Инварианты Черна — Саймонса конических многообразий над зацеплением Уайтхеда

Н. В. Абросимов [1]

Новосибирский государственный университет

Работа относится к теории трёхмерных многообразий, допускающих введение полной римановой метрики постоянной кривизны, — интенсивно развивающейся области геометрии и топологии. В последние годы объектом активных исследований стали трёхмерные конические многообразия, у которых метрика имеет сингулярности конического типа вдоль узлов и зацеплений. Важной характеристикой геометрической структуры являются такие инварианты, как объём, инвариант Черна — Саймонса, длины сингулярных геодезических.

В работе найдены явные интегральные формулы для вычисления инвариантов Черна — Саймонса для n-листных накрытий $\mathbb{S}^3$, разветвлённых над зацеплением Уайтхеда $W(2\pi/n, 2\pi/n)$ в гиперболическом и сферическом случаях; описан инвариант, подобный инварианту Черна — Саймонса для орбифолдов над зацеплением Уайтхеда $W(2\pi/n, 2\pi/m)$ в гиперболическом и сферическом случаях. Так же получены интегральные формулы для числа $I(W(\alpha, \beta))$ для двухпараметрического семейства конических многообразий над зацеплением Уайтхеда $W(\alpha, \beta)$ в гиперболическом и сферическом случаях.

[1] Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090, Россия.

E-mail: mathematic@gorodok.net

Экстремальные свойства некоторых конформных отображений

Н. Р. Абубакиров [1]

Казанский государственный университет

В теории конформных отображений часто встречаются ситуации, когда функция, отображающая произвольную область на некоторую каноническую, является экстремальной для некоторых функционалов. Классический случай — принцип Дирихле, сформулированный Риманом, который даёт удобное средство для доказательства многих теорем существования в теории аналитических функций. Указанные функционалы могут зависеть от данной области и функции, только от функции и иметь разнообразный вид (см., например, [1, 2]). Нас будет интересовать случай, рассмотренный в статье [3]. Речь идёт об отображении произвольной n-связной области D, содержащей бесконечно удалённую точку, с границей $\partial D = \bigcup\limits_{j=1}^{n} C_j$ при следующих предположениях: 1) граница ∂D разбивается на две непересекающиеся части $\Gamma' = \bigcup\limits_{j=1}^{p} C_j$ и $\Gamma'' = \bigcup\limits_{j=p+1}^{n} C_j$, причём $f(\Gamma')$ есть совокупность конечных вертикальных разрезов, а $f(\Gamma'')$ есть совокупность конечных горизонтальных разрезов; 2) $f(z) = z + a[f]/z + o(1/z)$ при $z \to \infty$.

Для последующего изложения обозначим через $A_p^{\pi/2}$ семейство функций, удовлетворяющих условию 2) и переводящих Γ' в совокупность конечных вертикальных разрезов, а через $'A_p^0$ семейство функций, удовлетворяющих условию 2) и переводящих Γ'' в совокупность конечных горизонтальных разрезов. Тогда в работе [3] доказывается следующая формула: если $f \in A_p^{\pi/2}$, $\Phi \in {}'A_p^0$, то

$$\iint\limits_D |f' - \Phi'|^2 \, dx \, dy \leqslant 2\pi \operatorname{Re}(a[\Phi] - a[f]) \tag{1}$$

После этого доказывается теорема о том, что существует единственная функция из класса $A_p^{\pi/2} \bigcap {}'A_p^0$ для любого p, отображающая любую

[1] Казанский государственный университет, ул. Кремлевская, 18, Казань 420008, Россия.
E-mail: Nail.Abubakirov@ksu.ru

n-связную область D конформно и однолистно на плоскость с горизонтальными и вертикальными разрезами. Доказательство этого утверждения нуждается в уточнении, для чего приходится применять краевую задачу Гильберта.

Далее автор обобщает эту теорему на тот случай, когда каждая граничная компонента C_j разбивается произвольным образом на $2m_j$ частей $\left(C_j = \bigcup\limits_{k=1}^{2m_j} C_{jk}\right)$ и $\Gamma' = \bigcup\limits_{j=1}^{n} \bigcup\limits_{k=1}^{m_j} C_{j2k-1}$, $\Gamma'' = \bigcup\limits_{j=1}^{n} \bigcup\limits_{k=1}^{m_j} C_{j2k}$, после чего вновь утверждается, что существует единственная функция, отображающая область D конформно и однолистно на плоскость так, что Γ' переходит в горизонтальную, а Γ'' — в вертикальную граничную часть. Искомая функция ищется как решение экстремальной задачи $\operatorname{Re} a[f] = \operatorname{Max}$ в классе функций, отображающих Γ' в вертикальную граничную часть (или $\operatorname{Re} a[f] = \operatorname{Min}$ в классе функций, отображающих Γ'' в горизонтальную граничную часть). Доказательство единственности искомой функции опирается на формулу (1), которая в этом случае не имеет места. Построено 2 контрпримера, показывающих неединственность отображения. Например, функция $f_\beta(z) = (z-1)^{1/2}(z-e^{i\beta})^{3/2}/z$, заданная в области $D = \{z : |z| > 1\}$ при $\beta = 2\pi/3$ и $\beta = 4\pi/3$ переводит D в Г-образный разрез, лежащий на вещественной и мнимой оси. Другой пример даёт функция $F_\beta(z) = \int\limits_1^z \frac{(z^2-e^{2i\beta})(z^2-e^{-2i\beta})}{\sqrt{z^4+1}\,z^2}\,dz$, которая при всех $-\pi/2 \leqslant \beta \leqslant 0$ отображает внешность единичного круга на некоторый многоугольник, стороны которого параллельны вещественной и мнимой оси. Нами предложен вариант теоремы, в котором единственность отображающей функции уже имеет место.

Список литературы

[1] *Киселёв А. В.* Экстремальные свойства решений обратных краевых задач // Докл. АН СССР. 1995. Т. 340, № 2. С. 161–163.

[2] *Шиффер М.* Некоторые новые результаты в теории конформных отображений // Дополнение к книге: *Курант Р.* Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности. М.: ИЛ, 1953. С. 234–301.

[3] *Komatu Y., Ozawa M.* Conformal mapping of multiply connected domains I, II // Kodai Math. Sem. Rep. 1951. P. 81–95; 1952. P. 39–44.

Radon Ansatz: Spherical Transform, Wave Equation and Contact Manifolds

Mark L. Agranovsky [1]

Bar-Ilan University

In the context, Radon Ansatz (the terminology due to Ehrenpreis) means the general concept of reconstructions of objects from properties of their restrictions. So, integral geometry studies reconstruction of functions from their integrals over families of manifolds: lines, planes, spheres or more general manifolds.

In the first part of my talk I will focus mostly on the Radon transform over spheres. The problem of injectivity and inversion for this transform is a subject of an active research during last decade. In particular, due to its applications to approximation theory, description of nodal (stationary) sets for the wave equation and newly developing types of tomography (thermoacoustic tomography). A significant recent progress in this problem will be reflected in the talk.

In certain situations the kernel of Radon type transforms will be described as traces of functions of certain class, similarly to characterization of boundary values of holomorphic functions in a plane domain by vanishing of complex moments on the boundary. This circumstance gives a bridge to a bunch of problems about description of holomorphic functions or, more generally, solutions of a PDE in terms of extendibility from families of curves or closed surfaces.

In this connection, Ehrenpreis introduced, in his recently published book "Universality of the Radon Transform", the notion of contact manifolds and formulated a problem of studying the phenomenon when global solution of a PDE can be described in terms of tangency to solutions on a family of manifolds. The second part of the talk will be devoted to results in this direction, in particular to recent results on so-called "strip-problem" for holomorphic functions, as well as to characterization of solutions of elliptic PDE in terms of high order contacts with solutions on parametric families of manifolds. The talk is based on my joint works with Quinto, Globevnik, Narayanan, and works of Ehrenpreis, Kuchment and Ambartsumyan, Tumanov.

[1] Bar-Ilan University, Ramat-Gan 52900, Israel.
E-mail: agranovs@macs.biu.ac.il

О дифференциальных инвариантах трёхмерных многообразий в поле тяготения, допускающем группу движений пятого порядка

Н. П. Азанов [1]

Казахский национальный университет им. аль-Фараби

Для четырёхмерного риманова пространства

$$ds^2 = 2a_{13}e^{-\alpha x^4}\,dx^1\,dx^3 + a_{22}e^{-2\alpha x^4}(dx^2 + x^1\,dx^3)^2 + a_{44}\,dx^{4^2}$$

$(\alpha, a_{ij} = \mathrm{const})$, допускающего группу движений пятого порядка

$$X_1(F) = \frac{\partial F}{\partial x^2}, \quad X_3(F) = -\frac{\partial F}{\partial x^1} + x^3\frac{\partial F}{\partial x^2}, \quad X_4(F) = -x^1\frac{\partial F}{\partial x^1} + x^3\frac{\partial F}{\partial x^3},$$

$$X_2(F) = \frac{\partial F}{\partial x^3}, \quad X_5(F) = \alpha\left(x^1\frac{\partial F}{\partial x^1} + x^2\frac{\partial F}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial F}{\partial x^4},$$

доказывается следующая

Теорема. *В четырёхмерном поле тяготения заданного вида каждое трёхмерное многообразие* ($i = \overline{1,4}$), *заданное уравнением* $x^i = \varphi$ (φ — *функция от* x^k, $k = \overline{1,4}$; $k \neq i$), *имеет относительно группы движений два дифференциальных инварианта*:

$$u_1 = \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^1}\left(x^1\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^2} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial x^3}\right)}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^4}}, \quad u_2 = \alpha x^4 + \ln\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\right) - \ln\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^4}\right).$$

[1] Казахский национальный университет им. аль-Фараби, ул. Масанчи, 39/47, Алматы 480012, Казахстан.
E-mail: azanov_nikolai@hotmail.com

Обзор математических интернет-ресурсов

В. А. Александров [1]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

В докладе будет сделан обзор следующих математических Интернет-ресурсов:

(1) Реферативные базы данных Zentralblatt MATH ⟨`www.emis.de/ZMATH`⟩ и MathSciNet ⟨`www.ams.org/mathscinet`⟩.

(2) Полнотекстовые электронные библиотеки журнальных статей:

(a) РФФИ ⟨`e-library.ru`⟩ (там имеется, несколько сотен зарубежных научных журналов, в том числе несколько десятков математических журналов, например, «Geometriae Dedicata» и «Mathematische Zeitschrift»);

(b) Отделения математики Российской Академии наук ⟨`math.ras.ru`⟩ (там имеется 5 ведущих российских математических журналов, в том числе, «Математический сборник», «Успехи математических наук» и «Математические заметки»);

(c) Европейского математического общества ⟨`www.emis.de/journals`⟩ (там имеется около 70-и математических журналов, например, «Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica» и «Сибирский математический журнал»).

(3) Прочие полезные ресурсы, предоставляемые, прежде всего, Европейским ⟨`www.emis.de`⟩ и Американским ⟨`www.ams.org`⟩ математическими обществами, а также Международным математическим союзом ⟨`www.mathunion.org`⟩.

[1] Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск 630090, Россия.
E-mail: alex@math.nsc.ru

Ideal Boundaries of Busemann Space

P. D. Andreev [1]

Pomor State University

Let X be a locally compact Busemann space, that is complete geodesic metric space with following Busemann property of nonpositivity of curvature. For any triple of points $x, y, z \in X$ and for midpoints m, n of segments $[xy]$, $[xz]$ correspondingly, the inequality $|mn| \leqslant \frac{1}{2}|yz|$ holds. There are two different definition of the ideal boundaries ∂X and ideal closures $\overline{X}$ applicable to the space X. According to the first definition [2], ∂X is a set of equivalence classes of asymptotic rays. We will call this closure $\overline{X}_w$ and boundary $\partial_w X$ *the weak ideal closure* and *weak ideal boundary* in contraposition to the second notion of *coarse* or *metric ideal closure* (see [3]) and *coarse ideal boundary*.

The shortest definition of this boundary is following. The coarse closure $\overline{X}_c$ is the compactification of X corresponding to the pure states of the commutative unital C^*-algebra $\mathcal{G}(X, d)$ generated by constants, functions vanishing at infinity and distance functions of type $d_x(y) = |xy| - |xx_0|$ where x_0 is the marked point which does not influence upon the result. Points of $\partial_c X$ may be considered as limiting functions of distance functions corresponding to escaping to infinity sequences of points mod(constants). Such limiting functions are called *horofunctions*.

The two mentioned above approaches coincide when X is Hadamard manifold, i. e. simply connected nonpositively curved Riemannian manifold, or when X is $CAT(0)$-space. This does not remain true if X is general Busemann space. The theorem holds [1].

Theorem 1. *There is a surjective continuous projection* $\mathrm{Pr}\colon \overline{X}_c \to \overline{X}_w$ *which coincides with identification map* Id_X *on* $X = \overline{X}_c \setminus \partial_c X = \overline{X}_w \setminus \partial_w X$. *The projection of every Busemann function* $\beta_c \in \partial_c X$, $\beta_c(y) = |yc(t)| - t|$, *generated by arc length parameterized geodesic ray* $c\colon [0, +\infty) \to X$, *is the asymptotic class of the ray* c *in* $\partial_w X$.

The proof of the theorem is based and immediately follows from the lemma.

Lemma. *Let the space* X *be pointed in* $x_0 \in X$ *and* $\phi \in \partial_c X$ *be the horofunction with* $\phi(x_0) = 0$. *Then*

1) *The function* ϕ *is bounded on any ball in* X.

---

[1] Pomor State University, pr. Lomonosov, 4, Arkhangelsk 163061, Russia.
E-mail: andreev@math.pomorsu.ru; andreev.pavel@pomorsu.ru
Supported by RFBR, Grant 04–01–00315.

2) *There exists unique ray* $c\colon [0,+\infty) \to X$ *beginning at* $c(0) = x_0$ *with following property. For every* $t > 0$ *the point* $c(t)$ *is the unique point of the ball* $\mathcal{B}(x_0, t)$ *where* $\phi|_{\mathcal{B}(x_0,t)}$ *attains its minimum and* $\min \phi|_{\mathcal{B}(x_0,t)} = -t$.

3) *The weak ideal point* $\xi \in \partial_w X$ *represented by the ray* c *does not depend on the choice of marked point* x_0.

4) *If* $\phi(y) = \lim\limits_{t\to+\infty}(|yc(t)| - t)$ *is a Busemann function defined by the ray* $c\colon \mathbb{R}_+ \to X$*, then its restrictions to balls* $\mathcal{B}(c(0), t)$ *attain their minima in points* $c(t)$.

The simplest counterexample of the space with essentially different boundaries arises from the singular Minkowski space. It is a finitely dimensional Banach space with strictly convex norm. Singularity of the space means that the indicatrix of the norm is strictly convex, but not smooth hypersurface. Directions corresponding to regular (correspondingly singular) points of the indicatrix will be called *regular* (correspondingly *singular*) directions.

Theorem 2. *Let* X *be a singular Minkowski space and* $\phi \in \partial_c X$ *be a horofunction generated with the sequence* $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *running to infinity. Then* ϕ *is the Busemann function iff one of two following situations occurs*:

1) *the sequence* $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *runs away in the regular direction*; *or*

2) *the sequence* $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *runs away in the singular direction and is asymptotic to some* k*-plane* α, $1 \leqslant k < n$, *which contains this direction as regular direction of the norm, restricted to* α*-directing subspace.*

Otherwise ϕ *is a limit of Busemann functions but is not Busemann function itself.*

References

[1] *Andreev P. D.* Ideal closures of Busemann space and singular Minkowski space. (Preprint/arXiv:math.GT/0405121; `http://xxx.lanl.gov`).

[2] *Hotchkiss P. K.* The boundary of Busemann space // Proc. Amer. Math. Soc. 1997. V. 125, № 7. P. 1903–1912.

[3] *Webster C., Winchester A.* Boundaries of hyperbolic metric spaces. (Preprint/arXiv:math.MG/0310101; `http://xxx.lanl.gov`).

Quasiconformal Instability of Disc Bundles with Locally Symmetric Geometry

Boris N. Apanasov [1]

University of Oklahoma and Sobolev Institute of Mathematics

We will discuss non-trivial deformations and quasiconformal instability of Kähler geometry of disc bundles. These non-trivial bundles are locally symmetric rank one manifolds. Their Kähler geometry is associated with natural complex or hyper-complex structures of pinched variable negative sectional curvature and infinite volume. Their fundamental groups are isomorphic to discrete subgroups of $PU(n,1)$, $PSp(n,1)$ or F_4^{-20}. Thin ends of such manifolds play an important role in instability of their deformations. The structure of such thin ends is described by Margulis Lemma and our structural theorem for isometric action on nilpotent groups, see [1]. First results in this direction were obtained in the author's works [2, 3].

References

[1] *Apanasov B., Xie X.* Discrete actions on nilpotent groups and negatively curved spaces // J. Diff. Geom. Appl. 2004. V. 20. P. 11–29.

[2] *Apanasov B.* Deformations and stability in complex hyperbolic geometry. Berkeley, 1997. 39 p. (Preprint/MSRI at Berkeley; 1997–111).

[3] *Apanasov B.* Complex hyperbolic manifolds: rigidity versus flexibility and instability of deformations // Proc. Conf. on Geometric Structures on Manifolds. Seoul: Seoul National Univ., 1999. P. 1–35. (Mathematics Lecture Notes; 46).

[1] Department of Mathematics, University of Oklahoma, Norman, OK 73019, USA.
E-mail: apanasov@ou.edu

Двухвесовые неравенства для свёрточных операторов в пространстве Лебега

Р. А. Бандалиев [1]

Институт математики и механики НАН Азербайджана

В работе доказана теорема об ограниченности оператора свёртки в весовом пространстве Лебега с ядром, удовлетворяющим некоторому варианту условия Хёрмандера.

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{R}^n_0 = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ и $|x| = (x, x)^{1/2}$. Предположим, что ω — положительная, измеримая и вещественная функция, заданная в $\mathbb{R}^n$, т. е., является весовой функцией. Через $L_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$ будем обозначать пространство измеримых на $\mathbb{R}^n$ функций $f(x)$, для которых конечна норма $\|f\|_{L_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)} = \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega(x)\, dx\Big)^{1/p}$, $1 \leqslant p < \infty$. Говорят, что $f \in L_p^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p < \infty$, если $f \in L_p(F)$ на любом замкнутом ограниченном множестве $F \subset \mathbb{R}^n$.

Предположим, что $K \colon \mathbb{R}^n_0 \to \mathbb{R}$, $K \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n_0)$ — некоторая функция, удовлетворяющая условиям:

1) $K(tx) \equiv K(tx_1, \ldots, tx_n) = t^{-n} K(x)$ для любых $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n_0$;

2) $\int\limits_{|x|=1} K(x)\, d\sigma(x) = 0$;

3) $\int\limits_0^1 \frac{w(t)}{t}\, dt < \infty$, где $w(t) = \sup\limits_{|\xi-\eta| \leqslant t} |K(\xi) - K(\eta)|$ при $|\xi| = |\eta| = 1$.

Для функции $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, рассмотрим следующий сингулярный интеграл:

$$Tf(x) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{|x-y|>\varepsilon} K(x-y) f(y)\, dy = \mathrm{p.\,v.} \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x-y) f(y)\, dy, \qquad (1)$$

где последний интеграл понимается в смысле главного значения и $\varepsilon > 0$ — некоторое число.

Имеет место следующая

---

[1] Институт математики и механики Национальной Академии наук Азербайджана, ул. Ф. Агаева, 9, Баку, Az–1141, Азербайджан.

Теорема 1 [1]. *Пусть ядро K сингулярного интеграла* (1) *удовлетворяет условиям* 1)–3). *Предположим, что $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$. Тогда сингулярный интеграл существует для п. в. $x \in \mathbb{R}^n$ и имеет место неравенство $\|Tf\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$, где $C > 0$ не зависит от f.*

Эта теорема была доказана в работе Кальдерона — Зигмунда [1] и носит название теоремы Кальдерона — Зигмунда. Далее, в работе [2] Хёрмандер рассмотрел на ядро сингулярного интеграла (1) более слабое ограничение, а именно,

$$\int\limits_{|x|>2|y|} |K(x-y) - K(x)|\, dx \leqslant C, \tag{2}$$

где $K \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_0^n)$, $C > 0$ — постоянная, не зависящая от y. Заменяя условие 3) на условие (2) при выполнении условий 1), 2), он доказал теорему 1 для сингулярных интегралов с ядрами, удовлетворяющими условию (2). Это условие связано с условием 3) и при выполнении этого условия имеет место неравенство (2) (см. [3]). С другой стороны, сингулярные интегралы, ядра которых не удовлетворяют условию Хёрмандера (2), рассматриваются обширно (например, осцилляционные и другие сингулярные интегралы) (см. [4]).

