

# Дискретные аналитические функции в комплексных пространствах и ряды Тейлора<sup>1</sup>

Олег Данилов<sup>2</sup>, Александр Медных<sup>3</sup>

<sup>2</sup>Новосибирский Государственный Университет

<sup>3</sup>Институт математики имени С.Л. Соболева СО РАН

**1°. История вопроса.** Понятие дискретной аналитической функции на гауссовой решетке  $\mathbb{G} = \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$  было введено Р. Ф. Айзеком [5](1941). Он классифицировал эти функции на функции первого и второго рода и исследовал функции первого рода.

Далее Ж. Ферран [4](1944) и Р. Дж. Даффин [6], [16] (1956) создали теорию дискретных аналитических функций второго рода (далее: дискретные аналитические функции). Важные результаты, связанные с поведением дискретных аналитических и гармонических функций на бесконечности были получены С. Л. Соболевым [10](1956). Новые комбинаторные и аналитические идеи принес Д. Цайльбергер [8] (1977). Их развил и обобщил А. Д. Медных [1](1982).

Развитие нелинейной теории дискретных аналитических функций, основанной на использовании шаровых упаковок, началось с работ У. Тёрстона [11](1985) и его учеников [12], [14]. Так была получена аппроксимация с высокой скоростью сходимости в теории конформных отображений римановых поверхностей.

В последние годы, начиная с 2000 г., число работ, связанных с теорией дискретных аналитических функций, заметно возросло [13],[17]. Отметим работы Р. Кэниёна [15] (2002), где была рассмотрена теория функции Грина на ромбических графах; А. И. Бабенко, К. Мерка, Ю.Б. Суриса [9] (2005) об эквивалентности линейного и нелинейного подходов в теории дискретных аналитических функций; С. П. Новикова и И. Дынникова (2005); С. Смирнова (2006) и Х. Киссельмана (2008).

Причина столь пристального интереса к теории — ее богатые приложения к теории отображения римановых поверхностей, квантовой механике и теории кодирования.

**2°. Определение дискретной аналитической функции.** Всюду в дальнейшем  $\mathbb{G} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{Z}\}$  — целочисленная гауссова решетка, а  $\mathbb{G}^+ = \{x + iy \in \mathbb{G} : x \geq 0, y \geq 0\}$  — часть гауссовой плоскости, содержащейся в первом квадранте.

Рассмотрим комплекснозначную функцию  $f$ , определенную на некотором подмножестве  $E \subset \mathbb{G}$ . Если  $f$  определена на квадрате, содержащем

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России"(номер госконтракта 02.740.11.0457), а также программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-6613.2010.1).

точки  $\{z, z+1, z+1+i, z+i\}$ , тогда  $f$  называется дискретной аналитической функцией на этом квадрате, если справедливо соотношение:

$$\frac{f(z+1+i) - f(z)}{i+1} = \frac{f(z+i) - f(z+1)}{i-1} \quad (1)$$

или иначе:

$$\bar{\partial}f(z) = f(z) + if(z+1) + i^2f(z+1+i) + i^3f(z+i) = 0. \quad (2)$$

Если соотношение (1) справедливо для каждого единичного квадрата, принадлежащего множеству  $E \subset \mathbb{G}$ , мы говорим, что  $f$  является дискретной аналитической функцией на  $E$ . Дискретная аналитическая функция, определенная на всем  $\mathbb{G}^+$  называется дискретной целой. Множество всех дискретных аналитических функций на  $E$  и на  $\mathbb{G}^+$  обозначим соответственно  $\mathcal{D}(E)$  и  $\mathcal{D}(\mathbb{G}^+)$ .

### 3°. Примеры дискретных аналитических функций.

1) (Д. Цайльбергер, [8] 1977). Пусть  $\xi \in \mathbb{C}$ ,  $z \in \mathbb{G}^+$ .

$$e(\xi, z) = e(\xi, x, y) = ((1+i)e^{\frac{\xi}{i+1}} - i)^x ((1-i)e^{\frac{-\xi}{i+1}} + i)^y, \quad (3)$$

где  $z = x + iy$ . Очевидно, что  $e(\xi, z_1 + z_2) = e(\xi, z_1) \cdot e(\xi, z_2)$ .

