что хотя бы один билет окажется выигрышным.
5. Из колоды, насчитывающей 52 карты, наугад извлекают 6 карт. Какова вероятность, что:
   а) среди них окажется король пик;
   б) среди них окажется ровно один король;
   в) среди них окажется ровно пять карт одной масти;
   г) среди них окажется хотя бы одна пиковая карта
   д) все карты будут иметь различные наименования
   е) среди них окажется ровно пять красных карт и четыре картинки;
   ж) среди них будут представители всех четырех мастей?
6. В лифт девятиэтажного дома на первом этаже входят 5 человек. Независимо от других каждый может выйти с равными шансами на любом этаже, начиная со второго. Какова вероятность, что
   а) все выйдут на четвертом этаже;
   б) все пятеро выйдут на одном и том же этаже;
   в) все пятеро выйдут на разных этажах?
7. В чулане находятся n пар ботинок, все пары разных фасонов. Наугад в темноте выбирают r ботинок ($r \leq n$). Какова вероятность, что среди выбранных ботинок
   а) нет ни одной пары
   б) окажется ровно одна пара
   в) окажется ровно две пары
   г) окажется хотя бы одна пара?
8. N человек, среди которых A и B, случайным образом
   а) рассаживаются за круглый стол. Какова вероятность, что A и B сядут рядом, причем B слева от A?
   б) поставлены в ряд. Какова вероятность, что между A и B окажется ровно r человек?
9. На книжной полке произвольным образом расставляются n книг. Какова вероятность, что две фиксированные книги окажутся стоящими рядом?
10. Из урны, содержащей n занумерованных шаров, случайным образом без возвращения достают k шаров. Какова вероятность, что номера шаров будут идти в порядке возрастания?
11. В купейный вагон (9 купе по 4 места) семи пассажирам продано семь билетов. Найти вероятность того, что занятыми оказались только два купе.
12. n различных шаров произвольным образом раскладываются по n ящикам. Какова вероятность, что при этом ровно один ящик окажется пустым?
13. Найти вероятность того, что при бросании четырех игральных костей выпадет хотя бы одна единица.
14. У человека в кармане n ключей, из которых только один подходит к его двери. Ключи последовательно извлекаются (без возвращения) до тех пор, пока не появится нужный ключ. Найти вероятность того, что нужный ключ появится при k-м извлечении.
15. Числа $1, 2, \ldots, n$ расставлены случайным образом. Предполагая, что различные расположения чисел равновероятны, найти вероятность того, что числа 1, 2, 3 расположены в порядке возрастания, но не обязательно рядом.
16. Из чисел 1, 2, ..., 49 наугад выбираются и фиксируются 6 чисел, считающиеся выигрышными. Некто, желающий выиграть, наугад называет свои 6 чисел из 49. Какова вероятность, что среди названных им чисел окажется не менее трех выигрышных?
17. Группа, состоящая из $2n$ девушек и $2n$ юношей, делится произвольным образом на две равные по количеству подгруппы. Найти вероятность того, что в каждой подгруппе окажется поровну юношей и девушек.
18. По k аудиториям произвольным образом расходятся n студентов. Какова вероятность, что в первой аудитории окажется n_1 студентов, во второй – n_2 студентов, ..., в k-й аудитории – n_k студентов, $n_1 + \ldots + n_k = n$?
19. Отрезок длины l ломается в произвольной точке. Какова вероятность, что длина наибольшего обломка превосходит $2l/3$?

20. В квадрат с вершинами (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) наудачу брошена точка. Обозначим X, Y ее координаты. Предполагается, что вероятность попадания в область, лежащую целиком внутри квадрата, зависит лишь от площади этой области и пропорциональна ей.

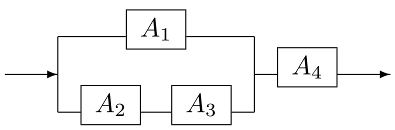
    1) Доказать, что для $0 < u, v < 1$ выполнено $\mathsf{P}(X < u, Y < v) = \mathsf{P}(X < u)\mathsf{P}(Y < v)$.