Предположим, что $K \in L_2(\mathbb{R}^n)$ — некоторая функция, удовлетворяющая следующим условиям:

(K1) $\|\widehat{K}\|_\infty \leqslant C$;

(K2) $|K(x)| \leqslant \dfrac{C}{|x|^n}$;

(K3) существуют функции $A_1, \ldots, A_m \in L_1^{\mathrm{loc}}\big(\mathbb{R}_0^n\big)$ и конечное семейство $\Phi = \{\phi_1, \ldots, \phi_m\}$ существенно ограниченных функций в $\mathbb{R}^n$ таких, что $|\det[\phi_j(y_i))]|^2 \in RH_\infty(\mathbb{R}^{nm})$, $y_i \in \mathbb{R}^n$, $i, j = 1, \ldots, m$;

(K4) для фиксированного $\gamma > 0$ и для любого $|x| > 2|y| > 0$,

$$\left|K(x-y) - \sum_{i=1}^{m} A_i(x)\phi_i(y)\right| \leqslant C\frac{|y|^\gamma}{|x-y|^{n+\gamma}}, \tag{3}$$

где $C > 0$ — некоторая постоянная, $\widehat{K}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)}K(x)\,dx$ — преобразование Фурье функции K. Вообще говоря, функции A_i, ϕ_i, $i = 1, \ldots, m$, определенные на $\mathbb{R}_0^n$, являются комплекснозначными.

Замечание 1. Отметим, что каждое ядро, удовлетворяющее условию (3), удовлетворяет также условию

$$\int\limits_{|x|>2|y|} \Big| K(x-y) - \sum_{i=1}^{m} A_i(x)\phi_i(y) \Big|\, dx \leqslant C \text{ при } |x| > 2|y|. \tag{4}$$

Поэтому условие (4) является слабым ограничением на ядро K чем условие (3).

Отметим, что условия (K1)–(K4) были изложены в работе [4], а условие (4) было рассмотрено в работе [5]. Например, при $m = 1$, $A_1(x) = K(x)$, $\phi_1(y) \equiv 1$ из условия (4) получается условие Хёрмандера (2). Отметим, что в этом смысле условие (4) является обобщением условия Хёрмандера (2). Существуют ещё другие, а именно, условия, которые сильнее чем условие (2) (см. [6, 7]).

Пример. Рассмотрим ядро $K(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \in \mathbb{R}_0$. Эта функция удовлетворяет условиям (K1)–(K4), но не удовлетворяет условиям 1), 2) и условию Хёрмандера (2).

Определение 1 [4]. Говорят, что положительная, измеримая и локально суммируемая функция *удовлетворяет обратному условию Гёльдера* RH_∞, или $g \in RH_\infty(\mathbb{R}^n)$, если $0 < \sup\limits_{x\in B} g(x) \leqslant C\frac{1}{|B|}\int\limits_B g(x)\,dx$, где B — произвольный шар с центром в нуле и $C > 0$ — постоянная, не зависящая от B.

Определение 2 [8]. Говорят, что локально интегрируемая весовая функция ν принадлежит $A_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, если

$$\sup_B \bigg(|B|^{-1} \int\limits_B \nu(x)\,dx \bigg) \bigg(|B|^{-1} \int\limits_B \nu(x)^{1-p'}\,dx \bigg)^{p-1} < \infty,$$

где супремум берётся по всем шарам $B \subset \mathbb{R}^n$ и $p' = \dfrac{p}{p-1}$.

Замечание 2. Отметим, что из условия $RH_\infty(\mathbb{R}^n)$ следует хорошо известное обратное неравенство Гельдера

$$\bigg(\frac{1}{|B|} \int\limits_B g(x)^{1+\varepsilon}\,dx \bigg)^{1/(1+\varepsilon)} \leqslant C \bigg(\int\limits_B g(x)\,dx \bigg),$$

для любого $\varepsilon > 0$. А это условие как известно, характеризует условие $A_p(\mathbb{R}^n)$ (см. [6, с. 403]).

Предположим, что функция K удовлетворяет условиям (K1)–(K4). Для $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ определим сверточный оператор, порождённый ядром K:

$$Af(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)\,dy. \tag{5}$$

Для сверточного оператора (5) доказана следующая

Теорема 2 [4]. *Пусть* $1 < p < \infty$, $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$, *и предположим, что ядро свёрточного оператора* (5) *удовлетворяет условиям* (K1)–(K4). *Тогда имеет место неравенство* $\|Af\|_{L_{p,w}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|f\|_{L_{p,w}(\mathbb{R}^n)}$, *где* $C > 0$ *не зависит от* f.

Отметим, что в невесовом случае при отсутствии условия (K2) и если заменить условие (3) на условие (4), теорема 2 была доказана в [5].

Основные результаты.

Теорема 3. *Пусть* $1 < p < \infty$, *ядро* K *сверточного оператора* (5) *удовлетворяет условиям* (K1)–(K4). *Предположим, что* u, u_1 *— положительные неубывающие функции на* $(0,\infty)$, $\varphi \in A_p(\mathbb{R}^n)$ *— радиальная функция,* $\omega = u\varphi$ *и* $\omega_1 = u_1\varphi$. *Далее, предположим, что весовая пара* (ω,ω_1) *удовлетворяет следующему условию*

$$\sup_{t>0}\left(\int\limits_t^\infty \omega_1(\tau)\tau^{-1-n(p-1)}\,d\tau\right)\left(\int\limits_0^{t/2} \omega(\tau)^{1-p'}\tau^{n-1}\,d\tau\right)^{p-1} < \infty.$$

Тогда существует $C > 0$ *такое, что для любого* $f \in L_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$ *имеет место неравенство*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p\omega_1(|x|)\,dx \leqslant C\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\omega(|x|)\,dx. \tag{6}$$

Теорема 4. *Пусть* $1 < p < \infty$, *ядро* K *свёрточного оператора* (5) *удовлетворяет условиям* (K1)–(K4). *Предположим, что* u, u_1 *— положительные невозрастающие функции на* $(0,\infty)$, $\varphi \in A_p(R^n)$ *— радиальная функция,* $\omega = u\varphi$ *и* $\omega_1 = u_1\varphi$. *Далее, предположим, что весовая пара* (ω,ω_1) *удовлетворяет следующему условию*

$$\sup_{t>0}\left(\int\limits_0^{t/2} \omega_1(\tau)\tau^{n-1}\,d\tau\right)\left(\int\limits_t^\infty \omega(\tau)^{1-p'}\tau^{-1-n(p'-1)}\,d\tau\right)^{p-1} < \infty.$$

Тогда имеет место неравенство (6).

Замечание 3. Отметим, что в случае когда $u = u_1 = 1$ теоремы были доказаны в [4]. Следует отметить также, что теорема 1 при отсутствии условие (K2) и при общем условии (4) была доказана в [5].

Автор благодарен профессору В. С. Гулиеву за постановку задачи и академику А. Д. Гаджиеву за обсуждение полученных результатов.

Список литературы

[1] *Calderon A. P., Zygmund A.* On the existence of certain singular integrals // Acta. Math. 1952. V. 88. P. 85–139.

[2] *Hörmander L.* Estimates for translation invariant operators in L^p spaces // Acta. Math. 1960. V. 104. P. 93–140.

[3] *Стейн И. М.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.

[4] *Trujillo-Gonzalez R.* Weighted norm inequalities for singular integrals operators satisfying a variant of Hormander condition // Comment. Math. Univ. Carol. 2003. V. 44, № 1. P. 137–152.

[5] *Grubb D. J., Moore C. N.* A variant of Hörmander condition for singular integrals // Colloq. Math. 1997. V. 73, № 2. P. 165–172.

[6] *Garcia-Cuerva J., Rubio de Francia J. L.* Weighted norm inequalities and related topics. Amsterdam, 1985. (North-Holland Math. Studies; 116).

[7] *Watson D. K.* Weighted estimates for singular integrals via Fourier transform estimates // Duke Math. J. 1990. V. 60, № 2. P. 389–399.

[8] *Muckenhoupt B.* Weighted norm inequalities for Hardy maximal functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 165. P. 207–226.

Engel-like Identities Characterizing Finite Solvable Groups

Tatiana M. Bandman [1]

Bar-Ilan University, Israel

A subject of the communication is a joint work of T. Bandman, G.-M. Greuel, F. Grunewald, B. Kunyavskiĭ, G. Pfister, and Eu. Plotkin. We characterize solvable groups in the class of finite groups by identities in two variables.

Although the theorem is a purely group-theoretic result, its proof involves surprisingly diverse methods of algebraic topology, algebraic geometry, arithmetic geometry, group theory, and computer algebra. A special role was played by problem oriented software: proofs and even the precise statement would hardly have been found without extensive computer experiments.

We define a sequence: $u_1(x,y) := x^{-2}y^{-1}x$, and inductively $u_{n+1}(x,y) := [\,xu_n(x,y)x^{-1},\, yu_n(x,y)y^{-1}\,]$. Our main result is

Theorem 1. *A finite group G is solvable if and only if for some n the identity $u_n(x,y) \equiv 1$ holds in G.*

The "only if" part of the theorem is trivial. The non-trivial direction of the theorem follows immediately from the following

Theorem 2. *Let G be a finite non-abelian simple group. Then there are $x,\, y \in G$ such that $u_1(x,y) \neq 1$ and $u_1(x,y) = u_2(x,y)$.*

Using Thompson's list of the minimal simple non-solvable groups we only need to prove Theorem 2 for the groups G in the following list. (1) $G = \mathbf{PSL}(2, \mathbb{F}_q)$ where $q \geqslant 4$ ($q = p^n$, p a prime), (2) $G = \mathbf{Sz}(2^n)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$ and odd, (3) $G = \mathbf{PSL}(3, \mathbb{F}_3)$. Here $\mathbb{F}_q$ stands for the finite field with q elements and $\mathbf{Sz}(2^n)$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$) denote the Suzuki groups.

For small groups from this list it is an easy computer exercise to verify Theorem 2. There are for example altogether 44928 suitable pairs x, y in the group $\mathbf{PSL}(3, \mathbb{F}_3)$.

The general idea of our proof can be roughly described as follows. For a group G in the above list, using a matrix representation over $\mathbb{F}_q$ we interpret solutions of the equation $u_1(x,y) = u_2(x,y)$ as $\mathbb{F}_q$-rational points of an algebraic variety. We investigate geometry and topology of this variety in order to use Lang–Weil type estimates for the number of rational points on a variety defined over a finite field, which guarantee the existence of such points for big q.

[1] Department of Mathematics and Statistics, Bar-Ilan University, Ramat Gan 52900, Israel. E-mail: bandman@macs.biu.ac.il

Решение проблемы равенства в группе кос

В. Г. Бардаков [1]

Институт математики им. С. Л. Соболева

В последние годы наряду с классическими узлами и зацеплениями появились и активно изучаются различные их обобщения: сингулярные зацепления, виртуальные зацепления, зацепления со спайками.

Одним из подходов к изучению классических зацеплений является изучение группы кос B_n. Группа кос B_n, $n \geqslant 2$, на n нитях задаётся порождающими элементами $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$ и определяющими соотношениями

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-2, \tag{1}$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad |i - j| \geqslant 2. \tag{2}$$

Группа виртуальных кос VB_n введена в работе [1]. Более экономичная система соотношений (приведённая ниже) найдена в [2]. Группа VB_n порождается элементами σ_i, ρ_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. При этом элементы σ_i порождают группу кос B_n и удовлетворяют соотношениям (1), (2), а элементы ρ_i порождают группу подстановок S_n. Смешанные соотношения имеют вид

$$\sigma_i \rho_j = \rho_j \sigma_i, \quad |i - j| \geqslant 1,$$

$$\rho_i \rho_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \rho_i \rho_{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-2.$$

Теорема А. А. Маркова [3, Ch. 2.2] сводит проблему классификации зацеплений к ряду алгебраических проблем теории групп кос. Аналог теоремы Маркова для виртуальных зацеплений установлен в работе [4].

В предлагаемой работе изучается строение группы виртуальных кос VB_n.

Определим отображение $\nu \colon VB_n \to S_n$ группы VB_n на симметрическую группу S_n действием на порождающих $\nu(\sigma_i) = \nu(\rho_i) = \rho_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, где S_n рассматриваем, как группу, порожденную ρ_i. Ядро этого отображения $\ker(\nu)$ назовем *группой виртуальных крашеных кос* и обозначим символом VP_n. Очевидно, VP_n является нормальной подгруппой индекса $n!$ в

[1] Институт математики им. С. Л. Соболева, пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск 630090, Россия.

E-mail: bardakov@math.nsc.ru

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 02–01–01118).

группе VB_n и группа виртуальных кос является полупрямым произведением группы VP_n и S_n.

Определим элементы

$$\lambda_{i,i+1} = \rho_i \sigma_i^{-1}, \quad \lambda_{i+1,i} = \rho_i \lambda_{i,i+1} \rho_i = \sigma_i^{-1} \rho_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$
$$\lambda_{ij} = \rho_{j-1}\rho_{j-2} \ldots \rho_{i+1} \lambda_{i,i+1} \rho_{i+1} \ldots \rho_{j-2}\rho_{j-1},$$
$$\lambda_{ji} = \rho_{j-1}\rho_{j-2} \ldots \rho_{i+1} \lambda_{i+1,i} \rho_{i+1} \ldots \rho_{j-2}\rho_{j-1}, \quad 1 \leqslant i < j-1 \leqslant n-1.$$

Очевидно, все они лежат в группе VP_n.

Теорема 1. *Группа VP_n порождается элементами λ_{kl}, $1 \leqslant k \neq l \leqslant n$, и определяется соотношениями*

$$\lambda_{ij}\lambda_{kl} = \lambda_{kl}\lambda_{ij}, \quad \lambda_{ki}(\lambda_{kj}\lambda_{ij}) = (\lambda_{ij}\lambda_{kj})\lambda_{ki},$$

где разными буквами обозначены разные индексы.

Введём подгруппы

$$V_i = \langle \lambda_{1,i+1}, \lambda_{2,i+1}, \ldots, \lambda_{i,i+1}; \lambda_{i+1,1}, \lambda_{i+1,2}, \ldots, \lambda_{i+1,i} \rangle, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

группы VP_n. Каждая V_i является подгруппой группы VP_{i+1}. Пусть V_i^* — нормальное замыкание подгруппы V_i в группе VP_{i+1}.

Теорема 2. *Группа VP_n, $n \geqslant 2$, распадается в полупрямое произведение*

$$VP_n = V_{n-1}^* \rightthreetimes VP_{n-1} = V_{n-1}^* \rightthreetimes (V_{n-2}^* \rightthreetimes (\ldots \rightthreetimes (V_2^* \rightthreetimes V_1^*)) \ldots),$$

где V_1^* — свободная группа ранга 2, а V_i^*, $i = 2, 3, \ldots, n-1$, — свободные бесконечно порожденные группы.

Группа кос со спайками WB_n является гомоморфным образом группы VB_n. Строение группы WB_n (которая изоморфна группе сопрягающих автоморфизмов C_n) изучалось в работе [5].

Список литературы

[1] *Kauffman L. H.* Virtual knot theory // Eur. J. Comb. 1999. V. 20, № 7. P. 663–690.

[2] *Vershinin V. V.* On homology of virtual braids and Burau representation // J. Knot Theory Ramifications. 2001. V. 10, № 5. P. 795–812.

[3] *Birman J. S.* Braids, links and mapping class group. Princeton–Tokyo: Univ. Press, 1974.

[4] *Kamada S.* Braid presentation of virtual knots and welded knots. (Preprint/ arXiv:math.GT/0008092; `http://xxx.lanl.gov`).

[5] *Бардаков В. Г.* Строение группы сопрягающих автоморфизмов // Алгебра и логика. 2003. Т. 42, № 5. С. 515–541.

Continued fractions, the group $GL(2,\mathbb{Z})$, and Pisot numbers

V. N. Berestovskii [1] *and Yu. G. Nikonorov* [2]

Omsk Branch of Sobolev Institute of Mathematics,
Rubtsovsk Industrial Institute

This talk is devoted to an exposition of our results from the paper [1]. In this paper we investigate interconnections between continued fractions, some subsemigroups of the group $GL(2,\mathbb{Z})$, Pisot numbers, polynomials, matrices, and recurrent integer sequences. The main tool of this investigation is the matrix calculus which permits from the author's point of view to explain interconnections between these notions much better. Obtained structural results on subsemigroups of the group $GL(2,\mathbb{Z})$ are used to study properties of generalized Fibonacci and Lucas numbers. Also we formulate some unsolved problems.

The paper [1] is divided into eight sections. In the first section we give a necessary information on continued fractions and corresponding matrices, investigate some properties of these matrices. In the second section we discuss Pisot numbers, polynomials and matrices, prove some results on Pisot polynomials. In the third section we prove a series of results on recurrent sequences. On this ground we give a new proof of the classical Pisot–Vijayaraghavan theorem in the fourth section. Some properties of subsemigroups of the group $GL(2,\mathbb{Z})$, connected with continued fractions and Pisot numbers, are investigated in the fifth section. In the sixth section we study asymptotic properties of sequences of linear-fractional transformations, corresponding to infinite continued fractions. In the seventh section we find some relations between the entries of natural powers of (2×2)-matrices. The last, eighth section, is devoted to an investigation of properties of generalized golden sections, Fibonacci and Lucas numbers. Let us remark that (generalized) golden sections are Pisot numbers.

References

[1] *Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G.* Continued fractions, the group $GL(2,\mathbb{Z})$, and Pisot numbers. 2004. (Preprint/MPI; 2004–31).

---

[1] Omsk Branch of Sobolev Institute of Mathematics, ul. Pevtsova, 13, Omsk 644099, Russia.
E-mail: berestov@iitam.omsk.net.ru

The first author was supported by RFBR (grant 02–01–00192).

[2] Rubtsovsk Industrial Institute, ul. Traktornaya, 2/6, Rubtsovsk 658207, Russia.
E-mail: nik@inst.rubtsovsk.ru

The second author was supported by the Council on leading scientific schools of Russian Federation (grant 311.2003.1), RFBR (grant 02–01–01071), and the Russian Ministry of Education (grant E 02–1.0–120).

Пространства дифференцируемых функций переменной гладкости на липшицевых областях

О. В. Бесов [1]

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Изучаются пространства $B^s_{p,q}(G)$ $(1 \leqslant p, q \leqslant \infty)$ и $F^s_{p,q}(G)$ $(1 < p, q < \infty)$ функций, определенных на области $G \subset \mathbb{R}^n$ с липшицевой границей; $s = s(x) > 0$ $(x \in G)$ — переменная гладкость.

С помощью операторов ретракции и коретракции доказываются интерполяционные теоремы, теоремы вложения для таких пространств, а также теоремы о продолжении функций на $\mathbb{R}^n$ с сохранением свойств гладкости.

[1] Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, Москва 119991, Россия.

E-mail: besov@mi.ras.ru

Об экстремальных свойствах пространства Лобачевского

А. А. Борисенко [1], *Д. И. Власенко* [2]

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина

Курье доказал [1], что полная гиперповерхности F^n пространства Лобачевского L^{n+1} кривизны -1, все нормальные кривизны которой $k_n \geqslant 1$, является компактной выпуклой гиперповерхностью при условии, что хотя бы в одной точке все нормальные кривизны строго больше единицы и будет стандартной орисферой, если в каждой точке существует направление, в котором нормальная кривизна достигает 1.

Как показал А. А. Борисенко, в многообразии Адамара (полном односвязном римановом многообразии неположительной кривизны) имеет место экстремальная теорема, обобщающая теорему Курье.

Теорема 1. *Пусть M^{n+1} — $(n+1)$-мерное многообразие Адамара с ограниченными секционными кривизнами $0 > -k_1^2 \geqslant K_\sigma \geqslant -k_2^2$ $(k_1, k_2 > 0)$. Пусть F^n — полная погруженная гиперповерхность, все нормальные кривизны которой не меньше k_2.*

1. *Если хотя бы в одной точке нормальные кривизны касательной орисферы строго меньше нормальных кривизн гиперповерхности в соответствующих направлениях, то F^n — вложенная выпуклая компактная гиперповерхность, диффеоморфная сфере.*

2. *Если во всех точках существует направление, в котором достигается равенство, то гиперповерхность F^n — орисфера, а риманово многообразие M^{n+1} является пространством Лобачевского постоянной кривизны $-k_2^2$.*

Аналог этой экстремальной теоремы для сфер выглядит следующим образом.

Теорема 2. *Пусть в $(n+1)$-мерное многообразие Адамара M с ограниченными секционными кривизнами $0 \geqslant K_\sigma \geqslant -k^2$ $(k > 0)$ погружено*

[1] Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, пл. Свободы, 4, Харьков 61077, Украина.

E-mail: borisenk@univer.kharkov.ua

[2] Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, пл. Свободы, 4, Харьков 61077, Украина.

E-mail: vlasenko@univer.kharkov.ua

полное в индуцированной метрике n-мерное гладкое многообразие F^n размерности $n \geqslant 2$, при этом в каждой точке F^n нормальные кривизны k_n не меньше нормальных кривизн касательной сферы радиуса R_0 ($k \operatorname{cth}(kR_0)$-выпуклое).

1. *Если хотя бы в одной точке нормальные кривизны касательной сферы строго меньше нормальных кривизн гиперповерхности в соответствующих направлениях, то F^n будет вложенной компактной выпуклой гиперповерхностью, диффеоморфной сфере, глобально опирающейся в каждой точке на сферы радиуса R_0 многообразия Адамара M и лежащей в сфере радиуса меньшего R_0.*

2. *Если во всех точках существует направление в котором достигается равенство нормальных кривизн, тогда F^n будет сферой многообразия Адамара M радиуса R_0, которая ограничивает в M шар изометричный шару пространства Лобачевского кривизны $-k^2$.*

Список литературы

[1] *Currier C.* On hypersurfaces of hyperbolic space infinitesimally supported by horospheres // Trans. Amer. Math. Soc. 1989. V. 313, № 1. P. 420–431.