2) Дискретные полиномы в  $\mathcal{D}(\mathbb{G}^+)$  и базис Гамеля в пространстве дискретных полиномов. [8]

$$e(\xi, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi_k(z)}{k!} \xi^k. \quad (4)$$

Полиномы  $\pi_k(z) \in \mathcal{D}(\mathbb{G})$ . Они имеют вид:

$$\pi_k(z) = \left. \frac{\partial^k e(\xi, z)}{\partial \xi^k} \right|_{\xi=0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

В частности,

$$\begin{aligned} \pi_0(z) &= 1, \quad \pi_1(z) = z, \quad \pi_2(z) = z^2 - \frac{i+1}{2}z, \\ \pi_3(z) &= z^3 - \frac{3}{2}(i+1)z^2 + \frac{1}{2}(1+2i)z - iy. \end{aligned} \quad (6)$$

3)  $1, z, z^2, z^3 + x, z^3 - iy$ , биконстанта  $c_1 + (-1)^{x+y}c_2$ , где  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ .

4) Не являются дискретными аналитическими функциями:  $z^3, z^4, \exp z$ .

4°. Основные свойства полиномов  $\{\pi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ . Ключевыми в дальнейшем изложении являются следующие свойства системы полиномов

$$\{\pi_k(z)\}_{k=0}^\infty.$$

$$(A1) \quad \pi_k(0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$(A2) \quad \pi_k(z_1 + z_2) = \sum_{s=0}^k \binom{k}{s} \pi_s(z_1) \pi_{k-s}(z_2),$$

$$(A3) \quad \pi_0(z) \equiv 1, \quad \pi_k(z) = z^k + P_{k-1}(x, y), \quad \text{где } P_{k-1}(x, y) \text{ является многочленом степени } \leq k-1 \text{ относительно } (x, y).$$

$$(A4) \quad \text{Ряд } \sum_{k=0}^\infty a_k \pi_k(z) \text{ сходится абсолютно в } \mathbb{G}^+ \text{ как только}$$

$$F(\xi) = \sum_{k=0}^\infty a_k \left( \frac{\xi}{i+1} \right)^k \text{ сходится в } \mathbb{C}.$$

**5°. Канонический гомоморфизм.** Свойство (A4) позволяет корректно определить гомоморфизм  $\Theta: \mathcal{A}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{G}^+)$  из множества целых функций на множество дискретных целых функций по формуле:

$$\Theta: F(\xi) = \sum_{k=0}^\infty a_k \left( \frac{\xi}{i+1} \right)^k \mapsto f(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k \pi_k(z). \quad (7)$$

Возникают две проблемы:

1) Является ли гомоморфизм  $\Theta$  отображением “на”, то есть всякая ли целая д.а.ф. разлагается в сходящийся ряд Тейлора по псевдостепеням  $\pi_k(z)$ ?

2) Описать ядро  $\text{Ker } \Theta$ , то есть описать все ряды Тейлора, тождественно равные нулю на квадранте  $\mathbb{G}^+$ .

Справедливы следующие результаты.

**Теорема 1** (А. Медных, [1] 1982). *Всякая д.а.ф.  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{G}^+)$  разлагается в сходящийся ряд Тейлора по псевдостепеням  $\pi_k(z)$ :*

$$f(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k \pi_k(z), \quad z \in \mathbb{G}^+. \quad (8)$$

**Теорема 2** (А. Медных, [1] 1982). *Указанное разложение неединственно. Более точно,*

$$f(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k \pi_k(z) \equiv 0, \quad z \in \mathbb{G}^+ \Leftrightarrow F(s) = 0, \quad s \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда имеем  $\Theta(F) = 0 \Leftrightarrow F(\xi) = \sin \pi \xi \cdot G(\xi)$ , где  $G(\xi)$  — любая целая функция. В частности,

$$\mathcal{D}(\mathbb{G}^+) \simeq \mathcal{A}(\mathbb{C}) / \langle \sin \pi \xi \rangle, \quad (9)$$

где  $\langle \sin \pi \xi \rangle = \sin \pi \xi \cdot \mathcal{A}(\mathbb{C})$  — главный идеал в  $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ , порожденный функцией  $\sin \pi \xi$ .

Недавно теоремы 1, 2 были обобщены в следующих направлениях.