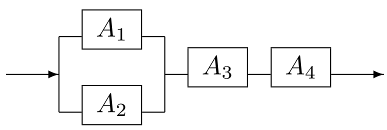
    2) Найти для $0 < z < 1$ а) $\mathsf{P}(|X - Y| < z)$, б) $\mathsf{P}(XY < z)$, в) $\mathsf{P}(\max(X, Y) < z)$, г) $\mathsf{P}(\min(X, Y) < z)$.

    3) Найти $\mathsf{P}(X + Y < z)$ для $0 < z < 2$.

    4) Какова вероятность того, что уравнение $t^2 + Xt + Y = 0$ имеет действительные корни?

21. На отрезок единичной длины произвольным образом брошены две точки, которые делят отрезок на три части. Какова вероятность, что из этих частей можно составить треугольник?
22. Из отрезка [0,1] наугад выбирается число. Какова вероятность, что в десятичной записи этого числа вторая цифра после запятой будет двойкой?
23. Найти вероятность того, что сумма двух наугад взятых положительных чисел, каждое из которых не больше единицы, не превзойдет единицы, а их произведение будет не больше $2/9$.
24. Доказать, что если события A и B независимы, то также независимы события:
    а) A и $\overline{B}$; б) $\overline{A}$ и B; в) $\overline{A}$ и $\overline{B}$.
25. Пусть события A и B независимы. Доказать справедливость следующих равенств:
    а) $\mathbf{P}(A|\overline{B}) = \mathbf{P}(A)$; б) $\mathbf{P}(\overline{A}|B) = \mathbf{P}(\overline{A})$; в) $\mathbf{P}(\overline{A}|\overline{B}) = \mathbf{P}(\overline{A})$.
26. Пусть событие A состоит в том, что в семье
    а) с двумя детьми; б) с тремя детьми
    не более одной девочки, а событие B состоит в том, в семье есть дети обоих полов. Считая вероятность рождения мальчика равной $1/2$, проверить, являются ли события A и B независимыми.
27. Пусть событие A не зависит от самого себя. Доказать, что тогда $\mathsf{P}(A)$ равно 0 или 1.
28. Пусть e_1 и e_2 равны соответственно первым двум цифрам после запятой в задаче 22. Доказать, что события $\{e_1 = 3\}$ и $\{e_2 = 5\}$ независимы.
29. Рассмотрим семью с двумя детьми. Пусть событие A состоит в том, что оба ребенка — мальчики, событие B состоит в том, что старший ребенок — мальчик, а событие C — по крайней мере один из детей является мальчиком. Найти условные вероятности $\mathbf{P}(A|B)$ и $\mathbf{P}(A|C)$.
30. Из колоды карт (36 листов) последовательно вынуты две карты. Найти:
    а) безусловную вероятность того, что вторая карта окажется тузом (неизвестно, какая карта была вынута первой);
    б) условную вероятность того, что вторая карта — туз, если первая карта оказалась тузом.
31. Письмо находится в письменном столе с вероятностью p, причем с равной вероятностью оно может быть в любом из восьми ящиков стола. Мы просмотрели 7 ящиков и письма не нашли. Какова при этом вероятность, что письмо:
    а) находится в восьмом ящике; б) отсутствует в столе?
32. Стрелок A поражает мишень с вероятностью 0.6, стрелок B — с вероятностью 0.5, стрелок C — с вероятностью 0.4. Стрелки дали залп по мишени. Какова вероятность, что ровно две пули попали в цель?
33. События $A_1, \ldots, A_n$ независимы, известны вероятности $p_i = \mathsf{P}(A_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Найти вероятность того, что:
    а) произойдет ровно одно из A_i; б) не произойдет ни одно из A_i; в) произойдет хотя бы одно из A_i.
34. Электрическая цепь состоит из элементов A_k, соединенных по следующей схеме:

    а) 

    б) 