Complex Submanifolds with Extremal Curvature

A. A. Borisenko [1] *and O. V. Leybina* [2]

Karazin Kharkov National University

We introduce an analogue of Chern–Lashof absolute curvature for a complex submanifold in a complex Euclidean space. We present the relation between this curvature and the volume of the Grassmann image of complex submanifold.

We prove that if the holomorphic curvature of complex Grassmann manifold is maximal along the holomorphic planes tangent to the nondegenerate Grassmann image of complex submanifold, then the submanifold is a complex hypersurface.

1. D. Ferus [1] obtained the relation between Chern–Lashof absolute curvature of a submanifold in Euclidean space and the volume of Grassmann image. We consider a generalization of this result for a complex submanifold.

Let $f\colon F^l \to \mathbb{C}^{l+p}$ be a complex l-dimensional submanifold in complex Euclidean $(l+p)$-space. Let T_qF^l and N_qF^l be a tangent space and a normal space of F^l at $q \in F^l$ respectively. We consider the following mappings:

1) The one which assigns to every unit complex $\nu \in N_qF^l$ the point in the complex projective space $\mathbb{C}P^{l+p-1}$.

2) The Grassmann mapping $\Gamma\colon F^l \to \mathbb{C}G(l, l+p)$ which assigns to a point $q \in F^l$ a point $\Gamma(q)$ in the complex Grassmann manifold $\mathbb{C}G(l, l+p)$. The point $\Gamma(q)$ is the l-dimensional complex linear subspace of $\mathbb{C}^{l+p}$ parallel to T_qF^l.

Let A_ν be a complex second fundamental form with respect to the unit complex normal $\nu \in N_qF^l$. Define Chern–Lashof absolute curvature for a *complex submanifold* by $\tau(f,q) = \frac{1}{\sigma_{l+p-1}} \int\limits_{\mathbb{C}P^{p-1}} |\det A_\nu|^2 \, d\sigma_{p-1}$, where $d\sigma_{p-1}$ is the volume form of $\mathbb{C}P^{p-1}$. Let σ_n denote the volume of complex projective space $\mathbb{C}P^n$. Define $\sigma(f,q) = \frac{1}{\sigma_l} \det B$, where $B := \sum\limits_{i=1}^{p} \mathrm{Re}(\overline{A}_{\nu_i} A_{\nu_i})$ with respect to an orthonormal frame $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p$ in N_qF^l. The volume of complex Grassmann image $\mathrm{Vol}(\Gamma(F^l)) = \int\limits_{F^l} \det B \, d\mu$, where μ is a volume form of a submanifold F^l. We prove the following theorems.

---

[1]Department of Geometry, Faculty of Mechanics and Mathematics, Karazin Kharkov National University, Svobody Sq. 4, Kharkov 61077, Ukraine.
E-mail: borisenk@univer.kharkov.ua

[2]Department of Geometry, Faculty of Mechanics and Mathematics, Karazin Kharkov National University, Svobody Sq. 4, Kharkov 61077, Ukraine.
E-mail: leybina@univer.kharkov.ua

Theorem 1. *Assume $l \geqslant 2$. Then $\tau(f,q) \leqslant \sigma(f,q)$. The equality holds if and only if at least one of the following conditions is satisfied.*

1) *The complex dimension of the first normal space at q is equal to* 1.

2) $\det B = 0$, *i.e. complex extrinsic nullity index $\mu_{\mathbb{C}}(q) \neq 0$.*

Theorem 2. *Assume $l \geqslant 2$. If at each point $q \in F^l$ the complex extrinsic nullity index $\mu_{\mathbb{C}}(q) = 0$ and $\tau(f,q) = \sigma(f,q)$, then F^l is a complex hypersurface in $\mathbb{C}^{l+1} \subset \mathbb{C}^{l+p}$.*

Theorem 2 generalizes the result of A. A. Borisenko [2]

2. For $l, p \neq 1$ the sectional curvature $\bar{k}$ of Grassmann manifold $G(l, l+p)$ satisfies $\bar{k} \in [0,2]$. A. A. Borisenko and Yu. A. Nikolaevsky [3] proved that if the Grassmann image $\Gamma(F^l)$ of the submanifold $F^l \subset E^{l+p}$ is such that the sectional curvature of Grassmann manifold $G(l, l+p)$ is maximal ($\bar{k} = 2$) along the planes tangent to $\Gamma(F^l)$, then F^l is 2-dimensional ($l = 2$) minimal submanifold and its normal curvature ellipse at each point is a circle with the center on the surface. In particular, when $p = 2$ the submanifold is a complex curve in $\mathbb{C}^2 = E^4$. According to [4] the holomorphic curvature of complex Grassmann manifold $\mathbb{C}G(l, l+p)$ satisfies $K_{\mathrm{hol}} \in [2/r, 2]$, where $r = \min(l,p)$. If $F^l \subset \mathbb{C}^{l+1}$ is a complex hypersurface, then its Grassmann image is a submanifold of $\mathbb{C}P^l = \mathbb{C}G(l, l+1)$ of constant holomorphic curvature $K_{\mathrm{hol}} \equiv 2$. We present the following result.

Theorem 3. *Let $F^l \subset \mathbb{C}^{l+p}$ be a complex submanifold ($l \geqslant 2$) such that at every point $q \in F^l$ the complex extrinsic nullity index $\mu_{\mathbb{C}}(q) = 0$. If the holomorphic curvature of $\mathbb{C}G(l, l+p)$ is maximal ($K_{\mathrm{hol}} = 2$) along the holomorphic planes tangent to the Grassmann image $\Gamma(F^l)$, then F^l is a complex hypersurface in $\mathbb{C}^{l+1} \subset \mathbb{C}^{l+p}$.*

References

[1] *Ferus D.* On the volume of the generalized Gauss map // Geom. Dedic. 1983. V. 14. P. 237–242.

[2] *Borisenko A. A.* Surfaces whose absolute Chern–Lashof curvature equals the area of the Grassmann image // Mat. Zametki. 1989. V. 46, № 3. P. 9–11. Engl. transl. in Mat. Notes. 1989. V. 46. P. 687–688.

[3] *Borisenko A. A., Nikolaevsky Yu. A.* Surfaces with maximal curvature of Grassmann image // Mat. Zametki. 1990. V. 48, № 3. P. 12–13.

[4] *Wong Y. C.* Sectional curvatures of Grassmann manifolds // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1968. V. 30, № 1. P. 75–79.

Задачи оптимизации временной структуры инвестиционного проекта

Е. М. Бронштейн [1]

Уфимский государственный авиационный технический университет

Под инвестиционным проектом понимается конечное семейство пар (c_i, t_i), где $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ — моменты времени, c_i — выплаты инвестору в соответствующие моменты времени (эти величины ненулевые, среди чисел c_i обязательно есть положительные и отрицательные, отрицательные значения c_i соответствуют платежам, производимым инвестором). Предполагается, что инвестор имеет возможность альтернативного вложения средств в банк, деятельность которого характеризуется непрерывной функцией дисконтирования $f(t)$, неотрицательной и невозрастающей при $t \geqslant 0$ и такой, что $f(0) = 1$. Стабильность финансовых условий, когда банковский процент не меняется во времени, выражается в том, что $f(t) = v^t$, где $v < 1$ — дисконт-множитель. В некоторых случаях инвестору предоставляется право в определенных рамках регулировать время платежей, не изменяя их размеров. В докладе рассмотрены несколько задач оптимизации параметров инвестиционного проекта при заданных платежах и возможности варьирования моментов платежей. Предполагаются следующие ограничения на моменты платежей.

1. Даны числа $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$, смысл которых — минимально допустимое время между последовательными платежами, и временной горизонт T, не позднее которого проект должен завершиться.

2. Даны пары чисел τ_1', τ_1''; τ_2', τ_2''; $\ldots$; τ_n', τ_n'', имеющие смысл минимальных и максимальных допустимых временных промежутков между проектами. При этом, первая выплата должна производиться в нулевой момент.

Рассматриваются следующие характеристики инвестиционного проекта.

1. Чистая приведённая стоимость $NPV = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i f(t_i)$. Необходимо найти график платежей, при котором значение NPV максимально.

[1] Уфимский государственный авиационный технический университет, ул. К. Маркса, 12, Уфа 450000, Россия.
E-mail: brem@soros.bashedu.ru
Работа поддержана РФФИ (проект 04–06–80009).

2. Минимум средств, необходимых для финансирования проекта $MC = -\min \sum_{i=0}^{k} c_i f(t_i)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ при $c_0 < 0$. Это есть сумма, которой рискует инвестор. Необходимо найти график платежей, при котором значение MC минимально.

3. Индекс рентабельности $IR = \dfrac{NPV}{\sum_{i=0}^{n} c_i^- f(t_i)}$, где $a^- = (|a| - a)/2$ — отрицательная часть числа. Необходимо найти график платежей, при котором значение IR максимально.

Рассмотрены свойства оптимальных графиков выплат. Для стабильных финансовых условий получены простые эффективные алгоритмы (линейной сложности или сложности порядка n^2) решения сформулированных задач.

Теорема о необходимом условии частичной ограниченности задачи управления

О. Н. Бурцева [1]

Волгоградский государственный университет

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0})$ — полное вероятностное пространство с фильтрацией, на котором определены такие независимые центрированная пуассоновская мера ν и стандартное одномерное Броуновское движение w, что $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ является естественной фильтрацией, порождённой w и ν, пополненной всеми P-нулевыми элементами из $\mathcal{F}$. Рассмотрим линейное управляемое стохастическое дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} dx(t) &= [A(t)x(t) + B(t)u(t)]\,dt + [C(t)x(t) + D(t)u(t)]\,dw(t) \\ &+ \int\limits_{R^d} [K_1(t,\theta)x(t) + K_2(t,\theta)u(t)]\,\nu(dt,d\theta), \quad x(\tau) = \xi, \qquad t \in [\tau, T], \quad (1) \end{aligned}$$

где τ — $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$-момент остановки, ξ — $\mathcal{F}_\tau$-измеримый n-мерный случайный вектор с конечным вторым моментом; A, B, C, D, K_1, K_2 — $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$-согласованные ограниченные матрицы. Допустимый класс управлений $u(t,\omega)$ является $(\mathcal{F}_t)$-прогрессивно-измеримым процессом для всех $t \in [\tau, T]$. При этих предположениях уравнение (1) имеет единственное сильное решение $x(\cdot)$. Определим функциональную стоимость следующим образом:

$$J(\tau, \xi; u) = E\left\{ \int\limits_\tau^T [x^*(t)\mathbf{Q}(t)x(t) + u^*(t)\mathbf{R}u(t)]\,dt + x^*(T)\mathbf{G}x(T)|\mathcal{F}_\tau \right\},$$

где $Q(\cdot)$, $R(\cdot)$ являются $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$-согласованными ограниченными симметрическими матрицами, G — симметричная $\mathcal{F}_T$-измеримая ограниченная матрица.

Задача оптимального управления в случае, когда K_1, K_2 равны нулю рассматривалась в статье [1].

Введём следующее обозначение: $\Delta[0,T] = \bigcup\limits_{\tau\in[0,T]} [\{\tau\} \times \mathcal{X}_\tau]$, где $\mathcal{X}_\tau$ — класс всех $\mathcal{F}_\tau$-измеримых n-мерных случайных векторов с конечными вторыми моментами.

[1]Волгоградский государственный университет, ул. 2-я Продольная, 30, Волгоград 400062, Россия.
E-mail: sbitoly@mail.ru

Теорема 1. *Предположим, что линейно-квадратическая задача частично ограничена для некоторого* $(\tau,\xi)\in\Delta[0,T]$. *Тогда* $R(T)+D^*(T)GD(T) \geqslant 0$ *для* $\omega \in (V(\tau,\xi) > -\infty)$.

Теорема 2. *Предположим, что линейно-квадратическая задача частично разрешима при* $(\tau,\xi) \in \Delta[0,T]$ *и* R^{-1} *является* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$*-согласованной ограниченной симметрической матрицей. Тогда оптимальное управление уравнения* (1) *имеет вид*:

$$\bar{u}(t) = -R^{-1}(t)\left[B^*(t)\bar{p}(t) + C^*(t)\bar{q}(t) + \int\limits_{R^d} K_1^*\bar{q_1} m\,(d\theta)\right].$$

Список литературы

[1] *Chen S., Yong J.* Stochastic linear quadratic optimal control problems // Appl. Math. Optimization. 2001. V. 43, № 1. P. 21–45.

О неголономных поверхностях двойного вращения в четырёхмерном евклидовом пространстве

О. В. Васильева [1]

Томский государственный университет

Неголономной поверхностью π_3 [1] называют совокупность всех интегральных кривых не вполне интегрируемого уравнения Пфаффа $P_\alpha\,dx^\alpha = 0$ $(\alpha = \overline{1,4})$. Все такие кривые, проходящие через точку $M \in G$, касаются одной гиперплоскости T_3. Она называется касательной плоскостью к π_3 в точке M. Прямая, проходящая через M перпендикулярно T_3, называется нормалью к π_3 в точке M. Мы рассматриваем π_3, нормали которой пересекают две неподвижные взаимноперпендикулярные двумерные плоскости (оси вращения), пересекающиеся в одной точке. Назовём её неголономной поверхностью двойного вращения (н. п. д. в.). Доказаны следующие свойства н. п. д. в.:

1) Для н. п. д. в. все три кривизны 2-го рода вещественны и различны.

2) Линии кривизны 2-го рода н. п. д. в., вдоль которых нормали образуют конус, лежат на двумерных сферах с центрами на плоскостях вращения. Эти линии называются параллелями н. п. д. в.

3) Линии кривизны 2-го рода н. п. д. в., лежащие в двумерных плоскостях, называются меридианами н. п. д. в.

4) Меридианы являются геодезическими прямейшими.

5) Вдоль каждой параллели одна из главных кривизн 2-го рода постоянна.

6) Линия тока векторного поля нормалей н. п. д. в. лежит в одной двумерной плоскости с меридианом и ортогональна ему.

7) Меридиан н. п. д. в. является прямой тогда и только тогда, когда полная кривизна 2-го рода K_2 равна нулю.

8) Если $K_2 = 0$ для н. п. д. в., то ее касательные плоскости образуют трёхпараметрическое семейство.

9) Существует н. п. д. в. нулевой полной кривизны 2-го рода, для которой одна из параллелей перпендикулярна меридиану и тогда эта параллель является окружностью.

Список литературы

[1] *Роговой М. Р.* К дифференциальной геометрии неголономной гиперповерхности // Укр. геом. сб. 1970. Вып. 7. С. 98–108.

[1] ул. Советская, 59, Томск 634029, Россия.
E-mail: vov23@mail.ru

Graph Presentations for Surface Braid Groups

V. Vershinin [1]

Université Montpellier II, and
Sobolev Institute of Mathematics

We study graph presentations for the Artin–Brieskorn braid groups of the type B, singular braid monoids, and the braid groups for the sphere S^2. In particular we prove the following theorem.

Theorem 1. *Let Γ be a normal graph on the sphere S^2 with n vertices. The braid group for the sphere, $B_n(S^2)$, admits a presentation $\langle X_\Gamma \mid R_\Gamma \rangle$, where $X_\Gamma = \{\sigma \mid \sigma$ is an edge of $\Gamma\}$ and R_Γ is the set of following relations*:

- *Disjointedness relations* (DR): *if σ_i and σ_j are disjoint, then $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$;*
- *Adjacency relations* (AR): *if σ_i, σ_j have a common vertex, then $\sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j$;*
- *Nodal relations* (NR): *if $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ have only one common vertex and they are clock-wise oriented, then*
$$\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_1 = \sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2;$$
- *Pseudo-cycle relations* (PR): *if $\sigma_1 \dots \sigma_m$ is a pseudo-cycle and σ_1 is not the start edge or σ_m the end edge of a reversing, then*
$$\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_{m-1} = \sigma_2\sigma_3 \cdots \sigma_m;$$
- *Tree relations* (TR): $\delta_{x,y}(\Delta) = 1$, *for every maximal tree Δ of Γ and every couple of vertices x, y such that they are adjacent to the same edge σ of Δ.*

The expression $\delta_{x,y}(\Delta)$ is defined as follows. Let Δ be a maximal tree of a normal graph Γ on $q+1$ vertices. Then Δ has q edges. Let v_1, v_2 be two vertices such that they are adjacent to the same edge σ of Δ. We set σ by $\sigma(f_1)$. We define the *circuit* $\sigma(f_1) \dots \sigma(f_{2q})$ as follows:

[1] Département des Sciences Mathématiques, Université Montpellier II, Place Eugéne Bataillon, 34095 Montpellier cedex 5, France.
E-mail: vershini@math.univ-montp2.fr
Sobolev Institute of Mathematics, pr. Acad. Koptyug, 4, 630090 Novosibirsk, Russia.
E-mail: versh@math.nsc.ru

— if the vertex v_{j+1} is not uni-valent, then $\sigma(f_{j+1})$ is the first edge on the right of $\sigma(f_j)$ (we consider $\sigma(f_j)$ going from v_j to v_{j+1}) and the vertex v_{j+2} is the other vertex adjacent to $\sigma(f_{j+1})$;

— if the vertex v_{j+1} is uni-valent, then $\sigma(f_{j+1}) = \sigma(f_j)$ and $v_{j+2} = v_j$.

This way we come back to v_1 after we passed two times through each edge of Δ. We set $\delta_{v_1,v_2}(\Delta)$ for the word in X_Γ corresponding to the circuit $\sigma(f_1)\ldots\sigma(f_{2q})$.

On Cyclic Branched Coverings of Genus *g* One-Bridge Knots

A. Yu. Vesnin [1]

Sobolev Institute of Mathematics

Let H_g and H'_g be the two handlebodies of a genus g Heegaard splitting of a closed orientable 3-manifold N and let $S_g = \partial H_g = \partial H'_g$. A link $L \subset N$ is said to be in *b-bridge position* with respect to S_g if: (i) L intersects S_g transversally and (ii) $L \cap H_g$ and $L \cap H'_g$ are both sets of b mutually disjoint properly embedded trivial arcs. This splitting is called a *(g, b)-decomposition of L*. In particular, a $(0, b)$-decomposition is the classical bridge decomposition for links in S^3. A link L is called a *(g, b)-link* if it admits a (g, b)-decomposition.

Given a knot $K \subset N$ in a 3-manifold N, an n-fold cyclic covering $f\colon M \to N$ branched over K is said to be *strongly-cyclic* if the branching index of K is n. This means that the fiber $f^{-1}(x)$ of each point $x \in K$ contains a single point. For knots in S^3, strongly-cyclic branched coverings and cyclic branched coverings are equivalent notions. Strongly-cyclic branched coverings of $(1, 1)$-knots, known also as *Dunwoody manifolds*, were studied in [1].

Here we will discuss conditions on the existence and the uniqueness of strongly-cyclic branched coverings of $(g, 1)$-knots, obtained in [2] in terms of the first integer homology group of an underlying 3-manifold. For example, as a corollary, we get that a knot K in a 3-manifold N admits an unique n-fold strongly-cyclic branched covering, up to equivalence, if and only if $H_1(N)$ is finite and $\gcd(|H_1(N)|, n) = 1$.

References

[1] *Cattabriga A., Mulazzani M.* Strongly-cyclic branched coverings of $(1, 1)$-knots and cyclic presentation of groups // Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 2003. V. 135. P. 137–146.

[2] *Cristofori P., Mulazzani M., Vesnin A.* Cyclic branched coverings of $(g, 1)$-knots. (Preprint/arXiv:math:GT/0402393; http:\\xxx.lanl.gov).

[1] Sobolev Institute of Mathematics, pr. Acad. Koptyug, 4, Novosibirsk 630090, Russia.
E-mail: vesnin@math.nsc.ru

The research was supported by RFBR (grant 02–01–01118) and INTAS (project CalcoMet-GT, Ref. 03–51–3663).

Variational Principle for Construction of Multidimensional Quasi-Isometric Mappings

V. A. Garanzha [1]

Computing Center RAS

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be bounded connected strongly Lipschitz domain. Let $u(x)\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ be a spatial mapping. The function $u(x)$ belongs to feasible set $\widetilde{A}$ when $u(x) \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^n)$, $p > n$, and

$$\det(\nabla u H^{-1}) - t\phi(\nabla u H^{-1}, \det(\nabla u H^{-1})) > 0 \tag{1}$$

a.e. in Ω. Here $\phi\colon \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is given by

$$\phi(S,\eta) = \theta\left(\frac{1}{n}\,\mathrm{tr}(S^T S)\right)^{n/2} + \frac{1}{2}(1-\theta)\left(\bar{v} + \frac{1}{\bar{v}}\eta^2\right), \tag{2}$$

and $0 < \theta < 1$, $0 < t < 1$, $\bar{v} > 0$ are given constants. Function $H(x)\colon \Omega \to \mathbb{R}^{n\times n}$ belongs to $L^\infty(\Omega)$, $\det H(x) > 0$ almost everywhere in Ω, and singular values of $H(x)$ are a.e. uniformly bounded from below and from above. Polyconvex inequality (1) defines a subset of the set of mappings with bounded distortion [1].

