РАЗВЕТВЛЕННЫЕ ЦИКЛИЧЕСКИЕ НАКРЫТИЯ ЛИНЗОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Козловская Т.А.[1]
e-mail: konus_magadan@mail.ru

Построение трехмерных гиперболических многообразий из правильных многогранников восходит к работе Вебера и Зейферта [1], где в качестве фундаментального многогранника выступал додекаэдр с двугранными углами $2\pi/5$. Известно, что додекаэдральное гиперболическое многообразие Вебера — Зейферта обладает симметрией пятого порядка, которая позволяет представить это многообразие как 5-листное циклическое накрытие трехмерной сферы, разветвленное над зацеплением Уайтхеда (рис. 1). В [2], как обобщение конструкции Вебера — Зейферта, описаны фундаментальные многогранники многообразий, являющихся n-листными ($n \geqslant 5$) циклическими накрытиями трехмерной сферы, разветвленными над 2-компонентным зацеплением Уайтхеда.

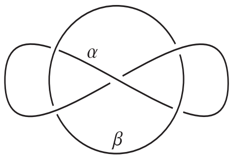

Рис. 1: Зацепление Уайтхеда

Различные способы описания циклических накрытий трехмерной сферы, разветвленных над двухмостовыми узлами и зацеплениями приведены в [3].

В [4] описаны трехмерные гиперболические многообразия, получаемые из $2\pi/3$–икосаэдра. Авторами показано, что одно из них является является трехлистным накрытием линзового пространства $L_{3,1}$, разветвленным над некоторым двухкомпонентным зацеплением. В данной работе предложено обобщение конструкции из [4]. А именно, в терминах фундаментальных многогранников, строится бесконечное семейство трехмерных многообразий, являющихся

[1]Работа поддержана грантами РФФИ № 09-01-0255, 10-01-91056-НЦНИ а и интеграционным грантом СО РАН и УрО РАН.

циклическими накрытиями линзового пространства $L_{3,1}$, разветвленными над двухкомпонентными зацеплениями.

Как видно из рис. 2, икосаэдр, который мы будем обозначать P_3, обладает симметрией третьего порядка. В дальнейшем нам удобно изображать его как на рис. 3, подразумевая, что левый и правый край рисунка должны быть отождествлены. Многогранник P_3 имеет 12 вершин, 30 ребер, 20 граней.

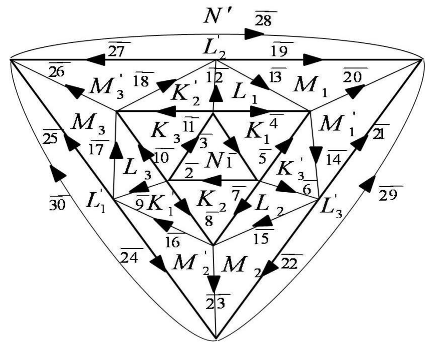

Рис. 2: Многогранник P_3.

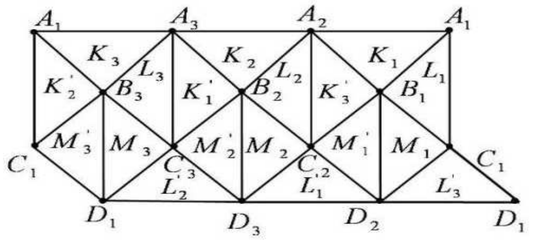

Рис. 3: Многогранник P_3.

Многообразие, построенное в [4], получается при следующем отождествлении его граней:

$$a_1 : K_1 \to K_1' \ \ [A_1A_2B_1 \to C_3A_3B_2]$$

$$
\begin{aligned}
a_2 &: K_2 \to K_2' \ \ [A_2A_3B_2 \to C_1A_1B_3] \\
a_3 &: K_3 \to K_3' \ \ [A_3A_1B_3 \to C_2A_2B_1] \\
b_1 &: L_1 \to L_1' \ \ [A_1B_1C_1 \to D_3C_2D_2] \\
b_2 &: L_2 \to L_2' \ \ [A_2B_2C_2 \to D_1C_3D_3] \\
b_3 &: L_3 \to L_3' \ \ [A_3B_3C_3 \to D_2C_1D_1] \\
c_1 &: M_1 \to M_1' \ \ [C_1B_1D_2 \to B_1D_2C_2] \\
c_2 &: M_2 \to M_2' \ \ [C_2B_2D_3 \to B_2D_3C_3] \\
c_3 &: M_3 \to M_3' \ \ [C_3B_3D_1 \to B_3D_1C_1] \\
d &: \qquad\qquad\quad N \to N'.
\end{aligned}
$$