    Вероятность выхода из строя элемента A_k равна p_k. Предполагается, что элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что цепь будет пропускать ток.
35. Двое играют в игру, поочередно бросая монету. Выигравшим считается тот, кто первым откроет герб. Найти вероятность того, что игра закончится на k-м бросании и вероятность выигрыша для игрока, начинающего игру, если
    а) монета симметричная; б) монета несимметричная.
36. Семь раз бросается игральная кость. Какова вероятность того, что
    а) 4 раза выпадет число очков, кратное трем; б) не менее четырех раз выпадет число очков, кратное трем?
37. Считая вероятность рождения мальчика равной $1/2$, найти вероятность того, что в семье с десятью детьми
    а) равное число мальчиков и девочек; б) число мальчиков не меньше 4 и не больше 7.
38. Что вероятнее: выиграть у равносильного противника
    а) 3 партии из 4 или 5 партий из 8; б) не менее 3 партий из 4 или не менее 5 партий из 8?
39. Десять любителей подледного лова рыбы независимо друг от друга произвольным образом размещаются на льду озера, имеющего форму круга радиуса 1 км. Какова вероятность того, что не менее 5 рыбаков расположатся на расстоянии более 200 м от берега?

40. В шар радиуса R наудачу бросаются n точек. Найти вероятность того, что расстояние от центра шара до ближайшей точки будет не меньше a, где $0 < a < R$.
41. Найти вероятность того, что k-й по порядку успех в серии последовательных испытаний Бернулли произойдет на l-м испытании.
42. Найти вероятность того, что в n испытаниях схемы Бернулли с вероятностью успеха p появятся $m+l$ успехов, причем l успехов появятся в последних l испытаниях.
43. При раздаче колоды в 52 карты четырем игрокам один из них три раза подряд не получал тузов. Есть ли у него основания жаловаться на «невезение»?
44. Пусть в условиях задачи 32 известно, что две пули из трех попали в цель. Какова вероятность, что промахнулся C?
45. Из n экзаменационных билетов m «счастливых». Студенты подходят за билетами один за другим. У кого больше вероятность взять «счастливый» билет: у того, кто подошел первым, или у того, кто подошел вторым? Или у того, кто подошел k-ым ($k \leq n$)?
46. Пусть имеется n одинаковых урн. Известно, что урна с номером i содержит N_i шаров, среди которых m_i — белых. Наугад выбирается урна, а из нее вынимается шар. Какова вероятность, что вынут белый шар?
47. Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, переложены 2 вытянутых наудачу шара в урну, содержащую 4 белых и 4 черных шара. Найти вероятность вынуть из второй урны белый шар.
48. По каналу связи может быть передана одна из трех последовательностей букв: $AAAA$, $BBBB$, $CCCC$, причем делается это с вероятностями 0.3, 0.4 и 0.3 соответственно. Известно, что действие шумов на приемное устройство уменьшает вероятность правильного приема каждой из переданных букв до 0.6, а вероятность приема каждой переданной буквы за две другие равны 0.2 и 0.2. Предполагается, что буквы искажаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что была передана последовательность $AAAA$, если на приемном устройстве получено $ABCA$.
49. В ящике находится a новых и b игранных мячей. Из ящика наугад выбирают два мяча и ими играют. После этого мячи возвращают в ящик. Затем из ящика снова берут наугад два мяча. Найти вероятность того, что они будут новыми.
50. Из урны, в которой было $m \geq 3$ белых шаров и n черных, потеряли один шар неизвестного цвета. Для того чтобы определить состав шаров в урне, из нее наудачу были вынуты два шара. Найти вероятность того, что был потерян белый шар, если известно, что вынутые шары оказались белыми.
51. Допустим, что вероятность попадания в цель при одном выстреле равна p, а вероятность поражения цели при k попаданиях равна $1 - q^k$. Какова вероятность того, что цель поражена, если было произведено n выстрелов?
52. В продажу поступают телевизоры трех заводов. Продукция первого завода содержит 20% телевизоров со скрытым дефектом, второго — 10% и третьего — 5%. Какова вероятность приобрести исправный телевизор, если в магазин поступило 30% телевизоров с первого завода, 20% — со второго и 50% — с третьего?
53. Некоторое насекомое с вероятностью $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ откладывает k яиц, где $k = 0, 1, 2, \ldots$, а число λ положительно. Вероятность развития потомка из яйца равна p. Какова вероятность того, что у насекомого будет ровно m потомков?
54. В условиях задачи 53 у насекомого развилось 10 потомков. Какова вероятность, что при этом было отложено 20 яиц?
55. Известно, что 34% людей имеют первую группу крови, 37% — вторую, 21% — третью и 8% — четвертую. Больному с первой группой можно переливать только кровь первой группы, со второй — кровь первой и второй групп, с третьей — кровь первой и третьей групп, и человеку с четвертой группой можно переливать кровь любой группы. Какова вероятность, что произвольно взятому больному можно перелить кровь произвольно выбранного донора?
56. Предположим, что 5% всех мужчин и 0.25% всех женщин — дальтоники. Наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом. Какова вероятность, что это мужчина? Считать, что мужчин и женщин одинаковое число.
57. Игрок выигрывает очко, если при подбрасывании монеты выпадает герб, и проигрывает очко в противном случае. Построить график функции распределения суммарного выигрыша игрока после двух бросаний монеты.
58. Построить график функции распределения числа испытаний Бернулли, производимых до появления первого успеха включительно.
59. В партии из n деталей имеется k стандартных, $k \leq n$. Наудачу отобраны m деталей. Найти таблицу распределения числа стандартных деталей среди отобранных, если
    а) $n = 10, k = 8, m = 2$; б) $n = 6, k = 4, m = 3$.
60. Вероятность того, что стрелок промахнется при одном выстреле, равна $0,2$. Стрелку выдают патроны до тех пор, пока он не промахнется. Найти таблицу распределения числа патронов, выданных стрелку.
61. После ответа студента на вопросы экзаменационного билета экзаменатор задает студенту дополнительные вопросы. Преподаватель прекращает задавать дополнительные вопросы, как только студент обнаруживает незнание заданного вопроса. Вероятность того, что студент ответит на любой заданный вопрос, равна $0,9$. Найти таблицу распределения числа вопросов, которые преподаватель задаст студенту.