Mapping $u(x)$ is sought as the minimizer of the functional $J(u)$ [2]:

$$J(u) = \int\limits_\Omega f(\nabla u H^{-1}(x)) \det H(x)\, dx, \tag{3}$$

$$f(S) = \begin{cases} (1-t)\frac{\phi(S,\det S)}{\det S - t\phi(S,\det S)}, & \text{if } \det S - t\phi(S,\det S) > 0; \\ +\infty & \text{otherwise .} \end{cases}$$

The set of admissible deformations is augmented by boundary conditions. Three sets of boundary conditions are considered. Let $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ and $u(\Gamma_1) = u_0(\Gamma_1)$, where u_0 is given continuous function. We consider the following cases: (a) $\Gamma_1 = \partial\Omega$, (b) Γ_1 is open subset of $\partial\Omega$ with positive measure and (c) $\Gamma_1 = \varnothing$. In the case (c) the admissible set is augmented by constraint $\int\limits_\Omega u\,dx = e$, where $e \in \mathbb{R}^n$ is constant vector.

Theorem 1. *Suppose there exist $v \in \widetilde{A}$ such that $J(v) < +\infty$, then there exist $\bar{u} \in \widetilde{A}$ such that $J(\bar{u}) = \inf\limits_{v\in\widetilde{A}} J(v)$.*

[1] A. A. Dorodnicyn Computing Center RAS, Vavilova 40, Moscow 119991, Russia.
E-mail: garan@ccas.ru

Proof of this theorem follows the idea of the proof of Theorem 7.14 from [3].

Functional (3) can be used to construct optimal quasi-isometric coordinates in two-dimensional manifolds of bounded curvature in the sense of A. D. Alexandrov [4]. In this case existence of $v \in \widetilde{A}$ providing finite value of functional (or existence of initial quasi-isometric flattening) can be proved under certain constraints on negative and positive parts of curvature [4, 5].

Theorem 2. *Let $u_0 \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ be one-to-one continuous mapping and $u_0(\Omega)$ be bounded connected strongly Lipschitz domain. If $u(\partial\Omega) = u_0(\partial\Omega)$ and other conditions of Theorem 1 hold, then minimizing mapping is one-to-one bilipschitz mapping.*

This theorem is a direct consequence of J. Ball inverse function theorem [6] and embedding theorems for Sobolev spaces.

Theorem 3. *Suppose that the set of admissible deformations $\widetilde{A}$ is defined by (1) and inequality $\int\limits_{\Omega} \det \nabla u \, dx \leqslant \operatorname{vol} u(\Omega)$, where vol denotes volume of domain. If other conditions of Theorem 1 hold, then minimizing mapping exists and is one-to-one almost everywhere.*

The proof of this theorem is similar to the proof of Theorem 7.9–1 from [7].

References

[1] *Reshetnyak Yu. G.* Mappings with bounded deformation as extremals of Dirichlet type integrals // Sib. Math. J. 1968. V. 9. P. 487–498.

[2] *Garanzha V. A.* Barrier variational generation of quasi-isometric grids // Comput. Math. Math. Phys. 2000. V. 40, № 11. P. 1617–1637.

[3] *Ball J. M.* Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity // Arch. Rat. Mech. Anal. 1977. V. 63. P. 337–403.

[4] *Reshetnyak Yu. G.* Two-Dimensional Manifolds of Bounded Curvature // Geometry IV: Non-regular Riemannian Geometry. Berlin: Springer, 1993. P. 3–165. (Encyclopaedia of Math. Sci.; 70).

[5] *Bonk M., Lang U.* Bi-Lipschitz parameterization of surfaces // Math. Ann. 2003. V. 327, № 1. P. 135–169. (`DOI 10.1007/s00208-003-0443-8`).

[6] *Ball J. M.* Global invertibility of Sobolev functions and the interpenetration of matter // Proc. Roy. Soc. Edinb. 1981. V. 88A. P. 315–328.

[7] *Ciarlet P. G.* Mathematical Elasticity. V. 1: Three Dimensional Elasticity. New York: Elsevier, 1988. (Stud. Math. Appl.; 20).

О рефлективных подкатегориях полуабелевых категорий

Н. В. Глотко [1], *В. И. Кузьминов* [2]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Пусть $\mathcal{A}$ — полуабелева категория и $\mathcal{B}$ — её полная рефлективная подкатегория. Примерами таких пар категорий служат подкатегория отделимых полных топологических векторных пространств в категории всех топологических векторных пространств, подкатегория абелевых групп без кручения в категории всех абелевых групп. Будем использовать следующие обозначения: $O_C^{\mathcal{A}(\mathcal{B})}$, $M^{\mathcal{A}(\mathcal{B})}$, $M_C^{\mathcal{A}(\mathcal{B})}$, $P^{\mathcal{A}(\mathcal{B})}$, $P_C^{\mathcal{A}(\mathcal{B})}$ — классы всех строгих морфизмов, мономорфизмов, строгих мономорфизмов, эпиморфизмов, строгих эпиморфизмов категории $\mathcal{A}$ (категории $\mathcal{B}$) соответственно; $\mathcal{S}$ — класс всех таких объектов C категории $\mathcal{A}$, для которых найдутся строгий эпиморфизм $p\colon A \to C$ и мономорфизм $u\colon C \to B$ такие, что $A, B \in Ob(\mathcal{B})$. Для объекта $A \in Ob(\mathcal{A})$ символом $\pi_A\colon A \to RA$ обозначается морфизм рефлекции этого объекта в подкатегорию $\mathcal{B}$. Рассмотрим следующие аксиомы, относящиеся к паре категорий $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, где $\mathcal{B}$ — полная рефлективная подкатегория полуабелевой категории $\mathcal{A}$.

П1. $R(\operatorname{Ker}\pi_A) = 0$ *для всех объектов* $A \in Ob(\mathcal{A})$, *которые являются коядрами в* $\mathcal{A}$ *морфизмов категории* $\mathcal{B}$.

П2. *Если* $C \in \mathcal{S}$, $u\colon C \to B$, $B \in Ob(\mathcal{B})$, $u \in M^{\mathcal{A}}$, *то* $Ru \in M^{\mathcal{B}}$.

П3. *Пусть*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\ \nu\ } & B \\ {\scriptstyle\mu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi_B} \\ C & \xrightarrow[\lambda]{} & RB \end{array}$$

— *коуниверсальный квадрат*, $C \in Ob(\mathcal{B})$, $B \in \mathcal{S}$, $\lambda \in M_C^{\mathcal{B}}$. *Тогда* μ — *рефлекция.*

П4. *Если в последовательности* $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$ $\psi = \operatorname{coker}_{\mathcal{A}}\varphi$, $A, B \in Ob(\mathcal{B})$, $\varphi \in M$, *то* $\varphi \in M_C^{\mathcal{B}}$ *тогда и только тогда, когда* $C \in Ob(\mathcal{B})$.

[1] Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск 630090, Россия.
E-mail: glotko@math.nsc.ru

[2] Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск 630090, Россия.
E-mail: kuzminov@math.nsc.ru

Следующие две теоремы дают критерии предабелевости и полуабелевости полной рефлективной подкатегории полуабелевой категории.

Теорема 1. *Полная рефлективная подкатегория $\mathcal{B}$ полуабелевой категории $\mathcal{A}$ предабелева тогда и только тогда, когда выполнены аксиомы* П1 *и* П2.

Теорема 2. *Рефлективная полная подкатегория $\mathcal{B}$ полуабелевой категории $\mathcal{A}$ полуабелева тогда и только тогда, когда выполнены аксиомы* П1 *и* П3.

Определение 1. Пусть A — строгий подобъект объекта B, $A, B \in Ob(\mathcal{A})$. Будем говорить, что подобъект A *замкнут* в B и писать $A \in Cl_{\mathcal{A}}(B)$, если $\pi_{B/A} \in M$.

Пусть $\mathbf{A} = (A^i, d_A^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ — коцепной комплекс категории $\mathcal{B}$.

Определение 2. Будем называть *редуцированными когомологиями* комплекса $\mathbf{A}$ объекты $H_{\mathcal{B}}^i A = \operatorname{Ker}_{\mathcal{B}} d_A^i / \operatorname{Im}_{\mathcal{B}} d_A^{i-1}$, а *нередуцированными когомологиями* — $H_{\mathcal{A}}^i A = \operatorname{Ker}_{\mathcal{A}} d_A^i / \operatorname{Im}_{\mathcal{A}} d_A^{i-1}$.

Пусть $0 \longrightarrow \mathbf{A} \xrightarrow{\varphi} \mathbf{B} \xrightarrow{\psi} \mathbf{C} \longrightarrow 0$ — короткая строго точная последовательность комплексов категории $\mathcal{B}$. Ей соответствуют две полуточные последовательности когомологий:

$$\ldots \longrightarrow H_{\mathcal{A}}^i A \xrightarrow{H_{\mathcal{A}}^i \varphi} H_{\mathcal{A}}^i B \xrightarrow{H_{\mathcal{A}}^i \psi} H_{\mathcal{A}}^i C \xrightarrow{H_{\mathcal{A}}^i \delta} H_{\mathcal{A}}^{i+1} A \longrightarrow \ldots,$$
$$\ldots \longrightarrow H_{\mathcal{B}}^i A \xrightarrow{H_{\mathcal{B}}^i \varphi} H_{\mathcal{B}}^i B \xrightarrow{H_{\mathcal{B}}^i \psi} H_{\mathcal{B}}^i C \xrightarrow{H_{\mathcal{B}}^i \delta} H_{\mathcal{B}}^{i+1} A \longrightarrow \ldots.$$

Нас интересует вопрос, как влияет предположение о строгости одного из дифференциалов комплексов, образующих короткую строго точную последовательность комплексов в рефлективной полной подкатегории полуабелевой категории на свойства других дифференциалов этих комплексов. Ответ на этот вопрос даёт следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть $0 \longrightarrow \mathbf{A} \xrightarrow{\varphi} \mathbf{B} \xrightarrow{\psi} \mathbf{C} \longrightarrow 0$ — короткая строго точная последовательность комплексов категории $\mathcal{B}$. Тогда*

1) *Если $d_A^i \in O_C^{\mathcal{B}}$, то $d_C^{i-1} \in O_C^{\mathcal{B}}$ тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Im}_{\mathcal{A}} H_{\mathcal{A}}^i \varphi \in Cl_{\mathcal{A}}(H_{\mathcal{A}}^i B)$.

2) *Если $d_B^i \in O_C^{\mathcal{B}}$, то $d_A^i \in O_C^{\mathcal{B}}$ тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Im}_{\mathcal{A}} H_{\mathcal{A}}^i \psi \in Cl_{\mathcal{A}}(H_{\mathcal{A}}^i C)$.

3) *Если $d_C^{i-1} \in O_C^{\mathcal{B}}$, то $d_B^{i-1} \in O_C^{\mathcal{B}}$ тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Im}_{\mathcal{A}} H_{\mathcal{A}}^i \delta \in Cl_{\mathcal{A}}(H_{\mathcal{A}}^i A)$.

Closed Trajectories and Hopf Bifurcation in Some Nonlinear Dynamical Systems

V. P. Golubyatnikov [1]

Sobolev Institute of Mathematics

We continue our study of 3-dimensional models of gene networks with negative feedback regulation realized by biochemical kinetic nonlinear dynamical systems ([1]):

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \alpha(1 + x_{i-1}^{\gamma})^{-1} - x_i, \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \alpha(1 + x_{i-1}^{\gamma} + x_{i-2}^{\mu})^{-1} - x_i, \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \alpha(1 + x_{i-1}^{\gamma} x_{i-2}^{\mu})^{-1} - x_i, \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \alpha - (1 + x_{i-1}^{\gamma})x_i, \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \alpha - (1 + x_{i-1}^{\gamma} + x_{i-2}^{\mu})x_i \tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \alpha - (1 + x_{i-1}^{\gamma} x_{i-2}^{\mu})x_i. \tag{6}$$

Here $\alpha > 0$, $\gamma > \mu > 1$, $x_i \geqslant 0$; $i = 1, 2, 3$ and $i-1$, $i-2$ are considered $\mod 3$. All these dynamical systems correspond to different regulation mechanisms in the gene networks and are symmetric with respect to cyclic permutation of the variables $x_1 \to x_2 \to x_3 \to x_1$.

We find stationary points of all these systems and conditions of existence of a closed trajectory in the systems (1), (4). At the bifurcation points of these two systems, the corresponding Hopf cycles in the central manifolds are unique and stable. We prove the existence of the Hopf cycles for other systems listed above. The bifurcation points are contained in the diagonal $x_1 = x_2 = x_3$ of the cube $Q = [0, \alpha] \times [0, \alpha] \times [0, \alpha]$ in the positive octant of $\mathbb{R}^3$.

We have demonstrated that the standard numerical algorithms, used in **MAPLE–6**, do not give realistic results in the case of the system (5) near

---

[1] Sobolev Institute of Mathematics, pr. Acad. Koptyug, 4, Novosibirsk 630090, Russia.
E-mail: glbtn@math.nsc.ru
The work was supported by the leading scientific schools grant 311.2003.1 of President of Russian Federation and RFBR grant 03–01–00328.

its stable stationary points, which are located in some small neighborhoods of the vertices $(\alpha, 0, 0)$, $(0, \alpha, 0)$, $(0, 0, \alpha)$ of the cube Q.

Similar models of the gene networks can be constructed and similar results can be obtained in the higher-dimensional euclidean spaces.

The author is indebted to V. F. Likhoshvai, K. V. Storozhuk, and E. P. Volokitin for helpful discussions and assistance.

References

[1] *Golubyatnikov V. P., Likhoshvai V. A., Fadeev S. I., Matushkin Yu. G., Ratushny A. V., Kolchanov N. A.* Mathematical and computer modeling of genetic networks // Proc. 6-th Int. Conf. Human and Computer–2003. The University of Aizu, 2003. P. 200–205.

On Minima of a Functional of the Gradient: Upper and Lower Solutions

Vladimir V. Goncharov [1] *and António Ornelas* [2]

Universidade de Évora

We consider the variational problem $(\mathcal{P})$ of minimization of the integral functional

$$J(u) = \int_{\Omega} g(\nabla u(x))\, dx$$

over all scalar Sobolev functions subject to affine boundary condition $u(x) = \langle v, x\rangle$, $x \in \partial\Omega$. Here Ω is an open domain from $\mathbb{R}^n$, $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ is a lower semicontinuous not necessarily convex function verifying some superlinear growth assumption, and $\langle\cdot,\cdot\rangle$ means the inner product in $\mathbb{R}^n$. Continuing investigations of A. Cellina, G. Friesecke, M. Sychev and the first authors' works, we study various solutions of the problem $(\mathcal{P})$ and of the relaxed one which are continuous w.r.t. the parameter v.

So, we have explicitly constructed the maximal and minimal solutions of the relaxed problem which are lipschitz continuous in v and, probably, are the solutions of $(\mathcal{P})$ itself for those v for which solution exists. Observe that as well already known $(\mathcal{P})$ can have or do not have solutions depending of the position of the vector v in the geometrical structure of the epigraph of the bipolar function g^{**}.

Furthermore, using the technique of polynomial approximations and Baire's Category Theorem, we have proved that each solution of the relaxed problem continuously depending on v can be uniformly approximated by solutions of the original problem $(\mathcal{P})$ keeping continuity in the boundary data. Let us notice that in difference of the previous works we use here more direct compactness argument instead of Vitali's Covering Theorem.

[1] Departamento de Matemática, Universidade de Évora, rua Romão Ramalho 59, P/7000/671, Évora, Portugal.
E-mail: goncha@uevora.pt

[2] Departamento de Matemática, Universidade de Évora, rua Romão Ramalho 59, P/7000/671, Évora, Portugal.

On Minimal Isotropic Surfaces in Pseudo-Euclidean Space

V. A. Gorkavyy [1]

B. Verkin Institute for Low Temperature Physics

Let F^2 be a regular two-dimensional surface in pseudo-Euclidean space $\{M^n, d\sigma^2 = (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - \ldots - (dx^n)^2\}$. Let $ds^2 = g_{ij}\, du^i\, du^j$ stand for the metric form on F^2 induced from $d\sigma^2$. The surface F^2 is called isotropic iff $g_{11}g_{22} - (g_{12})^2$ vanishes; in this case local coordinates u^1, u^2 on F^2 may be chosen in such a particular way that the coordinate curves $u^2 = \text{const}$ in F^2 are null-curves of M^n, so $ds^2 = g_{22}\,(du^2)^2$.

A regular map $\varphi\colon F^2 \to \widetilde{F}^2$ is called a CG-transformation if it satisfies two following conditions: 1) φ is conformal, i.e. $d\tilde{s}^2 = \Lambda^2\, ds^2$; 2) planes tangent to F^2 and to $\widetilde{F}^2$ at corresponding points are parallel. Translations and homotheties are trivial CG-transformations. Generically, a surface in M^n does not admit non-trivial CG-transformations. In fact, a non-isotropic surface $F^2 \subset M^n$ admits a non-trivial continuous CG-deformation iff the mean curvature of F^2 vanishes. Such a surface is presented by a position-vector $x = \rho(u^1, u^2)$ solving the following equations:

1) space-like case

$$\partial_{u^1u^1}\rho + \partial_{u^2u^2}\rho = 0, \quad \langle \partial_{u^1}\rho, \partial_{u^1}\rho\rangle = \langle \partial_{u^2}\rho, \partial_{u^2}\rho\rangle, \quad \langle \partial_{u^1}\rho, \partial_{u^2}\rho\rangle = 0;$$

2) time-like case

$$\partial_{u^1u^1}\rho - \partial_{u^2u^2}\rho = 0, \quad \langle \partial_{u^1}\rho, \partial_{u^1}\rho\rangle = -\langle \partial_{u^2}\rho, \partial_{u^2}\rho\rangle, \quad \langle \partial_{u^1}\rho, \partial_{u^2}\rho\rangle = 0.$$

As for CG-transformations of isotropic surfaces, the situation is more subtle. The following statement allows us to distinguish a class of particular isotropic surfaces in M^n which can be interpreted as isotropic surfaces of vanishing mean curvature.

Theorem. *Let $F^2 \subset M^n$ be an isotropic surface, $x = \rho(u^1, u^2)$ be a position-vector of F^2 such that the coordinate lines $u^2 = \text{const}$ are null-curves of M^n, i.e. $\langle \partial_{u^1}\rho, \partial_{u^1}\rho\rangle = 0$, $\langle \partial_{u^1}\rho, \partial_{u^2}\rho\rangle = 0$, so $ds^2 = g_{22}(u^2)^2$. The surface F^2 admits a continuous non-trivial CG-transformation if and only if either*

1) $\partial_{u^1u^1}\rho = \alpha\partial_{u^1}\rho + \beta\partial_{u^2}\rho$, or

[1] B. Verkin Institute for Low Temperature Physics, 47 Lenin ave., Kharkiv 61103, Ukraine. E-mail: gorkaviy@ilt.kharkov.ua

2) $\partial_{u^1u^2}\rho = \alpha\partial_{u^1}\rho + \beta\partial_{u^2}\rho + \gamma\partial_{u^1u^1}\rho$, *where* $\partial_{u^1}\rho$, $\partial_{u^2}\rho$, $\partial_{u^1u^1}\rho$ *are linearly independent.*

Note that in the first case F^2 is an isotropic surface ruled by geodesic null-curves of M^n. In the second case the parameterization u^1, u^2 can be specialized in such a way that $\gamma = 0$, so $\rho(u^1, u^2)$ solves a Laplace equation $\partial_{u^1u^2}\rho = \alpha\partial_{u^1}\rho + \beta\partial_{u^2}\rho$. The described particular classes of isotropic surfaces in M^n may be viewed as a natural analogue of time- and space-like surfaces with vanishing mean curvature.

Note also that an isotropic surface in M^n, $n = 3, 4$, always admits a continuous non-trivial CG-deformation, since $\partial_{u^1}\rho$, $\partial_{u^2}\rho$, $\partial_{u^1u^1}\rho$ and $\partial_{u^1u^2}\rho$ are linearly dependent because of dimension n. On the other hand, if $\partial_{u^1}\rho$, $\partial_{u^2}\rho$, $\partial_{u^1u^1}\rho$, $\partial_{u^1u^2}\rho$ are linearly independent, that is a generic case for $n > 4$, when F^2 does note admit non-trivial CG-deformations. Thus, for $n > 4$ the isotropic surfaces that admits continuous non-trivial CG-deformations form a really particular class of isotropic surfaces.

Problem. *To construct a variational problem, whose extremal points are the "minimal" isotropic surfaces in* M^n *described above.*

Topology of Separate Continuity on the Square of the Čech-Complete Space

Ya. S. Grinshpon [1]

Tomsk State University

Let X and Y be an arbitrary completely regular topological spaces. In [1] Knight, Moran and Pym have determined a topological space $X \mathbin{\widetilde{\otimes}} Y$ on the product $X \times Y$ with the properties: for any completely regular space Z the mapping $f\colon X \times Y \to Z$ is separately continuous if and only if $f\colon X \mathbin{\widetilde{\otimes}} Y \to Z$ is continuous, and space $X \mathbin{\widetilde{\otimes}} Y$ is always completely regular.

