

СВОЙСТВА КРИВИЗНЫ РИЧЧИ ЛЕВОИНВАРИАНТНЫХ РИМАНОВЫХ МЕТРИК НА РАЗРЕШИМЫХ ГРУППАХ ЛИ.

М. С. Чебарыков

Одной из важных проблем теории однородных римановых многообразий является задача определения возможных значений сигнатуры кривизны Риччи инвариантных метрик на заданном однородном пространстве.

Хорошо известен ряд принципиальных результатов в этом направлении, в частности, сформулированная задача полностью решена для однородных пространств размерности ≤ 4 (см. работы [1,2] и процитированные в них источники). Например, Дж. Милнор в работе [3] определил возможные сигнатуры оператора Риччи левоинвариантных римановых метрик на всех группах Ли размерности ≤ 3 . В статьях [1] и [2] А.Г. Кремлев и Ю.Г. Никоноров получили аналогичный результат для групп Ли размерности 4.

Исследование левоинвариантных римановых метрик на группах Ли удобно производить в терминах метрических алгебр Ли, чем мы и пользуемся.

Авторы работы [2] показали в частности, что оператор Риччи произвольной неунимодулярной разрешимой метрической алгебры Ли размерности ≤ 4 имеет как минимум два отрицательных собственных значения. В этой же работе была выдвинута гипотеза о том, что тем же свойством обладает оператор Риччи неунимодулярной разрешимой метрической алгебры Ли *произвольной размерности*. Настоящий доклад посвящен частичному подтверждению этой гипотезы, а именно, справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть \mathfrak{g} – неунимодулярная разрешимая алгебра Ли имеет производную алгебру $\mathfrak{n} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ размерности ≤ 5 . Тогда для произвольного скалярного произведения Q на \mathfrak{g} оператор Риччи метрической алгебры Ли (\mathfrak{g}, Q) имеет по крайней мере два отрицательных собственных значения.

Теорема 2. Пусть \mathfrak{g} – неунимодулярная разрешимая алгебра Ли размерности ≤ 6 . Тогда для произвольного скалярного произведения Q на \mathfrak{g} оператор Риччи метрической алгебры Ли (\mathfrak{g}, Q) имеет по крайней мере два отрицательных собственных значения.

Докладчик также обнаружил, что оператор Риччи многих неунимодулярных разрешимых метрических алгебр Ли, имеющих производную двухступенчатую нильпотентную алгебру, также имеет как минимум два отрицательных собственных значения. Есть основания полагать, что это утверждение может быть доказано для любой неунимодулярной разрешимой метрической алгебры Ли, имеющей производную двухступенчатую нильпотентную алгебру.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кремлев А. Г., Никоноров Ю. Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Унимодулярный случай // Математические труды. 2008. Т. 11, № 2. С. 155–147.

- [2] Кремлев А. Г., Никоноров Ю. Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Неунимодулярный случай // Математические труды. 2009. Т. 12, № 1. С. 40–116.
- [3] Milnor J. Curvature of left invariant metrics on Lie groups // Adv. Math. 1976. V. 21. P. 293–329.

Рубцовский индустриальный институт Алтайского государственного технического университета им. И.И. Ползунова, Рубцовск, Россия;
E-mail address: Chebarikov@yandex.ru