62. Плотность распределения случайной величины X задается формулой

$$f_X(y) = \begin{cases} Cy^2, & y \in [0,1], \\ 0, & y \notin [0,1]. \end{cases}$$

Найти постоянную C, функцию распределения случайной величины X и следующие вероятности: $\mathbf{P}(X < 1/2)$, $\mathbf{P}(X > 1/3)$, $\mathbf{P}(X \in [0,1])$, $\mathbf{P}(X \in [1/3, 1/2])$, $\mathbf{P}(X \in [-2,2])$.

63. Случайная величина X задана функцией распределения

$$а)\ F_X(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0, \\ y^2, & 0 < y \le 1, \\ 1, & y > 1; \end{cases} \qquad б)\ F_X(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0, \\ \sin y, & 0 < y \le \pi/2, \\ 1, & y > \pi/2; \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f_X(y)$ случайной величины X.

64. Какова вероятность того, что случайная величина принимает целочисленное значение, если известно, что она имеет нормальное распределение?

65. Дискретное совместное распределение случайного вектора (X, Y) задается таблицей:

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	7/24	1/12	1/8
1	1/8	1/6	5/24

Найти а) одномерные законы распределения X и Y; б) закон распределения $X+Y$; в) закон распределения Y^2.

66. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Найти функции распределения и плотности случайных величин $Y_1 = |X|$, $Y_2 = X^2$.

67. Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке [0,1]. Найти функции распределения и плотности случайных величин $Y_1 = -\ln X$, $Y_2 = 2X + 1$.

68. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром α. Найти распределения случайных величин $Y_1 = [X]$ (целая часть X), $Y_2 = X - [X]$, $Y_3 = X^2$, $Y_4 = \alpha^{-1} \ln X$.

69. Точка бросается в треугольник с вершинами в точках (0, 0), (0, 1), (2, 0). Найти функции распределения и плотности декартовых координат точки.

70. n точек $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимо друг от друга бросаются на отрезок $[a, b]$. Найти функции распределения и плотности распределения случайных величин $Y_1 = \min_{k \le n} X_k$ (крайняя слева точка), $Y_n = \max_{k \le n} X_k$ (крайняя справа точка), Y_k (k-я по счету слева точка, $k = 1, \ldots, n$).

71. Случайные величины X и Y независимы и имеют одно и то же дискретное распределение $\mathsf{P}(X = y_k) = \mathsf{P}(Y = y_k) = p_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Найти $\mathsf{P}(X = Y)$.