There appears a natural problem to describe the classes of the spaces X and Y for which the space $X \mathbin{\widetilde{\otimes}} Y$ is or is not normal. Some of such classes of spaces were constructed in [1, 2].

In this work the spaces of the form $X \mathbin{\widetilde{\otimes}} X$ where X is the space containing Čech-complete subspace are considered. By using the results the following statements are proved.

Theorem 1. *Let X contain a Čech-complete non-scattered space and the space $X \times X \times X$ be hereditarily normal. Then the space $X \mathbin{\widetilde{\otimes}} X$ is not normal.*

Theorem 2. *Let X be a metrizable by a complete metric space. Then the space $X \mathbin{\widetilde{\otimes}} X$ is normal if and only if the space X is scattered.*

References

[1] *Knight C. J., Moran W., Pym J. S.* The topologies of separate continuity. II // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1972. V. 71. P. 307–319.

[2] *Grinshpon Ya. S.* Normality of the completely regular topology of separate continuity // Bull. Tomsk State Univ. 2003. V. 280. P. 27–30.

[1] pr. Lenina, 12, Tomsk 634028, Russia.
E-mail: grinshpon@mail.ru

Погружение гиперповерхностей семимерного конформно-октавного пространства

П. Я. Грушко [1], *М. А. Гаер* [2]

Иркутский государственный университет,
Иркутский государственный технический университет

Пусть Ca — алгебра октав (алгебра чисел Кэли), группа Ли G_2 — её группа автоморфизмов [1]. Добавив скалярные матрицы, получим конформный аналог — группу $COG_2 = \{\lambda \cdot A : \lambda \in \mathbb{R}^+,\ A \in G_2\}$. Ортогональное дополнение к единице в алгебре Ca является семимерным векторным пространством, инвариантным относительно действия групп G_2 и COG_2. Такое пространство со структурной группой COG_2 будем называть *конформно-октавным векторным пространством.* В этом пространстве с точностью до скалярного множителя определено векторное $[\cdot,\cdot]$ и скалярное $\langle\cdot,\cdot\rangle$ произведения, связанные для любых элементов x и y этого пространства соотношениями:

$$\begin{cases} \langle [x,y], y\rangle = 0, \\ [[x,y],y] = \langle x,y\rangle y - \langle y,y\rangle x, \end{cases}$$

которые легко получить из выполняющегося в алгебре октав тождества альтернативности $a(ab) = (aa)b$.

Пусть S — произвольная гиперповерхность конформно-октавного пространства, U — открытое множество в $\mathbb{R}^6$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}(U)$ — погружение такое, что $\mathbf{r}(U) = S$. Тогда $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2, u^3, u^4, u^5, u^6)$ — параметризация поверхности S и $d\mathbf{r} = \sum\limits_{i=1}^{6} r_{u_i}\, du_i$. Присоединим к каждой точке поверхности S репер $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_7\}$ следующим образом: положим $\mathbf{f}_i = \mathbf{r}_{u_i}$, $i = \overline{1,6}$, а вектор $\mathbf{f}_7$ однозначно характеризуется условиями

$$\begin{cases} \langle \mathbf{f}_i, \mathbf{f}_7\rangle = 0, \quad i = \overline{1,6}, \\ \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{6} \mathbf{f}_k^2}{\mathbf{f}_7^2} = 1, \end{cases}$$

[1] Иркутский государственный университет, ул. К. Маркса, 1, Иркутск 664003, Россия. E-mail: grushko@math.isu.ru

[2] Иркутский государственный технический университет, ул. Лермонтова, 83, Иркутск 664074, Россия.
E-mail: gaer@istu.edu

и выбранной ориентацией гиперповерхности S. Отметим, что вектор $\mathbf{f}_7$ есть ни что иное, как вектор нормали $\mathbf{n}$ в данной точке гиперповерхности.

Теорема. *Коэффициенты деривационных формул*

$$\begin{cases} d\mathbf{r} = \mathbf{f}_\beta\, du^\beta, \\ d\mathbf{f}_i = \Gamma^\alpha_{i\beta}\mathbf{f}_\alpha\, du^\beta, \end{cases} \qquad \beta = \overline{1,6},\ \alpha = \overline{1,7},$$

произвольно параметризованной поверхности однозначно определяются через коэффициенты квадратичных форм $\widetilde{I} = \dfrac{d\boldsymbol{r}^2}{\boldsymbol{n}^2}$, $\widetilde{II} = -\dfrac{\langle d\boldsymbol{r}, d\boldsymbol{n}\rangle}{\boldsymbol{n}^2}$, *коэффициенты линейной формы* $\widetilde{IV} = \dfrac{\langle d\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}\rangle}{\boldsymbol{n}^2}$ *и их производные.*

Список литературы

[1] *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Группы и алгебры Ли. Семестр V. М.: Наука, 1982.

[2] *Friedrich Th., Kath I., Semmelmann U.* On nearly parallel G_2-structures // J. Geom. Phys. 1997. V. 23, № 3–4. P. 259–286.

Об ограниченности обобщённого $B_{k,n}$-потенциала

В. С. Гулиев [1], *З. В. Сафаров* [2]

Институт математики и механики НАН Азербайджана

В работе рассматривается оператор обобщённого сдвига Бесселя — Фурье ($B_{k,n}$-сдвиг). С его помощью определена $B_{k,n}$-свёртка и для неё получен аналог теоремы О'Нейла. Доказан аналог теоремы Соболева для обобщённого $B_{k,n}$-потенциала в пространстве $L_{p,\gamma_{k,n}}(\mathbb{R}^n_{k,+})$.

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots x_n)$, $|x|^2 = \sum\limits_{i=1}^n x_i^2$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $x' = x_{1,k} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, $x'' = x_{k,n} = (x_{k+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-k}$, $x = (x', x'') = (x_{1,k}, x_{k,n}) \in \mathbb{R}^n$, $(x', y') = x_1 y_1 + \dots + x_k y_k$, $\mathbb{R}^n_{k,+} = \{x = (x_{1,k}, x_{k,n}) \in \mathbb{R}^n;\ x_{k+1} > 0, \dots, x_n > 0\}$, $\gamma_{k,n} = (\gamma_{k+1}, \dots, \gamma_n)$, $\gamma_{k+1} > 0, \dots, \gamma_n > 0$, $x_{k,n}^{\gamma_{k,n}} = x_{k+1}^{\gamma_{k+1}} \cdot \ldots \cdot x_n^{\gamma_n}$, $Q = n + |\gamma_{k,n}|$. В случае $k = 0$ $x = x'' = x_{0,n} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_{++} \equiv \mathbb{R}^n_{0,+} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ x_1 > 0,\ \dots,\ x_n > 0\}$, $\gamma = \gamma_{0,n} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$. Через $L_{p,\gamma_{k,n}} = L_{p,\gamma_{k,n}}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ будем обозначать пространства измеримых функций $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n_{k,+}$, с конечной нормой $\|f\|_{L_{p,\gamma_{k,n}}(\mathbb{R}^n_{k,+})} = \|f\|_{p,\gamma_{k,n}} = \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n_{k,+}} |f(x)|^p x_{k,n}^{\gamma_{k,n}}\, dx\Big)^{1/p}$, $1 \leqslant p < \infty$. Положим $L_{\infty,\gamma_{k,n}}(\mathbb{R}^n_{k,+}) = L_\infty(\mathbb{R}^n_{k,+})$, где $L_\infty(\mathbb{R}^n_{k,+})$ класс всех существенно ограниченных функций f с конечной нормой $\|f\|_{L_{\infty,\gamma_{k,n}}(\mathbb{R}^n_{k,+})} \equiv \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n_{k,+})} = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x \in \mathbb{R}^n_{k,+}} |f(x)|$. Оператор обобщённого сдвига Фурье — Бесселя ($B_{k,n}$-сдвиг) определяется следующим образом (см., например, [1, 2]):

$$T^y f(x) = \frac{\prod\limits_{i=k+1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{n-k} \prod\limits_{i=k+1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)} \int\limits_0^\pi \dots \int\limits_0^\pi f\Big(x_1 - y_1, \dots, x_k - y_k,$$
$$\sqrt{x_{k+1}^2 - 2x_{k+1}y_{k+1}\cos\alpha_{k+1} + y_{k+1}^2}, \dots, \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha_n + y_n^2}\Big)$$
$$\prod_{i=k+1}^n \sin^{\gamma_i - 1}\alpha_i\, d\alpha_{k+1} \dots d\alpha_n.$$

---

[1] Институт математики и механики Национальной Академии наук Азербайджана, ул. Ф. Агаева, 9, Баку, Az–1141, Азербайджан.

[2] Институт математики и механики Национальной Академии наук Азербайджана, ул. Ф. Агаева, 9, Баку, Az–1141, Азербайджан.

Отметим, что этот сдвиг тесно связан с $B_{k,n}$-сингулярным дифференциальным оператором Бесселя (см., например, [2]) $B_{k,n} = (B_{k+1}, \dots, B_n)$, где $B_j = \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\gamma_j}{x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = k+1, \dots, n$. На основе этого сдвига вводится обобщенная свертка ($B_{k,n}$-свертка) функций $(f * g)_{\gamma_{k,n}} = \int\limits_{\mathbb{R}^n_{k,+}} f(x)(T^y g(x)) x_{k,n}^{\gamma_{k,n}}\, dx$. Для оператора $B_{k,n}$-сдвига справедлива

Лемма 1 [3]. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in L_{p,\gamma_{k,n}}(\mathbb{R}^n_{k,+})$. *Тогда*

$$\|T^y f(\cdot)\|_{L_{p,\gamma_{k,n}}(\mathbb{R}^n_{k,+})} \leqslant \|f\|_{L_{p,\gamma_{k,n}}(\mathbb{R}^n_{k,+})}, \quad y \in \mathbb{R}^n_{k,+}.$$

Пусть $f\colon \mathbb{R}^n_{k,+} \to \mathbb{R}$ — измеримая функция, $\gamma_{k,n}$-*функцией распределения* функции f будем называть функцию $f_{*,\gamma}$, определяемую для $t \in [0,\infty)$ равенством $f_{*,\gamma_{k,n}} = |\{x \in \mathbb{R}^n_{k,+} : |f(x)| > t\}|_{\gamma_{k,n}}$, где $|E|_{\gamma_{k,n}} = \int\limits_E x_{k,n}^{\gamma_{k,n}}\, dx$ для любого измеримого множество E.

Пусть $f\colon \mathbb{R}^n_{k,+} \to \mathbb{R}$ — измеримая функция, $\gamma_{k,n}$-*перестановкой* функции f *в убывающем порядке* называют функцию $f^*_{\gamma_{k,n}}$, определяемую для $t \in [0,\infty)$ равенством $f^*_{\gamma_{k,n}}(t) = \inf\{s \in [0,\infty) : f_{*,\gamma_{k,n}}(s) \leqslant t\}$, $0 < t < \infty$. Через $WL_{p,\gamma_{k,n}}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ будем обозначать пространство измеримых функций $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n_{k,+}$, с конечной нормой $\|f\|_{WL_{p,\gamma_{k,n}}} = \sup\limits_{t \geqslant 0} t^{1/p} f^*_{\gamma_{k,n}}(t) < \infty$, $1 \leqslant p < \infty$. Функция $f^{**}_{\gamma_{k,n}}$ на $(0,\infty)$ определяется следующим образом (см., например, [4]): $f^{**}_{\gamma_{k,n}}(t) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t f^*_{\gamma_{k,n}}(s)\, ds$, $t > 0$. Для $f^{**}_{\gamma_{k,n}}(t)$ имеет место $(f+g)^{**}_{\gamma_{k,n}}(t) \leqslant f^{**}_{\gamma_{k,n}}(t) + g^{**}_{\gamma_{k,n}}(t)$. Справедлив аналог неравенства О'Нейла для $B_{k,n}$-сверток:

Лемма 2. *Пусть* f, g — *положительные измеримые функций на* $\mathbb{R}^n_{k,+}$. *Тогда для всех* $0 < t < \infty$, *справедливо следующее неравенство*

$$(g * f)^{**}_{\gamma_{k,n}}(t) \leqslant f^{**}_{\gamma_{k,n}}(s)\, ds \int\limits_0^t g^{**}_{\gamma_{k,n}}(u)\, du + \int\limits_t^\infty f^*_{\gamma_{k,n}}(u) g^{**}_{\gamma_{k,n}}(u)\, du.$$

Пусть $K_\alpha \in WL_{\frac{Q}{Q-\alpha},\gamma_{k,n}}(\mathbb{R}^n_{k,+})$, $0 < \alpha < Q$. Непосредственно проверяется, что для $0 < \alpha < Q$ $K_\alpha(x) = |x|^{\alpha - Q} \in WL_{\frac{Q}{Q-\alpha},\gamma_{k,n}}(\mathbb{R}^n_{k,+})$. Для обобщённого $B_{k,n}$-потенциала $(K_\alpha * f)_{\gamma_{k,n}}$ справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть* $K_\alpha \in WL_{\frac{Q}{Q-\alpha},\gamma_{k,n}}(\mathbb{R}^n_{k,+})$, $0 < \alpha < Q$. *Тогда*

$$(K_\alpha * f)^*_{\gamma_{k,n}}(t) \leqslant Ct^{\frac{\alpha}{Q}-1} \int\limits_0^t f^*_{\gamma_{k,n}}(s)\, ds + C \int\limits_t^\infty s^{\frac{\alpha}{Q}-1} f^*_{\gamma_{k,n}}(s)\, ds.$$

Теорема 2. *Пусть* $K_\alpha \in WL_{\frac{Q}{Q-\alpha},\gamma_{k,n}}(\mathbb{R}^n_{k,+})$, $f \in L_{p,\gamma_{k,n}}(\mathbb{R}^n_{k,+})$, $0 < \alpha < Q$, $1 < p < Q/\alpha$, $1/p - 1/q = \alpha/Q$. *Тогда* $(K_\alpha * f)_{\gamma_{k,n}} \in L_{q,\gamma_{k,n}}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ и

$$\|(K_\alpha * f)_{\gamma_{k,n}}\|_{L_{q,\gamma_{k,n}}(\mathbb{R}^n_{k,+})} \leqslant C\|f\|_{L_{p,\gamma_{k,n}}(\mathbb{R}^n_{k,+})}.$$

Следствие 1. *Пусть* $f \in L_{p,\gamma_{k,n}}(\mathbb{R}^n_{k,+})$, $1 < p < Q/\alpha$, $1/p - 1/q = \alpha/Q$. *Тогда* $I^\alpha_{\gamma_{k,n}} f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_{k,+}} T^y |x|^{\alpha-Q} f(y) y^{\gamma_{k,n}}_{k,n}\, dy \in L_{q,\gamma_{k,n}}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ *и*

$$\|I^\alpha_{\gamma_{k,n}} f\|_{L_{q,\gamma_{k,n}}(\mathbb{R}^n_{k,+})} \leqslant C\|f\|_{L_{p,\gamma_{k,n}}(\mathbb{R}^n_{k,+})}.$$

Необходимо отметить что, доказательства этого следствия другими путями получены в [5, 6] в случае $k = n - 1$ и в [7] в общем случае $0 \leqslant k \leqslant n$.

Список литературы

[1] *Левитан Б. М.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи мат. наук. 1951. Т. 6, № 2. С. 102–143.

[2] *Киприянов И. А., Иванов Л. А.* Получение фундаментальных решений для однородных уравнений с особенностями // Тр. сем. С. Л. Соболева. Новосибирск, 1983. № 1. С. 55–77.

[3] *Киприянов И. А., Ключанцев М. И.* О сингулярных интегралах, порожденных оператором обобщённого сдвига // Сиб. мат. журн. 1970. Т. 11, № 5. С. 1060–1083.

[4] *Стейн И., Вейс Г.* Гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.

[5] *Бродский А. Л.* Мультипликаторы преобразования Фурье — Бесселя. Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. Воронеж, 1977.

[6] *Гаджиев А. Д., Алиев И. А.* О классах операторов типа потенциала, порождённого обобщённым сдвигом // Докл. расш. зас. сем. Ин-та прикл. математика им. И. Н. Векуа. Тбилиси: Тбилисский гос. ун-т, 1988. Т. 3, № 2. С. 21–24.

[7] *Ляхов Л. Н.* Неравенства типа Харди — Литтлвуда — Соболева для одного класса дробных интегралов // Функционально-дифференциальные уравнения и их применение. Махачкала, 1991. С. 95.

On the Size of the Basin of Attraction

P. A. Gumenuk [1]

Saratov State University
Department of Mechanics and Mathematics

Consider a meromorphic function $f\colon \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$. By f^n denote the n-th iterate of the function f. *The Fatou set* $\mathcal{F}(f)$ is the maximal open set where f^n is defined for all $n \in \mathbb{N}$ and the family $\{f^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is normal. The set $\mathcal{J}(f) := \overline{\mathbb{C}}\backslash\mathcal{F}(f)$ is called *the Julia set* of the function f. For more details see e.g. [1, 2].

Suppose that $f(0) = 0$, $f'(0) = \lambda \neq 0$. The talk concerns a lower estimate of the quantity $R(f) := \operatorname{dist}(0, \mathcal{J}(f))$. Replacing $f(z)$ by $r^{-1}f(rz)$ with suitable $r > 0$ we can assume that the considered function belongs to the class λS of all univalent holomorphic functions f in $\mathbb{D} := \{z : |z| < 1\}$ normalized by the expansion $f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \ldots$. Let $\lambda S_m := \{f|_{\mathbb{D}} \in \lambda S : f \textit{ is meromorphic in } \mathbb{C}\}$, $\mathcal{R}(\lambda) := \inf\limits_{f\in\lambda S_m} R(f)$, $\mathcal{R}_S(\lambda) := \inf\limits_{f\in\lambda S} \operatorname{dist}(0, \partial\mathcal{A}^*(f))$, where $\mathcal{A}^*(f)$ stands for the maximal domain W, such that $0 \in f(W) \subset W \subset \mathbb{D}$, or for the set $\{0\}$ if there are no domains W satisfying this condition.

Theorem 1. *For any $\lambda \neq 0$ the following equality holds $\mathcal{R}(\lambda) = \mathcal{R}_S(\lambda)$.*

Theorem 2. *For any $t \in (0, 2\pi)$ there exists $\mu_0 = \mu_0(t) > 0$, such that*

$$\mathcal{R}_S(\mu e^{it}) = \frac{\mu + 2 - \sqrt{4\mu + \mu^2}}{2}, \qquad \mu \in (0, \mu_0).$$

One can show that $\mathcal{R}_S(\lambda)$ is continuous in $\mathbb{D}$. At the same time J. C. Yoccoz [3] proved that $\mathcal{R}_S(e^{2\pi i\alpha})$, $\alpha \in \mathbb{R}$, is positive if and only if α is a Brjuno number. It follows that $\mathcal{R}_S(\lambda)$ is discontinuous almost everywhere on $\partial\mathbb{D}$.

Theorem 3. *The angular limit of $\mathcal{R}_S(f)$ exists at every point $\lambda_0 \in \partial\mathbb{D}$ and coincides with $\mathcal{R}_S(\lambda_0)$.*

References

[1] *Bergweiler W.* Iteration of meromorphic functions // Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 1993. V. 29, № 2. P. 151–188.

[2] *Milnor J.* Dynamics in one complex variable. 2^{nd} ed. Vieweg, 2000.

[3] *Yoccoz J. C.* Petits diviseurs en dimension 1. Astérisque, 1995.

[1] Saratov State University, Department of Mechanics and Mathematics, Astrakhanskaya, 83, Saratov 410012, Russia.

E-mail: gumenuk@sgu.ru

This research is supported by RFBR 04–01–00083 and the program “The Universities of Russia” UR 04.01.040.

On the Properties of the Positionally Weakly Invariant Sets

Kh. G. Guseinov [1] *and Nihal Ege* [2]

Anadolu University, Turkey

Consider the controllable system described by the differential inclusion

$$\dot{x} \in F(t,x,u), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in P,\ t \in T = [0,\theta], \tag{1}$$

where $P \subset \mathbb{R}^p$ is a compact set. It is assumed that $F(t,x,u)$ is a convex compact set for every (t,x,u), set valued map $(t,x) \to F(t,x,u)$ is upper semicontinuous for any fixed $u \in P$ and satisfies the growth condition. The control of system (1) is carried out by feedback principle and the motion of the system generated by strategy $(U_*, \delta_*(\cdot))$ from initial position (t_0, x_0) is defined. Here U_* is a positional strategy and it specifies the control effort to the system for realized position (t_*, x_*). The function $\delta_*(\cdot)$ defines the time interval, along the length the control effort $U_*(t_*, x_*)$ will have an effect. The notion of positionally weakly invariant sets with respect to system (1) is introduced and positional weakly invariance properties of the given closed set $W \subset T \times \mathbb{R}^n$ with respect to a such systems is studied. The positional weak invariance of the set W means that there exists a strategy $(U_*, \delta_*(\cdot))$ such that for any $(t_0, x_0) \in W$, the graph of all motions of system (1) generated by strategy $(U_*, \delta_*(\cdot))$ from initial position (t_0, x_0) are in the set W right up to instant of time θ. Note that this notion is a generalization of the notions of weakly and strongly invariant sets with respect to a differential inclusion and close to the positional absorbing sets notion in the theory of differential games. Sufficient conditions for a closed set $W \subset T \times \mathbb{R}^n$ to be positionally weakly invariant with respect to system (1) are obtained. These conditions are expressed in terms of derivative sets of set valued maps, which are widely used for investigating various problems of nonsmooth and set valued analysis. Based on these conditions, the constructive procedure for determining the strategies, guaranteeing positional weak invariance of the sets is given. Finally, positional weak invariance of the sets $W = \{(t,x) \in T \times \mathbb{R}^n : c(t,x) \leqslant 0\}$ with respect to system (1) is studied where $c(\cdot)\colon T \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is a lower semicontinuous function.