Рассмотрим многогранник P_n, $n \geqslant 3$, имеющий $6n+2$ граней, $10n$ - ребер и $4n$ - вершин, представленный на рис. 4. В частности, P_3 является икосаэдром.

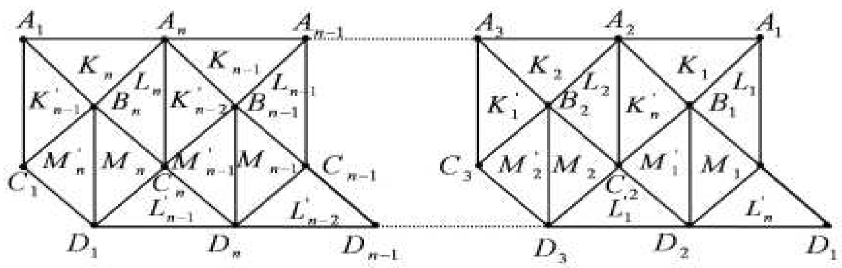

Рис. 4: Многогранник P_n.

Зададим попарное отождествление φ_n граней многогранника P_n:

$$
\begin{aligned}
a_i &: K_i \to K_i' \ \ [A_iA_{i+1}B_i \to C_{i+2}A_{i+2}B_{i+1}] \\
b_i &: L_i \to L_i' \ \ [A_iB_iC_i \to D_{i+2}C_{i+1}D_{i+1}] \\
c_i &: M_i \to M_i' \ \ [C_iB_iD_{i+1} \to B_iD_{i+1}C_{i+1}] \\
d &: \qquad\qquad\quad N \to N',
\end{aligned}
$$

где $i = 1, \ldots, n$ и все индексы берутся по модулю n.

Теорема 1. *При $n \geqslant 3$ псевдомногообразие, получаемое из многогранника P_n отождествлением φ_n, является трехмерным многообразием.*

Указанное многообразие будем далее обозначать M_n.

Теорема 2. *Фундаментальная группа многообразия M_n, $n \geqslant 3$, имеет следующее представление:*

$$\pi_1(M_n) =< a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n; c_1, \dots, c_n; d \,|\, a_1 a_2 \dots a_n = 1,$$
$$a_i b_i^{-1} c_{i+1}^{-1} = 1,\ a_i d^{-1} b_{i+2} = 1,\ b_i c_i^{-2} = 1, \quad i = 1, \dots, n > .$$

Следующий результат показывает, что M_n являются естественными обобщениями многообразия из работы [4].

Теорема 3. *Многообразия M_n, $n \geqslant 3$, являются n-листными циклическими накрытиями линзового пространства $L_{3,1}$, разветвленными над двухкомпонентным зацеплением.*

Список литературы

[1]. *Seifert H., Weber C.* Die beiden Dodekaedräume // Math. Z. 1933. V. 37. P. 237–253.

[2]. *Barbieri E., Cavicchioli A., Spaggiari F.* Some series of honey-comb spaces // Rocky Mountain J. Math. 2009. V. 39, № 2, P. 381–398.

[3]. *Mulazzani M., Vesnin A.* The many faces of cyclic branched coverings of 2-bridge knots and links // Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena 2001. Supplemento al Vol. IL, P. 177–215

[4]. *Cavicchioli A., Spaggiari F., Telloni A.I.* Topology of compact space forms from Platonic solids. I. // Topology Appl. 2009. V. 156. № 4. P. 812–822.