72. X и Y независимы, причем $\mathsf{P}(X = 0) = \mathsf{P}(X = 1) = 1/2$, а Y имеет равномерное распределение на отрезке [0, 1]. Найти функции распределения случайных величин $X + Y$ и XY.

73. Используя формулу свертки, найти плотность распределения суммы двух независимых случайных величин, имеющих
а) нормальное распределение с параметрами α, σ^2; б) равномерное на отрезке [0,1] распределение.

74. Доказать, что сумма независимых случайных величин, имеющих распределение Пуассона, вновь распределена по закону Пуассона.

75. Случайные величины X и Y независимы. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $2X - 3Y$, если известно, что $\mathbf{E}X = 3$, $\mathbf{E}Y = 4$, $\mathbf{D}X = 5$, $\mathbf{D}Y = 6$.

76. Найти математические ожидания и дисперсии числа стандартных деталей среди отобранных из задачи 59.

77. Найти математические ожидания и дисперсии случайных величин X и Y из задачи 65.

78. Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины, имеющей:
а) распределение Бернулли;
б) биномиальное распределение;
в) распределение Пуассона;
г) геометрическое распределение;
д) равномерное распределение на отрезке $[a, b]$;
е) показательное распределение;
ж) нормальное распределение с параметрами α, σ^2;

79. Найти математические ожидания и дисперсии случайных величин Y_1 и Y_n, введенных в задаче 70.

80. Найти математические ожидания и дисперсии случайных величин из задач 62, 63.

81. Доказать, что $\mathsf{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(X \geqslant k)$, если известно, что $\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(X = k) = 1$.
82. Найти $\mathsf{E}X^{2017}$, если случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение.
83. Вычислить момент k-го порядка для случайной величины, имеющей:
а) равномерное распределение на отрезке [a, b], б) показательное распределение с параметром α.
84. Диаметр круга измерен приближенно. Считая, что его величина равномерно распределена на отрезке $[a, b]$, найти математическое ожидание и дисперсию площади круга.
85. Бросают n игральных костей. Найти математическое ожидание и дисперсию суммы числа очков, которые выпадут на всех гранях.
86. Пусть независимые случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ имеют одну и ту же функцию распределения $F(x)$. Пусть x — некоторое число такое, что $0 < F(x) < 1$. Обозначим через $\nu(x)$ номер первой случайной величины, значение которой больше или равно x. Доказать, что $\mathbf{E}\nu(x) = (1 - F(x))^{-1}$.
87. Доказать, что если случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы, положительны и одинаково распределены, то при $k \leq n$

$$\mathbf{E}\frac{X_1 + \ldots + X_k}{X_1 + \ldots + X_n} = \frac{k}{n}.$$

88. Вычислить коэффициент корреляции $\rho(X, Y)$ в условиях задачи задачи 65.
89. Найти коэффициент корреляции $\rho(X, X + Y)$, где X и Y независимы и распределены по стандартному нормальному закону.
90. Найти коэффициент корреляции $\rho(X, X^2)$, где X имеет:
а) стандартное нормальное распределение; б) показательное распределение с параметром α.
91. Пусть случайные величины X и Y независимы, причем $\mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(X = -1) = 1/2$, $\mathbf{P}(Y = 1) = \mathbf{P}(Y = -1) = 1/4$ и $\mathbf{P}(Y = 0) = 1/2$. Будут ли случайные величины XY и Y:
а) независимыми; б) некоррелированными?
92. Доказать, что $Y_n \to b$ и $Y_1 \to a$ по вероятности при $n \to \infty$ для соответствующих последовательностей случайных величин, введенных в задаче 70.
93. К чему сходится по вероятности при $n \to \infty$ последовательность $Y_n = \cos\big(X_1 + \cdots + X_n/n\big)$, если $X_1, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, распределенные равномерно на отрезке $[0, \pi]$.
94. Случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ независимы и одинаково распределены, при этом $\mathbf{E}X_1 = a$, $\mathbf{D}X_1 = \sigma^2$. К чему сходится по вероятности последовательность

$$a)\ Y_n = \frac{X_1^2 + \cdots + X_n^2}{n} - \left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right)^2; \qquad б)\ Y_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{X_1^2 + \cdots + X_n^2}?$$