---

[1] Anadolu University, Mathematics Department, Eskisehir 26470, Turkey.
E-mail: kguseinov@anadolu.edu.tr

[2] Anadolu University, Mathematics Department, Eskisehir 26470, Turkey.

Почти комплексные структуры на $SU(2) \times SU(2)$

Н. А. Даурцева [1]

Кемеровский государственный университет

Рассматриваются почти комплексные структуры на группе Ли $SU(2) \times SU(2) = S^3 \times S^3$. Известно, что произведение нечётномерных сфер допускает двупараметрическое семейство комплексных структур [1, 2]. При их построении используется конструкция расслоения Хопфа, все эти структуры инвариантны относительно действия $U(2) \times U(2)$. Относительно компактных однородных комплексных многообразий известен общий результат Грауерта и Реммерта [3] о представлении таких многообразий в виде голоморфных расслоений с определенными свойствами. Построенные в [2] структуры удовлетворяют условиям теоремы [3], но не известно, существует ли структура голоморфного расслоения на $S^3 \times S^3$, индуцирующая другие комплексные структуры на этом многообразии. Поскольку условие инвариантности комплексной структуры относительно $SU(2) \times SU(2)$ значительно слабее условия инвариантности относительно $U(2) \times U(2)$, то возникает естественный вопрос, существуют ли среди них комплексные структуры отличные от известных.

Теорема 1. *Все левоинвариантные комплексные структуры на $SU(2) \times SU(2)$ индуцированы структурой расслоения Хопфа.*

Пусть B — метрика Киллинга — Картана на $SU(2) \times SU(2)$. Рассмотрим множество всех инвариантных, сохраняющих ориентацию, почти комплексных структур I таких, что $B(IX, IY) = B(X, Y)$. Это множество $AO_B^+ = SO(6)/U(3)$ компактно. Определим на этом множестве функционал нормы тензора Нейенхейса. По теореме Ньюлендера — Ниренберга [1] минимум N достигается на классе комплексных структур, описанном в теореме 1.

Теорема 2. *Максимум нормы тензора Нейенхейса на AO_B^+ равен $8\sqrt{3}$ и достигается на множестве почти комплексных структур J таких, что (B, J) — приблизительно кэлерова структура.*

Список литературы

[1] *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 2. М.: Наука, 1981.

[1] Кемеровский государственный университет, ул. Красная, 6, Кемерово 650043, Россия. E-mail: natali0112@ngs.ru

[2] *Calabi E., Eckmann B.* A class of compact complex manifolds which are not algebraic // Ann. Math. 1935. V. 58. P. 494–500.
[3] *Grauert H., Remmert R.* Über kompakte homogene komplexe Mannigfaltigkeiten // Arch. Math. 1962. V. 13. P. 498–507.

Discontinuity and Weak Compatibility in Fixed Point Consideration of Gregus Type in Convex Metric Spaces

Bhavana Deshpande [1]

India

We prove common fixed point theorems of Gregus type for discontinuous and weak compatible mappings in convex metric spaces. We improve, extend and generalize some well known results by many authors.

[1] «Sukhakarta» 90, Rajiv Nagar (Near Kasturba Nagar), RATLAM-457001(M.P.), India.
E-mail: bhavnadeshpande@yahoo.com

Уточнения аналога изопериметрического неравенства и их следствия

В. И. Дискант [1]

Черкасский государственный технологический университет

Пусть A и B — выпуклые тела n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$. Для объёма $V(A+\rho B)$, $\rho \geqslant 0$, тела $A+\rho B$ имеет место формула Г. Минковского

$$V(A+\rho B)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k V_k(A,B)\rho^k,$$

где $V_k(A,B)=V(\underbrace{A,\ldots,A}_{n-k},\underbrace{B,\ldots,B}_{k})$ — k-й смешанный объем тел A и B.

Первое неравенство Г. Минковского для смешанных объёмов

$$\Delta_1(A,B)=V_1^n(A,B)-V(B)V^{n-1}(A)\geqslant 0$$

называется *изопериметрическим неравенством*, его левая часть $\Delta_1(A,B)$ — *изопериметрической разностью* для тел A и B. Неравенство

$$\Delta_k(A,B)=V_k^n(A,B)-V^k(B)V^{n-k}(A)\geqslant 0, \quad 2\leqslant k\leqslant n-1,$$

называется *k-м аналогом изопериметрического неравенства*, а его левая часть $\Delta_k(A,B)$ — *k-м аналогом изопериметрической разности* для тел A и B [1].

Пусть $A_{-\rho}(B)=A\backslash(\rho B)$ — разность тел A и ρB [2], $q=q(A,B)$ — коэффициент вместимости тела B в тело A, $Q=Q(A,B)$ — коэффициент охвата тела A телом B [1].

Доказаны следующие неравенства:

$$\begin{aligned}
&V_k^{\frac{n}{n-k}}(A,B)-V^{\frac{k}{n-k}}(B)V(A)\\
&\qquad\geqslant\left(V_k^{\frac{1}{n-k}}(A,B)-\rho V^{\frac{1}{n-k}}(B)\right)^n-V^{\frac{k}{n-k}}(B)V(A_{-\rho}(B))\\
&\qquad\qquad\geqslant V_k^{\frac{n}{n-k}}(A_{-\rho}(B),B)-V^{\frac{k}{n-k}}(B)V(A_{-\rho}(B)),\quad 0\leqslant\rho\leqslant q, \quad (1)
\end{aligned}$$

[1] Черкасский государственный технологический университет, бульв. Шевченко, 460, Черкассы 18006, Украина.
E-mail: diskant@chiti.uch.net

$$V_k^{\frac{n}{n-k}}(A,B) - V^{\frac{k}{n-k}}(B)V(A) \geqslant \left(V_k^{\frac{1}{n-k}}(A,B) - qV^{\frac{1}{n-k}}(B)\right)^n \geqslant V_k^{\frac{n}{n-k}}(A_{-q}(B),B), \quad (2)$$

$$V_k^{\frac{n}{n-k}}(B,A) - V^{\frac{k}{n-k}}(A)V(B) \geqslant \left(V_k^{\frac{1}{n-k}}(B,A) - \frac{1}{Q}V^{\frac{1}{n-k}}(A)\right)^n \geqslant V_k^{\frac{n}{n-k}}(B_{-\frac{1}{Q}}(A),A), \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1. \quad (3)$$

Следствием (1) является утверждение: *k-й аналог изопериметрической разности при переходе от тела A к телу $A_{-\rho}(B)$ — внутреннему телу, параллельному телу A относительно B с коэффициентом ρ, не увеличивается.*

Следствием левых частей неравенств (2) и (3) является следующая теорема устойчивости решения уравнения $\Delta_k(X,B) = 0$ при $V(X) = V(B)$:

Теорема. *Пусть X и B — собственные (имеющие внутренние точки) выпуклые тела в $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$. Найдутся такие величины $\varepsilon_0 > 0$, $C > 0$, зависящие от n, k, r_B, R_B, что из выполнения условий*

$$\Delta_k(X,B) < \varepsilon, \quad 0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_0, \quad V(X) = V(B), \qquad k \in \overline{1; n-1},$$

следует, что $\delta(X,B) < C\varepsilon^{1/n}$.

В теореме r_B — радиус вписанного в B шара, R_B — радиус описанного около B шара, $\delta(X,B)$ — отклонение тел X и B [2].

Единственность решения уравнения $\Delta_k(X,B) = 0$ при $V(X) = V(B)$ доказана в [1].

Список литературы

[1] *Дискант В. И.* Уточнения изопериметрического неравенства и теоремы устойчивости в теории выпуклых тел // Современные проблемы геометрии и анализа. Новосибирск: Наука, 1989. С. 98–132. (Тр./АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 14).

[2] *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества. М.: Наука, 1985.

К теоремам искажения для конформных отображений плоских областей

В. Н. Дубинин [1]

Институт прикладной математики ДВО РАН

Обсуждаются некоторые теоремы искажения для мероморфных и однолистных в круге функций, вытекающие из свойств обобщённых конденсаторов и симметризации. Допустимая функция обобщённого конденсатора принимает заданные значения в окрестности каждой из пластин, а ёмкость определяется как нижняя грань интегралов Дирихле от допустимых функций [1]. Простейшие свойства обобщённых конденсаторов содержат, в частности, классические принципы композиции, формулируемые обычно в терминах модулей семейств кривых. Из конформной инвариантности ёмкости вытекают многочисленные теоремы искажения в различных классах аналитических функций. Приводятся конкретные оценки, содержащие значения функции и некоторых её производных в конечном числе точек и зависящие от ограничений на образ круга при отображении этой функцией. Для ограниченных однолистных функций получаются неравенства, восходящие к известным результатам З. Нехари и Ю. Е. Аленицина. Рассматриваются также новые следствия этих неравенств, содержащие, в частности, оценки Шварциана данной функции. Некоторые оценки учитывают искажения на границе круга. Другие содержат меру пересечения образа круга с наперёд заданными множествами. Наконец, мы рассматриваем взаимное искажение, осуществляемое совокупностью функций, отображающих единичный круг на попарно неналегающие области. Данная тематика восходит к известной работе М. А. Лаврентьева и в последнее время нашла существенные приложения в геометрической теории функций комплексного переменного. Отмечается применение части полученных оценок к неравенствам для алгебраических полиномов [2].

Список литературы

[1] *Дубинин В. Н.* Обобщённые конденсаторы и асимптотики их ёмкостей при вырождении некоторых пластин // Зап. науч. сем. ПОМИ/Мат. ин-т им. В. А. Стеклова. С.-Петерб. отд-ние. 2003. Т. 302. С. 38–51.

[2] *Дубинин В. Н.* Конформные отображения и неравенства для алгебраических полиномов // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13, № 5. С. 16–43.

[1]Институт прикладной математики ДВО РАН, ул. Радио, 7, Владивосток 690041, Россия.

E-mail: dubinin@iam.dvo.ru

Работа поддержана РФФИ (грант 02–01–00028).

Устойчивость в C^{l-1}-норме классов отображений и дифференциальные соотношения l-го порядка

А. А. Егоров [1]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Рассматриваются проблемы устойчивости классов отображений, состоящих из решений $u\colon U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$, дифференциальных соотношений вида $F(u^{(l)}(x)) = G(u^{(l)}(x))$ или $u^{(l)}(x) \in A$ для почти всех $x \in U$, $l \in \mathbb{N}$, где $u^{(l)}(x)$ обозначает дифференциал порядка l отображения u в точке x, $F\colon \mathbb{R}_s^{mn^l} \to \mathbb{R}$ есть квазивыпуклая функция, $G\colon \mathbb{R}_s^{mn^l} \to \mathbb{R}$ — нуль-лагранжиан, $A \subset \mathbb{R}_s^{mn^l}$ — компакт. Здесь $\mathbb{R}_s^{mn^l}$ — пространство симметричных l-линейных отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$. Найдены новые условия, достаточные для устойчивости в C^{l-1}-норме рассматриваемых классов решений дифференциальных соотношений. Полученные результаты являются обобщением на случай дифференциальных соотношений произвольного порядка ряда теорем, установленных в работах [1, 2] для случая $l = 1$. Последние теоремы включают в себя как частный случай ряд классических результатов, полученных в работах М. А. Лаврентьева, П. П. Белинского, Ю. Г. Решетняка, Ф. Джона и др., об устойчивости классов конформных и изометрических преобразований, а также ряд недавних результатов, полученных в работах А. П. Копылова, Н. С. Даирбекова, Т. В. Соколовой и др., по устойчивости этих и других классов отображений.

Список литература

[1] *Егоров А. А.* Устойчивость классов решений дифференциальных соотношений, построенных с помощью выпуклых и квазиаффинных функций // Тр. по геометрии и анализу. Новосибирск: Изд-во Ин-та матем., 2003. С. 275–288.

[2] *Егоров А. А., Коробков М. В.* Устойчивость классов липшицевых отображений, теорема Дарбу и квазивыпуклые множества // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 5. С. 1046–1059.

[1] Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск 630090, Россия.

E-mail: yegorov@math.nsc.ru

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Российской Федерации (код проекта PD02–1.1–455), Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–01009), Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых российских учёных и ведущих научных школ Российской федерации (код проекта НШ–311.2003.1) и Фонда содействия отечественной науке.

К теореме об обратной функции для отображений с обобщёнными производными

И. В. Журавлёв [1]

Волгоградский государственный университет

В докладе представлены теоремы об обратной функции для непрерывных отображений соболевского класса $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D)$ [1, 2] и для локально липшицевых отображений.

Символом $B(a,r)$ условимся обозначать шар в $\mathbb{R}^n$ с центром a радиуса $r>0$. Обозначим через $\mathbf{M}^n$ линейное пространство $n\times n$-матриц с вещественными элементами, снабжённое нормой $|C| = \sup\limits_{|h|=1,\ h\in\mathbb{R}^n} |Ch|$.

Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$ и $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение класса $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D)$. В дальнейшем $f'(x)$ — матрица Якоби $f(x)$. Предположим, что $|f'(x)|>0$ п. в. в D. Пусть D^*_f — множество всех точек дифференцируемости функции $f(x)$ и S — некоторое множество нулевой меры Лебега. Для точки $a\in D$ символом $\partial_N\{f,a,S\}$ обозначим замкнутую выпуклую оболочку множества всех матриц $M\in\mathbf{M}^n$, для которых найдётся такая сходящаяся к a последовательность $x_p\in D^*_f\setminus S$, $p\in\mathbb{N}$, что $\frac{f'(x_p)}{|f'(x_p)|}\to M$ при $p\to\infty$.

Если функция $F\colon D\to\mathbb{R}^n$ локально липшицева, то для множества K, содержащегося в D, символом $\mathrm{Lip}(F,K)$ обозначим точную нижнюю границу тех чисел L, для которых выполняется неравенство $|F(x_2)-F(x_1)|\leqslant L|x_2-x_1|$, $x_2,\ x_1\in K$. Через $\partial F(a)$ обозначим производную Кларка [4] функции $F(x)$ в точке $a\in D$ — выпуклую оболочку множества всех матриц $M\in\mathbf{M}^n$, для которых найдется такая сходящаяся к a последовательность $x_p\in D^*_F$, $p\in\mathbb{N}$, что $F'(x_p)\to M$ при $p\to\infty$.

Теорема 1. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$ и $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение класса $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D)$. Предположим, что $|f'(x)|>0$ п. в. в D и в точке $a\in D$ каждая матрица из $\partial_N\{f,a,S\}$ не вырождена, где S — некоторое множество нулевой меры Лебега. Пусть $K=\left(\frac{1+\sqrt{1-d^2}}{1-\sqrt{1-d^2}}\right)^n$, где $d=\min\limits_{M\in\partial_N\{f,a,S\}}\left|M^{-1}\right|^{-1}$. Тогда для любого K^*, $K<K^*$, найдется некоторая окрестность точки a, в которой отображение $f(x)$ K^*-квазиконформно.*

[1] Волгоградский государственный университет, ул. 2-я Продольная, 30, Волгоград 400062, Россия.
E-mail:igor.zhuravlev@volsu.ru

Доказательство теоремы 1, подобно тому как это делалось в работе [5], использует возможность приблизить отображение $f(x)$ гладкими квазиконформными отображениями и при $n > 2$ опирается на теорему о радиусе инъективности для отображений с ограниченным искажением [3].

Следующий результат уточняет теорему об обратной функции из [4].

Теорема 2. *Пусть U — область в $\mathbb{R}^n$ и $F\colon U \to \mathbb{R}^n$ — липшицевое отображение. Если $\partial F(a)$, $a \in U$, имеет максимальный ранг, то существует такая окрестность V точки a, что F гомеоморфно на V, а отображение $F^{-1}\colon F(V) \to \mathbb{R}^n$ липшицево на $F(V)$. При этом* $\lim\limits_{r\to 0+} \mathrm{Lip}(F^{-1}, B(F(a), r) \leqslant \max\limits_{D\in\partial F(a)} |D^{-1}|$.

Список литературы

[1] *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.

[2] *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

[3] *Martio O., Rickman S., Vaisala Ju.* Topological and metric properties of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. 1971. V. 488. P. 1–31.

[4] *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука. 1988.

[5] *Журавлев И. В.* К теореме об обратной функции // Тр. по анализу и геометрии. Новосибирск: Изд-во Ин-та матем., 2000. С. 688–691.

Строение целых решений уравнения Саймона

И. А. Зорина[1], *В. Г. Ткачев*[2]

Волгоградский государственный университет

Задача о существовании целых решений следующего квазилинейного уравнения эллиптического типа

$$u_{xx}(1+u_x^2)+2u_{xy}u_xu_y+u_{yy}(1+u_y^2)=0. \tag{1}$$

была впервые поставлена Л. Саймоном в обзорной статье [2, с. 350]. Особый интерес эта задача вызывает в свете того, что для уравнения минимальных поверхностей $u_{xx}(1+u_y^2)-2u_{xy}u_xu_y+u_{yy}(1+u_x^2)=0$ и уравнения Аронссона $u_x^2u_{xx}-2u_{xy}u_xu_y+u_y^2u_{yy}=0$ справедливо свойство Бернштейна: *целыми* C^2*-гладкими решениями являются только линейные функции* $u=ax+by+c$.

Авторами доказано следующее утверждение, дающее ответ на вопрос, поставленный в [2].

Теорема. *Для любого натурального* $N\geqslant 2$ *существует целое решение* $u_N(x,y)$*, которое является вещественно-аналитическим во всей плоскости и растёт на бесконечности как*

$$\limsup_{(x,y)\to\infty}\frac{u_N(x,y)}{(x^2+y^2)^{\alpha_N/2}}=1, \qquad \alpha_N=N^2/(2N-1).$$

При этом имеет место следующее параметрическое представление

$$\begin{aligned} x &= A(\rho)\cos(2N-1)\theta+B(\rho)\cos\theta,\\ y &= A(\rho)\sin(2N-1)\theta-B(\rho)\sin\theta,\\ u_N &= (f-\rho f')\cos N\theta, \end{aligned}$$

где $A(\rho)=\frac{1}{2}(f'-\frac{k}{\rho}f)$, $B(\rho)=\frac{1}{2}(f'+\frac{k}{\rho}f)$, $f(\rho)=\rho^k\Phi\left(\frac{k-k^2}{2},1+k;-\frac{\rho^2}{2}\right)$, $\Phi(a,c;t)$ *— вырожденная гипергеометрическая функция Куммера и* $k=N/(N-1)$.

[1]Волгоградский государственный университет, ул. 2-я Продольная, 30, Волгоград 400062, Россия.

E-mail: irina.zorina@volsu.ru

[2]Волгоградский государственный университет, ул. 2-я Продольная, 30, Волгоград 400062, Россия.

E-mail: vladimir.tkachev@volsu.ru

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 03–01–00304.

Отметим, что в недавней работе [3] второго автора было показано, что все квазирадиальные N-решения уравнения γ-Лапласа и уравнения Аронссона являются алгебраическими функциями, т. е. для любого натурального N найдется многочлен $P_N(x,y,u)$ такой, что $P_N(x,y,u_N)\equiv 0$. Используя разделение переменных в уравнении Саймона (1), П. Безбородов [1] доказал существование 2-решения u_2, которое, с точностью до перепараметризации и гомотетии, может быть представлено следующим образом $x=\xi+\xi^3/3$, $y=\eta+\eta^3/3$, $\widetilde{u}_2=\frac{\xi^2-\eta^2}{2}+\frac{\xi^4-\eta^4}{4}$. Не ясно, однако, выполняется ли это свойство для остальных $N\geqslant 3$.

Список литературы

[1] *Безбородов П. А.* Контрпример к гипотезе Саймона // Тез. докл. Междунар. конф. по анализу и геометрии, Новосибирск, 30 авг. – 3 сент. 1999. Новосибирск: Изд-во Ин-та матем., 1999. С. 10–11.

[2] *Simon L.* Asymptotics for exterior solutions of quasilinear elliptic equations // Geometry from Pac. Rim. Berlin–New York: de Gruyter, 1997. С. 343–362.

[3] *Tkachev V. G.* Algebraic structure of γ-harmonic functions // J. Math. Anal. Appl. (в печати).