Пусть  $U_R = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| < R\}$  — стандартный круг радиуса  $R$  с центром в 0, а  $Q_R = \{x + iy \in \mathbb{G}^+ : \max\{x, y\} < R\}$  — дискретный квадрат. Множество аналитических функций на  $U_R$  и дискретных аналитических функций на  $Q_R$  обозначим соответственно  $\mathcal{A}(U_R)$  и  $\mathcal{D}(Q_R)$ . Справедливы следующие теоремы:

**Теорема 3** (О. Данилов, [2] 2008). *Гомоморфизм  $\Theta: \mathcal{A}(U_R) \rightarrow \mathcal{D}(Q_R)$  является отображением “на”, при этом  $\Theta(F) \equiv 0 \Leftrightarrow F(s) = 0, s \in \mathbb{Z}, |s| < R$ . В этом случае*

$$\text{Ker } \Theta = \langle F_N(\xi) \rangle = F_N(\xi) \cdot \mathcal{A}(U_R), \quad (10)$$

— главный идеал в  $\mathcal{A}(U_R)$ , порожденный функцией  $F_N(\xi)$ :

$$F_N(\xi) = \xi \prod_{k=1}^N (\xi^2 - k^2), \quad (11)$$

$$N = \begin{cases} [R], & R - \text{нечетное}, \\ R - 1, & R - \text{четное}. \end{cases}$$

**Теорема 4** (О. Данилов, А. Медных, [3] 2009). *Пусть  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{G}^+)$ .*

*Тогда существует функция  $F(\xi) = \sum_{|k|=0}^{\infty} a_k \frac{\xi^k}{(1+i)^{|k|}} \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^n)$ , такая, что*

*$f(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} a_k \pi_k(z)$  и ряд абсолютно сходится при всех  $z \in \mathbb{G}^+$ . При этом  $\Theta F = 0 \Leftrightarrow F(s) = 0$  при всех  $s \in \mathbb{Z}^n$ .*

**6°. Схема доказательства основных результатов.** Ключевым моментом в доказательстве теорем 1, 3, 4 является наличие взаимно-обратимых в следующем комбинаторном смысле соотношений. Пусть заданы величины  $\{a_s, b_s\}$ ,  $s = 0, 1, 2, \dots, k$ , при этом имеют место равенства:

$$b_s = \sum_{x=0}^s (-1)^x \binom{s}{x} a_x. \quad (12)$$

Тогда соотношения (12) обратимы и справедливы формулы:

$$a_x = \sum_{s=0}^x (-1)^s \binom{x}{s} b_s. \quad (13)$$

Для указанных ранее  $F(\xi)$  и  $f(z)$  в одномерном случае справедливы равенства:

$$\begin{cases} i^x f(x) = \sum_{s=0}^x (-1)^s \binom{x}{s} (1-i)^s F(s), \\ (1-i)^s F(s) = \sum_{x=0}^s (-1)^x \binom{s}{x} i^x f(x) \end{cases} \quad (14)$$

и

$$\begin{cases} (-i)^y f(iy) = \sum_{s=0}^y (-1)^s \binom{y}{s} (1+i)^s F(-s), \\ (1+i)^s F(-s) = \sum_{y=0}^s (-1)^y \binom{s}{y} (-i)^y f(iy) \end{cases} \quad (15)$$

и их многомерные аналоги:

$$\begin{aligned} F(s) &= (1-i)^{-|s^+|} (1+i)^{-|s^-|} \sum_{k^+=0}^{s^+} \sum_{k^-=0}^{s^-} (-1)^{|k^+|-|k^-|} \\ &\times \binom{s^+}{k^+} \binom{s^-}{k^-} f(k^+ + ik^-), \quad s \in \mathbb{Z}^n, \end{aligned} \quad (16)$$

$$f(k^+ + ik^-) = \sum_{s^+=0}^{k^+} \sum_{s^-=0}^{k^-} c(k^+, k^-, s) F(s), \quad s \in \mathbb{Z}^n, \quad (17)$$

где

$$c(x, y, s) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} \prod_{j=1}^n \frac{((1+i)\zeta_j - i)^{x_j} ((1-i)\zeta_j^{-1} + i)^{y_j}}{\zeta_j^{s_j+1}} d\zeta_j. \quad (18)$$