95. Пусть случайная величина Y_n имеет
а) распределение Пуассона с параметром n;
б) биномиальное распределение с параметрами n и p;
в) нормальное распределение с параметрами 0 и n.
Выяснить, существует ли предел по вероятности отношения Y_n/n при $n \to \infty$.
96. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечной дисперсией. Доказать, что для любого b предел $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_1 + \ldots + X_n < b)$ равен либо 0, либо 1, либо 1/2. Найти условия, при которых имеет место каждый случай.
97. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — независимые и одинаково распределенные случайные величины, $\mathsf{E}X_1 = 0$, $\mathsf{D}X_1 < \infty$. Известно, что

$$\mathsf{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \geqslant 1\right) \to \frac{1}{3}$$

при $n \to \infty$. Найти $\mathsf{D}X_1$.
98. Известно, что левши составляют в среднем 1%. Оценить вероятность того, что по меньшей мере четверо левшей окажется среди:
а) 200 человек; б) 10000 человек.
99. Среди семян пшеницы 0,6% семян сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 1000 семян обнаружить:
а) не менее 3 семян сорняков; б) не более 16 семян сорняков; в) ровно 6 семян сорняков.
100. Известно, что дальтоники составляют в среднем 1%. Оценить вероятность того, что среди 100 человек:
а) нет дальтоников; б) дальтоников не менее двух.
101. Известно, что вероятность рождения мальчика приблизительно равна 0.515. Какова вероятность того, что среди 10 тыс. новорожденных окажется мальчиков не больше, чем девочек?

102. Для лица, дожившего до двадцатилетнего возраста, вероятность смерти на 21-м году жизни равна 0.006. Застрахована группа 10000 лиц 20-летнего возраста, причем каждый застрахованный внес 120 рублей страховых взносов за год. В случае смерти застрахованного родственникам выплачивается 10000 рублей. Какова вероятность того, что:
а) к концу года страховое учреждение окажется в убытке;
б) его доход превысит 600000 рублей?

Какой минимальный страховой взнос следует учредить, чтобы в тех же условиях с вероятностью 0.95 доход был не менее 400000 рублей?

103. Известно, что вероятность выпуска сверла повышенной хрупкости (брак) равна 0.02. Сверла укладываются в коробки по 100 шт. Чему равна вероятность того, что в коробке не окажется бракованных сверл? Какое наименьшее количество сверл нужно класть в коробку для того, чтобы с вероятностью, не меньшей 0.9, в ней было не менее 100 исправных?

104. Вероятность выхода из строя за время T одного конденсатора равна 0.2. Определить вероятность того, что за время T из 100 конденсаторов выйдут из строя
а) не менее 20 конденсаторов; б) менее 28 конденсаторов.

105. Некоторая машина состоит из 10 тыс. деталей. Каждая деталь независимо от других деталей может оказаться неисправной с вероятностью p_i, $i = 1, 2, 3$, причем для $n_1 = 1000$ деталей $p_1 = 0.0003$, для $n_2 = 2000$ деталей $p_2 = 0.0002$, и для $n_3 = 7000$ деталей $p_3 = 0.0001$. Машина не работает, если в ней неисправны хотя бы две детали. Найти вероятность того, что машина не будет работать.

106. 1000 раз бросается игральная кость. Найти пределы, в которых с вероятностью, большей 0.95, будет лежать сумма выпавших очков.

107. Студент получает на экзамене 5 с вероятностью 0.2, 4 с вероятностью 0.4, 3 с вероятностью 0.3 и 2 с вероятностью 0.1. За время обучения он сдает 100 экзаменов. Найти пределы, в которых с вероятностью 0.95 лежит средний балл.

108. Урожайность куста картофеля задается следующим распределением:

Урожай в кг	0	1	1.5	2	2.5
Вероятность	0.1	0.2	0.2	0.3	0.2

На участке высажено 900 кустов. В каких пределах с вероятностью 0.95 будет находиться урожай? Какое наименьшее число кустов нужно посадить, чтобы с вероятностью не менее 0.975 урожай был не менее тонны?

109. Игральная кость подбрасывается до тех пор, пока общая сумма очков не превысит 700. Оценить вероятность того, что для этого потребуется более 210 бросаний.