Квазиконформное отображение и бездисперсионные интегрируемые системы

К. М. Идирисов [1], *Н. М. Кисикова* [2], *Р. Мырзакулов* [3]

Физико-технический институт, Алматы, Казахстан

Отображение называется конформным, если оно преобразует всякую бесконечно малую сферу снова в сферу. Отображение квазиконформно, если бесконечно малая сфера преобразуется им в бесконечно малый эллипсоид, у которого отношение наибольшей полуоси к наименьшей не превосходит некоторого конечного числа, зависящего только от данного отображения (по Ю. Г. Решетняку). Недавно обнаружена глубокая связь между квазиконформными отображениями и так называемыми бездисперсионными интегрируемыми системами [1–3]. Последние являются важным подклассом интегрируемых (солитонных) нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. В данной работе с помощью уравнения типа Бельтрами (задающее квазиконформное отображение) найдены некоторые новые точные решения бесдисперсионного уравнения Кадомцева — Петвиашвили, и двумерной цепочки Тоды.

Список литературы

[1] *Myrzakulov R., Vijayalakshmi S., Syzdykova R. N., Lakshmanan M.* On the simplest $(2+1)$-dimensional integrable spin systems and their equivalent nonlinear Schrödinger equations // J. Math. Phys. 1998. V. 39. P. 2122–2139.

[2] *Lakshmanan M., Myrzakulov R., Vijayalakshmi S., Danlybaeva A. K.* Motion of curves and surfaces and nonlinear evolution equations in $(2+1)$ dimensions // J. Math. Phys. 1998. V. 39. P. 3765–3771.

[3] *Myrzakulov R., Nugmanova G. N., Syzdykova R. N.* Gauge equivalence between $(2+1)$-dimensional continuous Heisenberg ferromagnetic models and nonlinear Schrödinger-type equations // J. Phys. A. 1998. V. 31. P. 9535–9545.

---

[1] Физико-технический институт, ул. Ибрагимова, 11, Алматы 480082, Казахстан. E-mail: cnlpmyra@satsun.sci.kz

[2] Физико-технический институт, ул. Ибрагимова, 11, Алматы 480082, Казахстан. E-mail: cnlpmyra@satsun.sci.kz

[3] Физико-технический институт, ул. Ибрагимова, 11, Алматы 480082, Казахстан. E-mail: cnlpmyra@satsun.sci.kz

Геометрический критерий экстремальности произвольного дерева на λ-нормированной плоскости, где $2\lambda \equiv 1 \pmod 3$ и $\lambda \geqslant 5$

Д. П. Ильютко [1]

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

В данной работе дается описание структуры экстремальных сетей на λ-нормированных плоскостях, где $2\lambda \equiv 1 \pmod 3$ и $\lambda \geqslant 5$. Отметим, что в случае функционала римановой длины классы локально минимальных сетей и экстремальных сетей совпадают, а в случае нормированной длины класс локально минимальных сетей может оказаться существенно шире класса экстремальных сетей. Понятие экстремальной сети появляется при изучении следующей проблемы, известной в литературе как проблема Штейнера. Задача состоит в следующем: *среди всех сетей, затягивающих данное конечное множество X точек плоскости, т. е. среди всех графов, множество вершин которых содержит множество X, найти сеть наименьшей длины.* Первые работы, посвященные изучению проблемы Штейнера на нормированных плоскостях, появились в 60-е годы XX века, см. [1], в связи с бурным развитием электроники и робототехники. В них исследовались кратчайшие сети на манхеттенской плоскости, и первые результаты были получены Хананом [3]. В частности, Ханан показал, что всегда существует кратчайшее прямоугольное дерево, которое является подмножеством *решетки Ханана* — множества всех вертикальных и горизонтальных прямых, проходящих через граничные точки. В конце 70-х годах XX века Гэри и Джонсон [2] показали, что задача поиска кратчайшего дерева является NP-полной, т. е. скорее всего не существует полиномиального алгоритма решения этой задачи. Одна из возможностей преодоления этой проблемы состоит в описании геометрических свойств сетей, т. е. в получении ограничений на структуру сетей. В своих работах [4, 5] А. О. Иванов и А. А. Тужилин указали неравенство, которому должна удовлетворять сеть для того, чтобы являться экстремальной, но из самого неравенства не видно структуры сети (возможная степень вершины, углы между смежными

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Воробьевы Горы, Москва 119899, Россия.

При подготовке данной работы автор пользовался частичной поддержкой грантов Президента РФ НШ–1988.2003.1, МД–263.2003.01, а также гранта РФФИ 04–01–00682.

ребрами и т. д.). В этих работах был получен геометрический критерий экстремальности локально минимальной сети на 2-нормированной плоскости. В настоящей работе мы приведём геометрический критерий экстремальности локально минимальной сети на λ-нормированной плоскости, где $2\lambda \equiv 1 \pmod 3$ и $\lambda \geqslant 5$.

Определение. Нормированная плоскость $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ называется *λ-нормированной плоскостью*, если единичная окружность $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$ является правильным 2λ-угольником, вписанным в евклидову единичную окружность.

Под *сетью* мы будем понимать произвольное дерево Γ с множеством вершин $V(\Gamma)$ и множеством ребер $E(\Gamma)$. Будем говорить, что сеть Γ *затягивает конечное множество* X, если $V(\Gamma)$ содержит множество X. Вершины из множества X называются *граничными* для сети Γ, а вершины из $V(\Gamma) \setminus X$ — *внутренними* для сети Γ. Мы будем рассматривать лишь сети, у которых внутренние вершины имеют степень больше 2. Множество граничных вершин сети Γ обозначается через $\partial\Gamma$. *Локальной сетью* $\Gamma_{\mathrm{loc}}(z)$ *с центром в точке* $z \in \Gamma$ сети Γ называется замыкание связной окрестности U этой точки, не содержащее вершин сети Γ, отличных от z, если z — вершина. Определим *каноническую границу* $\partial\Gamma_{\mathrm{loc}}(z)$ локальной сети $\Gamma_{\mathrm{loc}}(z)$, положив $\partial\Gamma_{\mathrm{loc}}(z) = (\partial\Gamma \cap U) \cup (\Gamma \cap \partial U)$. Поскольку отрезок прямой, соединяющий две произвольные точки нормированной плоскости, является кратчайшей кривой среди всех кривых, соединяющих две данные точки, то без ограничения общности мы будем рассматривать только линейные сети, т. е. сети, все рёбра которых являются отрезками прямых. *Длиной* $\mathrm{len}(\Gamma)$ сети Γ назовём сумму $\mathrm{len}(\Gamma) = \sum\limits_{xy \in E(\Gamma)} \|x - y\|$.

Определение. Сеть, затягивающая некоторое множество, называется *кратчайшей*, если её длина не превосходит длины любой сети, затягивающей данное множество. Сеть называется *локально минимальной*, если каждая локальная сеть с центром в некоторой точке является кратчайшей сетью.

Пусть Γ — произвольная линейная сеть на λ-нормированной плоскости, и γ — некоторое её ребро, ориентированное одним из двух возможных способов. Если направление этого ребра приходит во внутреннюю точку стороны 2λ-угольника Σ, то будем говорить, что *замыкание* $\mathrm{fl}(\gamma)$ направления ребра γ равно этой стороне 2λ-угольника Σ (в этом случае ребро γ называется *неточечным* ребром), а если направление этого ребра приходит в вершину 2λ-угольника, то будем говорить, что *замыкание* $\mathrm{fl}(\gamma)$ направления ребра γ

равно этой вершине (*точечное* ребро). Для каждого неточеного ребра γ обозначим через γ^1 и γ^2 два ближайших к нему точечных ребра. Для любых подмножеств A и B из Σ обозначим через $\alpha(A, B)$ точную нижнюю грань углов между радиус-векторами точек $x \in A$ и $y \in B$. Если γ_1 и γ_2 — два смежных ребра, то в выражение $\alpha(\mathrm{fl}(\gamma_1), \mathrm{fl}(\gamma_2))$ под замыканиями $\mathrm{fl}(\gamma_i)$ мы будем понимать замыкания для рёбер γ_i, $i = 1, 2$, ориентированных от их общей вершины.

Теорема 1. (см. [6, 7]) *Сеть* Γ *с некоторой границей* $\partial\Gamma$ *на* λ*-нормированной плоскости, где* $2\lambda \equiv 1 \pmod 3$, *является локально минимальной, если и только если каждая вершина степени* 1 *граничная и для любых двух смежных рёбер* γ_i *и* γ_j *выполняется неравенство* $\alpha(\mathrm{fl}(\gamma_i), \mathrm{fl}(\gamma_j)) \geqslant \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3\lambda}$.

Из теоремы 1 вытекает, что степень вершины не превосходит 3 при $\lambda \geqslant 5$.

Определение. Сеть Γ называется *экстремальной*, если для любой неподвижной на границе деформации Γ_t, $t \in [0, 1]$, расщепляющей вершины, где $\Gamma_{t=0} = \Gamma$, выполнено соотношение $\frac{d}{dt}\big|_{t=0+} \mathrm{len}(\Gamma_t) \geqslant 0$.

Теорема 2. *Каждая экстремальная сеть на* λ*-нормированной плоскости является локально минимальной.*

Заметим, что не каждая локально минимальная сеть на λ-нормированной плоскости является экстремальной. Для любого λ легко построить локально минимальную, но не экстремальную сеть.

Рассмотрим произвольную пару (γ, γ') смежных рёбер, ориентированных от их общей вершины. Определим знак этой пары $\epsilon(\gamma, \gamma')$ следующим образом: для линейно независимых рёбер γ и γ' положим $\epsilon(\gamma, \gamma') = 1$, если базис (γ, γ') положительно ориентирован на $\mathbb{R}^2$, и $\epsilon(\gamma, \gamma') = -1$ в противном случае; для линейно зависимых рёбер γ и γ' положим $\epsilon(\gamma, \gamma') = 1$. Определим для пары (γ, γ') *погрешность* $\mathrm{fall}(\gamma, \gamma')$ и *ориентированную погрешность* $\mathrm{fall}_0(\gamma, \gamma')$, положив: $\mathrm{fall}(\gamma, \gamma') = k$, если $\alpha(\mathrm{fl}(\gamma), \mathrm{fl}(\gamma')) = \frac{2\pi}{3} - \frac{k\pi}{3\lambda}$, и $\mathrm{fall}_0(\gamma, \gamma') = \epsilon(\gamma, \gamma')\,\mathrm{fall}(\gamma, \gamma')$.

Рассмотрим произвольный ориентированный путь $\mathcal{P} = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ в сети Γ, где γ_i — последовательные рёбра пути $\mathcal{P}$. При каждом $1 \leqslant i \leqslant n-1$ внутренней вершине z_i пути $\mathcal{P}$, инцидентной рёбрам γ_i и γ_{i+1}, поставим в соответствии знак $\epsilon(z_i) = \epsilon(\gamma_i, \gamma_{i+1})$.

Определение. Путь $\mathcal{P}$ называется *правильно повёрнутым*, если все внутренние вершины пути $\mathcal{P}$, граничные в сети Γ, если таковые имеются, имеют одинаковый знак. Ориентация правильно повёрнутого пути $\mathcal{P}$ называется *канонической*, если знак каждой внутренней вершины пути $\mathcal{P}$, граничной в сети Γ, положителен.

Определим для канонически ориентированного пути $\mathcal{P}$, все внутренние рёбра которого точечны, *ориентированную погрешность* $\mathrm{fall}_0(\mathcal{P})$, положив:

$$\mathrm{fall}_0(\mathcal{P}) = \max_{j,l}(\mathrm{fall}_0(\gamma_1^j, \gamma_2) + \sum_{i=2}^{n-2} \mathrm{fall}_0(\gamma_i, \gamma_{i+1}) + \mathrm{fall}_0(\gamma_{n-1}, \gamma_n^l)).$$

Пусть Π — множество канонически ориентированных путей в Γ, все внутренние рёбра которых точечны. Положим $\mathrm{Fall}_0(\Gamma) = \max_{\mathcal{P}\in\Pi} \mathrm{fall}_0(\mathcal{P})$.

Теорема 3. *Пусть* Γ *— произвольная локально минимальная сеть на* λ*-нормированной плоскости, где* $2\lambda \equiv 1 \pmod 3$ *и* $\lambda \geqslant 5$*. Сеть* Γ *экстремальна тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Fall}_0(\Gamma) \leqslant 3$.

Автор выражает глубокую благодарность профессорам А. О. Иванову и А. А. Тужилину за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Список литературы

[1] *Francis R. L.* A note on the optimum location of new machines in existing plant layouts // J. Indust. Engrg. 1963. V. 14. P. 57–59.

[2] *Garey M. R., Johnson D. S.* The rectilinear Steiner problem is NP-complete // SIAM J. Appl. Math. 1977. V. 32. P. 826–834.

[3] *Hanan M.* On Steiner's problem with rectilinear distance // SIAM J. Appl. Math. 1966. V. 14. P. 255–265.

[4] *Ivanov A. O., Tuzhilin A. A.* Branching solutions to one-dimensional variational problems. Singapore: World Scientific, 2001.

[5] *Иванов А. О., Тужилин А. А.* Теория экстремальных сетей. М. — Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2003.

[6] *Ильютко Д. П.* Локально минимальные сети в N-нормированных пространствах // Мат. зам. 2003. Т. 74, вып. 5. С. 656–668.

[7] *Swanepoel K. J.* The local Steiner problem in normed planes // Networks. 2000. V. 36. P. 104–113.

Глобально и локально выпуклые многогранники относительно произвольного тела

В. К. Ионин [1]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Приводятся определения глобально и локально выпуклых многогранников в евклидовом пространстве. Эти определения совпадают с обычным определением в случае, когда исходное тело является замкнутым полупространством. Формулируются достаточные условия, при которых множество глобально выпуклых многогранников совпадает с множеством локально выпуклых многогранников.

[1] Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск 630090, Россия.

Полиномиальные инварианты рациональных зацеплений

Р. Р. Исангулов [1]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

В работе, используя $SU(2)$-представление фундаментальных групп рациональных зацеплений, получены рекурсивные формулы для вычисления полиномиальных инвариантов указанных зацеплений и, в частности, твист-узлов.

Напомним, что *рациональный узел* $K(p,q)$ или *рациональное зацепление* $L(p,q)$ определяются набором целых чисел $[c_1, c_2, \ldots, c_N]$, где $p/q = c_1 + (1/c_2 + (1/\ldots + (1/c_N)))$. Заметим, что пара целых чисел (p,q), где p и q взаимно простые, $p \geqslant 2$, q нечётно и $|q| < p$, определяет рациональный узел, если p нечётно, и рациональное зацепление, если p чётно. При этом рациональные зацепления имеют только две компоненты. *Твист-узлы* $T(p)$ — это рациональные узлы вида $K(-2p+1,p)$.

Известно, что множество представлений группы голономий в группу $SU(2)$ образует алгебраическое многообразие. Цель работы описать многочлен, определяющий данное многообразие, так называемый полиномиальный инвариант узла или зацепления.

Получены следующие результаты, обобщающие работы [1, 2].

Теорема 1. *Рекурсивная формула полиномиальных инвариантов рациональных зацеплений* $L(p,q)$ *имеет следующий вид*:

$$\begin{aligned} z_k(\tau,n,m) = {} & \left(\frac{n}{m}\mu_k(m^2-1) - 2\tau\right) z_{k-1}(\tau,m,n) \\ & + \left((n^2-1)(m^2+1) - 2\tau\frac{n}{m}\mu_k(m^2+1)\right) z_{k-2}(\tau,n,m) \\ & - \frac{n}{m}\mu_k(n^2+1)(m^2+1)^2 z_{k-3}(\tau,m,n), \end{aligned}$$

---

[1] Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск 630090, Россия.

E-mail: isan@math.nsc.ru

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по ведущим научным школам РФ (НШ 311.2003.1).

с начальными условиями

$$z_0(\tau,n,m)=-\varepsilon_{k+1},\qquad z_1(\tau,n,m)=-2nm\varepsilon_k+2\tau\varepsilon_{k+1},$$
$$z_2(\tau,n,m)=-2n^2m^2\varepsilon_{k-1}-n^2m^2\varepsilon_{k+1}+2n^2\varepsilon_{k-1}-n^2\varepsilon_{k+1}+m^2\varepsilon_{k+1}$$
$$+4\tau nm\varepsilon_{k-1}\varepsilon_k\varepsilon_{k+1}+4\tau nm\varepsilon_k-4\tau^2\varepsilon_{k+1}+\varepsilon_{k+1}.$$

Здесь $k=\frac{p-2}{2}$, $\mu_i=\varepsilon_{k-i+1}\varepsilon_{k-i+2}$, $\mu_1=\varepsilon_k\varepsilon_{k+1}=1$.

Теорема 2. *Полиномиальные инварианты твист-узлов* $T(p)$, *где* $p=-2k$, *имеют вид*:

$$z_k(\tau,n)=\sum_{r=0}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]}C_{k+1}^{2r+1}a^{k-2r}b^{2r}-c_1\sum_{r=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}C_k^{2r+1}a^{k-2r-1}b^{2r},$$
$$z_{-k}(\tau,n)=\sum_{r=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}C_k^{2r}a^{k-2r}b^{2r}-2c_2\sum_{r=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}C_k^{2r+1}a^{k-2r-1}b^{2r},\quad k=1,2,\ldots,$$

где $z_0(\tau,n)=1$. *Здесь*

$$a=-1+2n^2+n^4+2\tau^2,\qquad b=2\sqrt{(-1+\tau^2)(2n^2+n^4+\tau^2)},$$
$$c_1=(n^2+1)(-1+n^2-2\tau),\qquad c_2=(n^2+\tau)(1+\tau).$$

Благодарности. Автор признателен научному руководителю профессору А. Д. Медных за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Список литературы.

[1] *Burde G.* $SU(2)$-representation spaces for two-bridge knot groups // Math. Ann. 1990. V. 288. P. 103–119.

[2] *Hoste J., Shanahan P. D.* Trace fields of twist knots // J. Knot Theory Ramifications. 2001. V. 10. P. 625–639.

Local Stability of Quasiconformal Mappings in the Sobolev Topology W^1_ν on Carnot Groups

D. V. Isangulova [1]

Sobolev Institute of Mathematics

We consider a Carnot group G with Carnot–Caratheodory metric ρ and Hausdorff dimension ν. A mapping $\varphi\colon \Omega \to G$ of the class $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega; G)$ is a *mapping with bounded distortion* on a domain Ω of G, if

1) φ is continuous, open, and discrete;

2) the formal horizontal differential $D_h\varphi$ satisfies condition $\big|D_h\varphi(x)\big|^\nu \leqslant KJ(x,\varphi)$ for a.e. $x \in \Omega$. The smallest constant K is the *coefficient of quasiconformality* and denoted by $K(\varphi)$. A homeomorphic mapping with bounded distortion is called a *quasiconformal mapping.*

Theorem. *There are a number $q \in (0,1)$ and a nondecreasing function $\mu_i\colon (0,\infty) \to R$ such that $\mu_i(t) \to 0$ as $t \to 0$, $i = 1,2$, and, for every quasiconformal mapping $\varphi\colon B(a,r) \to G$ there exists a 1-quasiconformal mapping ψ such that*

1) $\rho\big(x, (\psi^{-1}\circ\varphi)(x)\big) \leqslant r\mu_1\big[K(\varphi)-1\big]$ for all $x \in B(a,qr)$;

2) $\int\limits_{B(a,qr)} |D_h(\psi^{-1}\circ\varphi)(x) - I|^\nu\,dx \leqslant r^\nu\mu_2\big[K(\varphi)-1\big]$.

The first item of the statement is a local stability in the uniform topology (see [1, 2]). To prove the second item we consider a sequence of quasiconformal mappings g_k on $B = B(a,qr)$, $K(g_k) \to 1$, $g_k \to g_0 = \mathrm{id}$ locally uniformly as $k \to \infty$. It suffices to show that $\int\limits_{B(a,qr/2)} |D_hg_k(x) - I|^\nu\,dx \to 0$ as $k\to\infty$.

Take a nonnegative function $\alpha \in C_0^\infty(B)$, $\alpha = 1$ on $B(a,qr/2)$. On the one hand we have

$$\int\limits_B |D_hg_k(x)|^\nu\alpha(x)\,dx \leqslant K(g_k)\int\limits_B J(x,g_k)\alpha(x)\,dx \to \int\limits_B \alpha(x)\,dx$$

as $k\to\infty$ in view of weak convergence of Jacobians [2]. On the other hand the

---

[1] Sobolev Institute of Mathematics, pr. Acad. Koptyug, 4, Novosibirsk 630090, Russia.
E-mail: dasha@math.nsc.ru

The research was partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant 03–01-00899) and INTAS (grant 03–55–905).

semicontinuity of the energy integral [3] implies

$$\int\limits_{B} \alpha(x)\,dx = \int\limits_{B} |D_h g_0(x)|^{\nu} \alpha(x)\,dx \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int\limits_{B} |D_h g_k(x)|^{\nu} \alpha(x)\,dx.$$

Thus, we have $\|D_h g_k\|_{L_\nu(B(a,qr/2))} \to \|D_h g_0\|_{L_\nu(B(a,qr/2))}$ as $k \to \infty$. The latter together with uniform convergence $g_k \to g_0$ implies the desired convergence.