а  $\Gamma$  — остов любого полидиска, содержащего 0. Поскольку д.а.ф.  $f(z)$  однозначно восстанавливается по своим значениям на остовах  $\delta\mathbb{G}^+$ , совпадающем со всеми неотрицательными полуосями в  $\mathbb{G}^+$ , нам достаточно предъявить

$$\tilde{f} = \sum_{|k|=0}^{\infty} a_k \pi_k(z), \text{ совпадающую с } f(z) \text{ на остовах } \delta\mathbb{G}^+.$$

Соотношения (14), (15), (16) позволяют по заданным начальным значениям на  $\delta\mathbb{G}^+$  получить набор чисел  $\{F(s)\}$ ,  $s \in \mathbb{Z}^n$ . Теория Гельфонда — Шефера [7] в одномерном случае по заданным значениям  $\{F(s)\}$ ,  $s \in \mathbb{Z}$ ,

дает существование целой функции  $F(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left( \frac{\xi}{i+1} \right)^k$ , а канонический

гомоморфизм  $\Theta: \mathcal{A}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{G}^+)$  дает искомую  $\tilde{f}(z)$ . Совпадение функций  $f(z)$  и  $\tilde{f}(z)$  на остовах  $\delta\mathbb{G}^+$  обеспечивается наличием взаимно-обратных соотношений (14), (15), (16). Более трудоемко получается соответствующая

функция  $F(\xi) = \sum_{|k|=0}^{\infty} a_k \frac{\xi^k}{(i+1)^{|k|}} \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^n)$  [3]. Поэтому не удастся получить

описание ядра гомоморфизма  $\Theta$  как в случае теорем 2, 3.

## Список литературы

- [1] *Медных А. Д.* Дискретные аналитические функции и ряд Тейлора // Теория отображений, её обобщения и приложения. Сб. науч. тр. Киев: Наук. думка. 1982. С. 137–144.
- [2] *Данилов О. А.* Интерполяционная формула Лагранжа для дискретной аналитической функции. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2008. Т.8, вып.4. С. 33–39.
- [3] *Данилов О. А., Медных А. Д.* Дискретные аналитические функции многих переменных и формула Тейлора. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2009. Т.9, вып.2. С. 38–46.
- [4] *Ferrand J.* Fonctions Preharmoniques et Fonctions Preholomorphes // Bull. Sci. Math., 2<sup>nd</sup>Ser. 1944. Vol. 68. P. 152–180.
- [5] *Isaacs R. F.* A Finite Difference Function Theory // Univ. Nac. Tucuman. Revista A. 1941. Vol. 2. P. 177–201.
- [6] *Duffin R. J.* Basic Properties of Discrete Analytic Functions // Duke Math. J. 1956. Vol. 23 P. 335–363.
- [7] *Sheffer I. M.* On Entire Function Interpolation // Amer. J. of Math., 1927, Vol. 49, No. 3, P. 329–342.
- [8] *Zeilberger D.* A New Basis for Discrete Analytic Polynomials // J. Austral. Math. Soc. 1977. Vol. 23 (Series A). P. 95–104.
- [9] *Bobenko A. I., Mercat Ch., Suris Y. B.* Linear and nonlinear theories of discrete analytic functions. Integrable structure and isomonodromic Green’s function. //arXiv:math.DG/0402097 v1, 2004.
- [10] *Соболев С. Л.* Об одном разностном аналоге полигармонического уравнения. // ДАН СССР, 1965, 164, н. 1, 54–57.
- [11] *Thurston W. P.* The finite Riemann mapping theorem. Invited talk at international symposium on the occasion of the proof of the Bieberbach conjecture. // Purdue University, 1985.
- [12] *Stephenson K.* Circle packing and discrete analytic function theory. // In: Handbook of complex analysis: geometric function theory, Vol. 1, Amsterdam: North-Holland, 2002, 333–370.
- [13] *Mercat Ch.* Discrete Riemann surfaces and the Ising model. // Commun. Math. Phys., 2001, 218, 177–216.
- [14] *Schramm O.* Circle patterns with the combinatorics of the square grid. // Duke Math. J., 1997, 86, 347–389.

- [15] *Kenyon R.* The Laplacian and Dirac operators on critical planar graphs. // Invent. Math., 2002, 150, 409-439.
- [16] *Duffin R. J.* Potential theory on rhombic lattice. // J. Combinatorial Theory, 1968, 5, 258-272.
- [17] *Bobenko A. I., Hoffman T.* Hexagonal circle patterns and integrable systems. Patterns with constant angles. // Duke Math. J., 2003, 116, 525-566.