Задачи по математической статистике

1. По наблюдавшимся значениям выборки $\vec{X}$ построить эмпирическую функцию распределения, если
а) $\vec{X} = (2, 4, 0, 1, 2, 3, 0, 0)$; б) $\vec{X} = (0, 3, 4, 1, 0, 2, 0, 2)$; в) $\vec{X} = (2, 4, 2, 0, 1, 0, 4, 3, 0, 1, 0, 2, 3, 0, 2, 0)$.

2. Можно ли по эмпирической функции распределения восстановить выборку и вариационный ряд, если
а) объем выборки известен; б) объем выборки неизвестен.

3. В терминах общей функции распределения элементов выборки найти функцию распределения
а) максисального члена вариационного ряда $X_{(n)}$;
б) минимального члена вариационного ряда $X_{(1)}$;
в) k-ой порядковой статистики $X_{(k)}$.

4. По выборке объема n из распределения Бернулли с параметром p построить график эмпирической функции распределения.

5. Построить оценки неизвестных параметров по методу моментов для следующих распределений: а) B_p, $0 < p < 1$; б) $B_{m,p}$, $0 < p < 1$, m — известно; в) Π_λ, $\lambda > 0$; г) G_p, $0 < p < 1$; д) $U[0, \theta]$, $\theta > 0$; е) $U[\theta - 1, \theta + 1]$, $-\infty < \theta < \infty$; ж) $U[-\theta, \theta]$, $\theta > 0$; з) E_α, $\alpha > 0$; и) $N_{\alpha,1}$, $-\infty < \alpha < \infty$; к) N_{0,σ^2}, $\sigma^2 > 0$; л) N_{α,σ^2}, $-\infty < \alpha < \infty$, $\sigma^2 > 0$; м) $U[a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$.
Исследовать полученные оценки на несмещенность (если возможно) и состоятельность.

6. Построить оценки максимального правдоподобия неизвестных параметров для следующих распределений: а) B_p, $0 < p < 1$; б) Π_λ, $\lambda > 0$; в) $B_{m,p}$, $0 < p < 1$; г) $U[0, \theta]$, $\theta > 0$; д) $U[-\theta, \theta]$, $\theta > 0$; е) $U[-\theta, 0]$, $\theta > 0$; ж) $U[\theta, \theta + 1]$, $-\infty < \theta < \infty$; з) E_α, $\alpha > 0$; и) $N_{\alpha,1}$, $-\infty < \alpha < \infty$; к) N_{0,σ^2}, $\sigma^2 > 0$.
Исследовать полученные оценки на несмещенность и состоятельность.

7. Построить оценку метода моментов и оценку максимального правдоподобия параметра θ, если распределение выборки имеет плотность $f_\theta(y) = 2y/\theta^2$ при $y \in [0, \theta]$, $\theta > 0$.

8. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из смещённого показательного распределения с плотностью

$$f_\beta(y) = \begin{cases} e^{\beta - y} & \text{при } y \geqslant \beta, \\ 0 & \text{при } y < \beta. \end{cases}$$

Для параметра $\beta \in \mathbb{R}$ построить а) оценку по методу моментов; б) оценку максимального правдоподобия. Исследовать полученные оценки на несмещенность и состоятельность.

9. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из некоторого распределения с конечной дисперсией. Доказать, что оценка $S^2 = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ является состоятельной для параметра $\sigma^2 = \mathsf{D}X_1$. Является ли S^2 несмещённой оценкой дисперсии σ^2? Построить оценку, являющуюся одновременно состоятельной и несмещённой оценкой параметра σ^2.
10. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения с конечным вторым моментом. Пусть значение $a = \mathsf{E}X_1$ известно. Проверить на несмещённость и состоятельность следующие оценки неизвестной дисперсии:
а) $\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\big(X_i-\overline{X}\big)^2$; б) $\overline{X^2}-a^2$; в) $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-a)^2$; г) $\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-a)^2$.
11. Пусть θ^* — оценка параметра θ со смещением $b(\theta)=2\theta$. Построить несмещённую оценку параметра θ.
12. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ — выборка из равномерного распределения на отрезке $[0,\theta]$. Сравнить оценки $2\overline{X}$, $X_{(n)}$ и $\frac{n+1}{n}X_{(n)}$ параметра θ в среднеквадратичном смысле.
13. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из равномерного распределения на отрезке $[0,\theta]$. Сравнить оценки $\theta^*_{k,n} = \frac{n+k}{n}X_{(n)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, параметра θ в среднеквадратичном смысле.
14. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из смещённого показательного распределения с плотностью

$$f_\beta(y) = \begin{cases} e^{\beta-y} & \text{при } y \geqslant \beta, \\ 0 & \text{при } y < \beta. \end{cases}$$

