ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ В.А.ТОПОНОГОВА

В.Н. БЕРЕСТОВСКИЙ,
ОМСКИЙ ФИЛИАЛ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ ИМ. С.Л.СОБОЛЕВА СО РАН

В самом начале 1970-х годов Виктор Андреевич Топоногов предложил студентам НГУ следующую интересную задачу.

Задача 1. *На замкнутой верхней полуплоскости декартовой плоскости (x, y) определена непрерывно дифференцируемая вещественная функция f, тождественно равная нулю на прямой $y = 0$, и всюду для f модуль частной производной по y не превосходит модуля частной производной по x. Доказать, что f равна нулю всюду.*

В данной работе дается положительное решение этой задачи и рассматриваются некоторые ее естественные обобщения.

Теорема 1. *Пусть f — непрерывно дифференцируемая вещественная функция на замкнутом полупространстве $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{(x,t) = (x_1, \dots, x_n, t) \in \mathbb{R}^{n+1} | t \geq 0\}$, причем*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}\right| \leq A \left\|\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\right\|, \tag{1}$$

где A — некоторая неотрицательная постоянная, а $\|\cdot\|$— стандартная евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Тогда для каждой точки $u^1 \in \mathbb{R}^{n+1}_+$ существует точка $u^0 \in H \cap K_{u^1}$, где $H = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} | t = 0\}$, $K_{u^1} := \mathbb{R}^{n+1}_+ \cap (u^1 - C)$, а

$$C = \left\{w \in \mathbb{R}^{n+1} | \|w\| \leq \sqrt{A^2+1} w_{n+1}\right\} \tag{2}$$

— острый замкнутый конус, такая, что $f(u^1) = f(u^0)$.

Из теоремы 1 непосредственно вытекают

Следствие 1. *Если в условиях теоремы 1 функция f тождественно равна постоянной c на H, то f равна c всюду.*

Следствие 2. *Задача В.А.Топоногова имеет положительное решение.*

Можно дать следующие эквивалентные формулировки теоремы 1.

Теорема 2. *Если для каждой точки $u \in \mathbb{R}^{n+1}_+$ существует ненулевой вектор $v \in C$ такой, что $df(u)(v) = 0$, то для каждой точки $u^1 \in \mathbb{R}^{n+1}_+$ существует точка $u^0 \in H \cap (u^1 - C)$ такая, что $f(u^1) = f(u^0)$.*

Теорема 3. *Пусть f — непрерывно дифференцируемая вещественная функция на замкнутом полупространстве $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{(x,t) = (x_1, \dots, x_n, t) \in \mathbb{R}^{n+1} | t \geq 0\}$ "пространства-времени Минковского"(M, g) размерности $n+1$, причем для каждой точки $u \in \mathbb{R}^{n+1}_+$ существует непространственноподобный вектор $v \in T_uM$ с условием $df(u)(v) = 0$. Тогда для каждой точки $u^1 \in \mathbb{R}^{n+1}_+$ существует точка $u^0 \in H \cap J^-(u^1)$, где $J^-(u^1)$ – причинное прошлое точки u^1,такая, что $f(u^1) = f(u^0)$.*

Теорема 3 допускает непосредственное обобщение на так называемое *глобально гиперболическое пространство-время.*

Полный текст будет опубликован в журнале Мат. труды за 2010 г.