Сравнить в среднеквадратичном смысле оценки $\overline{X}-1$, $X_{(1)}$ и $X_{(1)}-1/n$ параметра сдвига β.
15. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ — выборка из равномерного распределения на отрезке $[0,\theta]$, где $\theta\in(0,1]$. Используя неравенство Чебышева, построить доверительный интервал для θ с помощью оценки $2\overline{X}$.
16. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ — выборка из равномерного распределения на отрезке $[0,\theta]$. С помощью статистики $X_{(n)}$ построить точный доверительный интервал уровня $1-\varepsilon$ для параметра θ.
17. С помощью статистики $\overline{X}$ построить асимптотический доверительный интервал уровня $1-\varepsilon$ для неизвестного параметра следующих распределений: а) E_α, $\alpha>0$; б) Π_λ, $\lambda>0$; в) B_p, $0<p<1$; г) $B_{m,p}$, $0<p<1$, m — известно; д) G_p, $0<p<1$; е) $U[0,\theta]$, $\theta>0$.
18. В результате проверки 400 электрических лампочек 40 штук оказалось бракованными. Найти доверительный интервал уровня 0,99 для вероятности брака.
19. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из нормального распределения со средним a и единичной дисперсией. Для проверки основной гипотезы $a=0$ против альтернативы $a=1$ используется следующий критерий: основная гипотеза принимается, если $X_{(n)}<3$, и отвергается в противном случае. Найти вероятности ошибок первого и второго рода.
20. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из нормального распределения со средним a и единичной дисперсией. Рассматриваются две простые гипотезы: основная $a=-1$ и альтернативная $a=0$. Предлагается следующий статистический критерий для проверки этих гипотез: основная гипотеза принимается, если $\overline{X} < -n^\gamma$; в противном случае принимается альтернативная гипотеза. Здесь γ — заранее выбранное вещественное число. Определить все числа γ, при которых критерий является состоятельным.
21. Есть две гипотезы: основная состоит в том, что элементы выборки имеют нормальное распределение, а альтернатива — в том, что элементы выборки имеют распределение Пуассона. Построить критерий, обладающий нулевыми вероятностями ошибок первого и второго рода.
22. Основная гипотеза состоит в том, что данный человек лишён телепатических способностей и угадывает мысли на расстоянии в каждом единичном эксперименте с вероятностью $1/2$. Гипотеза же о наличии телепатических способностей у данного человека принимается, если в 100 независимых однотипных экспериментах по угадыванию мыслей на расстоянии не менее 70 заканчиваются успехом. Чему равна вероятность признать телепатом человека без телепатических способностей?
23. При $n=4040$ бросаниях монеты Бюффон получил 2048 выпадений герба и 1992 выпадений решётки. Совместимо ли это с гипотезой о том, что существует постоянная вероятность $p=1/2$ выпадения герба?
24. Используя конструкции доверительного интервала, построить критерий с (точной или асимптотической) ошибкой первого рода ε для проверки гипотезы $\theta=1$ по выборке из

а) нормального распределения со средним θ и дисперсией 1;
б) нормального распределения со средним 1 и дисперсией θ;
в) показательного распределения с параметром θ;
г) распределения Бернулли с параметром $\theta/2$;
д) распределения Пуассона с параметром θ.

25. По официальным данным в Швеции в 1935 г. родилось 88 273 ребенка, причем в январе родилось 7280 детей, в феврале — 6957, марте — 7883, апреле — 7884, мае — 7892, июне — 7609, июле — 7585, августе — 7393, сентябре — 7203, октябре — 6903, ноябре — 6552, декабре — 7132 ребенка. Совместимы ли эти данные с гипотезой, что день рождения наудачу выбранного человека с равной вероятностью приходится на любой из 365 дней года?