If G is a Heisenberg group then the theorem is valid for mappings with bounded distortion. In the case $G = \mathbb{R}^n$ this result is proved in [4].

References

[1] *Vodop'yanov S. K., Kudryavtseva N. A.* Normal families of mappings on groups Carnot // Sib. Mat. Zh. 1996. V. 37, № 2. P. 273–286. Engl. transl. in Sib. Math. J. 1996. V. 37, № 2. P. 232–244.

[2] *Vodop'yanov S. K.* Mappings with bounded distortion and finite distortion on Carnot groups // Sib. Mat. Zh. 1999. V. 40, № 4. P. 764–804. Engl. transl. in Sib. Math. J. 1999. V. 40, № 4. P. 644–677.

[3] *Vodop'yanov S. K.* On closure of classes of mappings with bounded distortion on Carnot groups // Mat. Trudy. 2002. V. 5, № 2. P. 92–137. Engl. transl. in Sib. Adv. Math.

[4] *Reshetnyak Yu. G.* Stability theorems in geometry and analysis. Dordrecht: Kluwer, 1994. (Mathematics and its Applications (Dordrecht); 304).

Differentiability of Mappings of Carnot–Caratheodory Spaces in the Sobolev Topology

D. V. Isangulova [1] *and S. K. Vodopyanov* [2]

Sobolev Institute of Mathematics

We prove cc-differentiability of mappings on Carnot–Caratheodory spaces of Sobolev class in Sobolev topology. As a consequence we obtain analogues of Calderon–Zygmund theorems for mappings of Carnot–Caratheodory spaces (cc-spaces).

We consider a cc-space M as a connected Riemannian manifold with the specification of a sub-bundle $H_1 \subset TM$. Assume that, for any point $g \in M$, there exists a local basis $X_1, \dots, X_n$, $n = \dim H_1$, of H_1 in a neighborhood $\mathcal{O}_g$ of the point $g \in M$. Let $H_i(x)$ be a subspace of $TM(x)$, $x \in \mathcal{O}_g$, generated by the given vector fields $X_1, \dots, X_n$ and all their commutators up to the order $i-1$ at the point $g \in M$, $i > 1$. The sub-bundle H_1 is *equiregular* if there exists a number m such that $H_m(g) = TM(g)$ and $\dim H_i(g)$ is independent of $g \in M$, $i = 1, \dots, m$. cc-Metric $d(x, y)$ between $x, y \in M$ is defined as $\inf\{\text{length}(\gamma) \mid \gamma \text{ joins } x, y \in M,\ \dot{\gamma}(t) \in H_1(\gamma(t))\}$.

According to well-known Gromov constuction we can consider the set $\mathcal{O}_g$ both as a metric subspace of (M, d) and as a local Carnot group with group operation defined by Campbell–Hausdorff formula with the cc-metric d_c^g, g is identity of the group.

A *horizontal homomorphism* $L\colon \mathcal{O} \to \widetilde{\mathcal{O}}$ is, by definition, a homomorphism of local Carnot groups such that $L(\mathcal{O} \cap \exp H_1) \subset \widetilde{\mathcal{O}} \cap \widetilde{\exp}\, \widetilde{H}_1$ holds for $v \in \mathcal{O} \cap \exp H_1$ such that $L(v) \in \widetilde{\mathcal{O}}$.

Definition [1]. A mapping $f\colon E \to \widetilde{M}$ is said to be cc-*differentiable* at a point $g \in E$, if there exists a horizontal homomorphism

$$L\colon (\mathcal{O}_g, d_c^g) \to (\widetilde{\mathcal{O}}_{f(g)}, \widetilde{d}_c^{f(g)}) \quad \text{such that } \widetilde{d}(f(u), L(u)) = o(d(g, u))$$

as $E \cap \mathcal{O}_g \ni u \to g$.

In the case of Euclidean spaces, cc-differentiability is equivalent to classical differentiability. In the case of Carnot groups, cc-differentiability is equivalent

[1] Sobolev Institute of Mathematics, pr. Acad. Koptyug, 4, Novosibirsk 630090, Russia. E-mail: dasha@math.nsc.ru

[2] Sobolev Institute of Mathematics, pr. Acad. Koptyug, 4, Novosibirsk 630090, Russia. E-mail: vodopis@math.nsc.ru

Supported by scientific program «Universities of Russia»: УР 04.01.030.

to $\mathcal{P}$-differentiability. Moreover, A. V. Greshnov and S. K. Vodopyanov [1] have proved Rademacher-type theorem: *if* $f\colon E \to \widetilde{M}$ *is a Lipschitz mapping defined on a measurable set* E*, then* f *is cc-differentiable a.e. on* E.

A function $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *belongs to Sobolev class* $W_q^1(\Omega)$, $q \in [1,\infty]$, if $f \in L_q(\Omega)$ and there exist generalized derivatives along horisontal vector fields $X_i f \in L_q(\Omega)$, $i = 1,\dots,n$.

Definition. A mapping $f\colon \Omega \to \widetilde{M}$ *belongs to Sobolev class* $W_q^1(\Omega;\widetilde{M})$, $q \in [1,\infty]$, if:

(A) $[f]_z\colon x \in \Omega \mapsto \widetilde{d}(f(x),z)$ belongs to $W_q^1(\Omega)$ for all $z \in \widetilde{M}$;

(B) there is a function $h \in L_q(\Omega)$ independent of z, such that

$$|\nabla_{\mathcal{L}}[f]_z(x)| \leqslant h(x)$$

for almost all $x \in \Omega$.

Proposition. *Let* $f \in W_q^1(\Omega,\widetilde{M})$*,* $1 \leqslant q < \infty$*. Then for almost all* $x \in \Omega$ *there exists a linear mapping* $D_h f(x)\colon H_1(x) \to \widetilde{H}_1(f(x))$ *which generates a horizontal homomorphism* $Df(x)\colon (\mathcal{O}_x, d_c^x) \to (\widetilde{\mathcal{O}}_{f(x)}, \widetilde{d}_c^{f(x)})$.

Theorem. *Let* $f \in W_q^1(\Omega,\widetilde{M})$*,* $1 \leqslant q < \infty$*. Then* f *is cc-differentiable a.e. in* Ω *in the Sobolev topology* W_q^1*, i.e.:*

$$\left(\fint_{B_r(x)} \widetilde{d}((Df(x))(y), f(y))^q\,dy\right)^{1/q} + r\left(\fint_{B_r(x)} |D_h(Df(x))(y) - D_h f(y)|^q dy\right)^{1/q} = o(r) \quad \text{as } r \to 0.$$

The theorem generalizes Reshetnyak theorem [2] in Euclidean space, and theorem by Vodop'yanov [3] in Carnot groups.

The proof is based on the scheme of Vodopyanov [3] and rely on approximation of Sobolev mappings by Lipschitz mappings, defined on measurable subsets of Ω, and Rademacher type theorem formulated above.

Let Q be a Hausdorff dimension of cc-space M: $Q = \sum\limits_{i=1}^{m} i(\dim H_i - \dim H_{i-1})$, $\dim H_0 = 0$. Applying imbedding theorems we obtain

Corollary 1. *Let* $f \in W_q^1(\Omega,\widetilde{M})$*,* $q > Q$*. Then* f *is cc-differentiable a. e. in* Ω.

Corollary 2. *Let $f \in W_q^1(\Omega, \widetilde{M})$, $1 \leqslant q < Q$. Then f is cc-differentiable in the topology of $L_{\frac{Qq}{Q-q}}$ a.e. in Ω, i.e.:*

$$\left(\fint_{B_r(x)} \widetilde{d}((Df(x))(y), f(y))^{\frac{Qq}{Q-q}}\, dy \right)^{\frac{Q-q}{Qq}} = o(r) \quad \text{as} \quad r \to 0.$$

In Euclidean spaces these corollaries are due to Calderon–Zygmund [4].

References

[1] *Vodopyanov S. K., Greshnov A. V.* Differentiability of mappings in geometry of Carnot–Caratheodory spaces // Izv. Akad. Nauk (in preparation).

[2] *Reshetnyak Yu. G.* Generalized distributions and differentiability almost everywhere // Mat. Sb. 1968. V. 75, № 3. P. 657–675.

[3] *Vodopyanov S. K.* On differentiability of mappings of Sobolev class on Carnot group // Mat. Sb. 2003. V. 194, № 6. P. 67–86. (Russian).

[4] *Calderon A. P., Zygmund A.* Local properties of solutions of elliptic differential equations // Stud. Math. 1961. V. 20. P. 171–225.

The Generating Function of the Bivariate Zernike Polynomials

S. G. Kazantsev [1]

Sobolev Institute of Mathematics

Let $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ be the open unit disc in $\mathbb{C}$. It is well-known [1] that the bivariate Zernike polynomials

$$Z^{n,k}(z,\overline{z}) = \begin{cases} \sum\limits_{s=0}^{k} (-1)^{k-s} C_{n-k}^{s} C_{n-s}^{k-s} \overline{z}^{k-s} z^{n-k-s} & \text{for } k = 0, 1, \ldots, \left[\dfrac{n}{2}\right], \\ (-1)^n \overline{Z}^{n,n-k}(z,\overline{z}) & \text{for } k = \left[\dfrac{n}{2}\right] + 1, \ldots, n, \end{cases}$$

form a complete orthogonal system (basis) for the Hilbert space $L_2(\mathbb{D})$, comprising square integrable (complex-valued) functions on $\mathbb{D}$. Zernike polynomials have useful applications, for example, in optics [1], image processing and tensor tomography [2].

In this paper the generating function G for Zernike polynomials $Z^{n,k}$ are constructed and some new properties of this polynomials are obtained.

Theorem. *The function*

$$G(\lambda, \overline{\lambda}; z, \overline{z}) = \frac{1}{1 + \overline{z}\lambda - z\overline{\lambda} - |\lambda|^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \lambda^k \overline{\lambda}^{n-k} Z^{n,k}(z,\overline{z}), \ |z| \leqslant 1, \ |\lambda| < 1,$$

is the generating function for Zernike polynomials, so we have

$$Z^{n,k}(z,\overline{z}) = \frac{1}{k!(n-k)!} \left. \frac{\partial^n G(\lambda, \overline{\lambda}; z, \overline{z})}{\partial \lambda^k \partial \overline{\lambda}^{n-k}} \right|_{\lambda=0}.$$

References

[1] *Born M., Wolf E.* Principles of Optics. New York: Pergamon, 1983.

[2] *Kazantsev S. G., Bukhgeim A. A.* Singular value decomposition of the 2D fan-beam Radon transform of tensor fields // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2004. V. 12, № 4. (to appear).

[1] Sobolev Institute of Mathematics, pr. Acad. Koptyug, 4, Novosibirsk 630090, Russia. E-mail: kazan@math.nsc.ru

This research was supported by RFBR grant № 02–01–00296.

Completeness of the NCS Symmetries

V. S. Kalnitsky [1]

Saint-Petersburg State University

The set of vector fields $\{Y_\alpha\}$ is called *Nonlinear Control System* (NCS) in view of differential equation $\dot{x} = u^\alpha Y_\alpha(x)$ which they define on manifold. Here $\{u^\alpha\}$ is the set of piece-wise constant function of time. The trajectory of this equation is piece-wise arcs of the some linear combination of fields NCS trajectories. We will denote two point $z \sim z'$ if there is the set of control functions $\{u^\alpha\}$ such that the trajectory with initial z reach z'. Let now M^n be C^∞-manifold; $L = \{Y_\alpha\}$ be NCS.

Definition. The NCS L is *weak controllable* (WC) on the set $A \in M$ if $\exists x_0 \in M : \forall z \in A\, \forall U_{x_0} \exists z' \in U_{x_0} : z \sim z'$, where U_{x_0} is a neighborhood.

To describe the geometrical sense of the above notion, let us introduce the omega-limits of flow $\Omega^\pm_X(A) = \bigcap\limits_{z \in A} \operatorname{Cl} \gamma^\pm(z)$, $\Omega_X = \Omega^+_X \cup \Omega^-_X$, where $\gamma(z)$ is the trajectory of field X pathing through point z. If the NCS consists of one field X then it is WC on A iff $\Omega_X(A) \neq \varnothing$. The next statement demonstrates the connection of above notions and completeness. Let U^∞_X denote the set of points belonging to $\operatorname{Nul} X$ or closed trajectories. If $\Omega^+_x(M \backslash U^\infty_X) \neq \varnothing$ and $\Omega^-_x(M \backslash U^\infty_X) \neq \varnothing$ then X is complete.

Applying the idea used in the Kobayashi theorem [1] on the affine symmetries completeness we can formulate the main result.

Theorem. *Let field Y be a symmetry of the NCS consisting of complete fields. If NCS is WC on manifold then Y is complete.*

This theorem can regarded as prolongation of the Palais Theorem [2]. Namely, if the set of complete fields generate an finite dimensional Lie algebra, the latter consists of complete fields but does not include their symmetries. If however the set of fields is weak-controllable one we can extend the Lie algebra with finite set of symmetries if there are.

References

[1] *Kobayashi Sh.* Transformation groups in differential geometry. New York–Heidelberg: Springer, 1972.

[2] *Palais R.* A global formulation of the Lie theory of transformation groups // Mem. Amer. Math. Soc. 1957. V. 22.

[1] Saint-Petersburg State University, pr. Universitetsky, 28, Saint-Petersburg 198504, Russia. E-mail: skalnitsky@hotmail.com

Some Problems for Sobolev Spaces on the Halfline

Gennady A. Kalyabin [1]

Image Processing Systems Institute of RAS,
Samara Academy of Humanities

We review recent results [1–3] yielding the solution for several problems related to the spaces $W_2^n(\mathbb{R}_+^1)$:

— problem posed by V. I. Burenkov [4] on asymptotic behaviour for the least norms of extension operators $W_2^n(\mathbb{R}_+^1) \to W_2^n(\mathbb{R}^1)$ as $n \to \infty$;

— Tikhomirov question on explicit formulae for the sharp constants in Kolmogorov type inequalities [5, § 2.4], $0 \leqslant k < n$:

$$\sup_{x>0} |f^{(k)}(x)| \leqslant K_{n,k} \|f^{(n)}|L_2(\mathbb{R}_+^1)\|^{\alpha} \|f|L_2(\mathbb{R}_+^1)\|^{1-\alpha}, \quad \alpha := \frac{2k+1}{2n};$$

— problem to establish the minimal $W_2^n(\mathbb{R}_+^1)$-norms of extrapolations under various boundary conditions:

$$\text{(i) } f^{(s)}(0) = 1,\ f^{(k)}(0) = 0,\ k \neq s; \qquad \text{(ii) } \sum_{k=0}^{n-1} \sigma^{2k} |f^{(k)}(0)|^2 = 1,\ \sigma > 0,$$

— Stechkin–Gabushin problem [6] on constructive calculation of the best approximations (in uniform, i.e. C-norm) of differentiation operators $D^k := d^k/dx^k$, by means of *linear operators* $V\colon L_2(\mathbb{R}_+^1) \to C(\mathbb{R}_+^1)$ whose norms do not exceed N, on the class of functions with $L_2(\mathbb{R}_+^1)$-norm of $f^{(n)}$ not greater than 1:

$$E(N) := \inf_{\|V|L_2(\mathbb{R}_+^1)\to C(\mathbb{R}_+^1)\| \leqslant N} \ \sup_{\|f^{(n)}|L_2(\mathbb{R}_+^1)\| \leqslant 1} \|f^{(k)} - Vf|C(\mathbb{R}_+^1)\|.$$

The author is grateful to S. M. Nikol'skiy, V. M. Tikhomirov, V. I. Burenkov, and G. G. Magaril-Ilyaev for valuable discussions.

References

[1] Image Processing Systems Institute, Molodogvardejskaya 151, Samara 443001, Russia.
E-mail: kalyabin@mb.ssau.ru, kalyabin@lycos.com, klgnaa@mail.ru
The work was supported by the grants of RFBR (project № 02–01–00602) and CRDF (project SA–014–02).

[1] *Kalyabin G. A.* Best extension operators for Sobolev spaces on the half-line // Funct. Anal. Appl. 2002. V. 36, № 2. P. 106–113.
[2] *Kalyabin G. A.* Extrapolations with least norms in the Sobolev spaces W_n^2 on the half-axis and the whole axis // Tr. Mat. Inst. Steklova. 2003. V. 243. P. 230–236. (Russian).
[3] *Kalyabin G. A.* Funct. Anal. Appl. 2004. V. 38, № 3.
[4] *Burenkov V. I., Gorbunov A. L.* Sharp estimates for the minimal norm of extension operators for Sobolev spaces // Izv. Math. 1997. V. 61, № 1. P. 3–44.
[5] *Tikhomirov V. M.* Some problems in approximation theory. M.: MSU, 1976.
[6] *Gabushin V. N.* The best approximation of the differentiation operator on the half line // Mat. Zametki. 1969. V. 6. P. 573–582. (Russian).

Metric Differentiability of Mappings and its Applications

M. B. Karmanova [1]
Novosibirsk State University

We study differential properties of mappings $f\colon E \to \mathbb{X}$ defined on measurable subsets $E \subset \mathbb{R}^n$ with values in a complete metric space $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$.

1. For a Lipschitz mapping $f\colon E \to \mathbb{X}$, we prove the existence a.e. of the limit

$$\lim_{\substack{|\alpha-\beta|\to 0\\ \alpha<0<\beta\\ x+\alpha u, x+\beta u\in E}} \frac{d_{\mathbb{X}}(f(x+\beta u), f(x+\alpha u))}{|\alpha-\beta|} \stackrel{\text{def}}{=} MD(f,x)(u)$$

where $u \in \mathbb{S}^{n-1}$. We show the homogeneity and measurability of the function $MD(f,x)(u)$.

2. For a bounded subset $E' \subset E$ and a Lipschitz mapping $f\colon E \to \mathbb{X}$, given $\varepsilon > 0$ we prove the existence of the compact set $K \subset E'$ such that $|E' \setminus K| < \varepsilon$ and on which the following estimate holds:

$$d_{\mathbb{X}}(f(z), f(y)) - MD(f,x)(z-y) = o(|z-y|), \quad x, y \in K, z \in E,$$

while $z, y \to x$ where $o(|z-y|)$ is uniform on K.

3. We prove that a Lipschitz mapping $f\colon E \to \mathbb{X}$ is metrically differentiable a.e. and $MD(f,x)(u)$ is its metric differential, i.e., $MD(f,x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is a seminorm and the following estimate holds:

$$d_{\mathbb{X}}(f(z), f(y)) - MD(f,x)(z-y) = o(|z-x| + |y-x|)$$

for a.e. $x \in E$ while $z, y \to x$ (Rademacher-type theorem).

The statements 1 and 3 have been obtained in [2] in the case of an open set E.

4. We prove that a mapping $f\colon E \to \mathbb{X}$ such that

$$\overline{\lim_{y\to x, y\in E}} \frac{d_{\mathbb{X}}(f(x), f(y))}{|x-y|} < \infty \quad \text{for a.e. } x \in E, \tag{1}$$

is metrically differentiable a.e. (a Stepanov-type theorem).

[1] Novosibirsk State University, Pirogova str., 2, Novosibirsk 630090, Russia.
E-mail: maryka@online.nsk.su
Supported by scientific program «Universities of Russia»: УР 04.01.030.

5. For a Lipschitz mapping $f\colon E \to (\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ with continuous and non-degenerate on E the metric differential $MD(f,x)(\cdot)$, we have

$$|d_{\mathbb{X}}(f(y), f(z)) - MD(f,x)(y-z)| = o(MD(f,x)(y-z))$$

while $y, z \to x$, where x, z are density points of the set E. Moreover, the n-dimensional Hausdorff measure of the image of the set $Z = \{x \in E : \exists u_0 \in \mathbb{S}^{n-1} : MD(f,x)(u_0) = 0\}$ equals 0.

6. We define the approximate metric differential and prove the approximate metric differentiability a.e. of a mapping f such that

$$\operatorname{ap}\overline{\lim_{y\to x}} \frac{d_{\mathbb{X}}(f(x), f(y))}{|x-y|} < \infty \tag{2}$$

for a.e. $x \in E$. We obtain that

a) mappings of a Sobolev class $W^1_q(\Omega; \mathbb{X})$, $q \geqslant 1$ [3], are approximately metrically differentiable a.e. in the case of the separable complete metric space $\mathbb{X}$,

b) continuous mappings of a Sobolev class $W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{X})$, $q > n$, and continuous quasimonotone mappings of a Sobolev class $W^1_{n,\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{X})$ are metrically differentiable a.e.

7. For

a) Lipschitz mappings $f\colon E \to (\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$;

b) mappings $f\colon E \to (\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ fulfilling the condition (1) or (2);

c) mappings of the Sobolev class $W^1_q(\Omega; \mathbb{X})$, $q \geqslant 1$, where $\mathbb{X}$ is the separable complete metric space;

d) continuous quasimonotone mappings of the Sobolev class $W^1_{n,\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{X})$ and continuous mappings of the Sobolev class $W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{X})$, $q > n$,

we give the definition of a metric coarea factor $\mathcal{J}_k(MD(f,x))$ and obtain the area formula

$$\int\limits_A \mathcal{J}(MD(f,x))\, dx = \int\limits_{\mathbb{X}} N(f, y, A \setminus \Sigma_f)\, d\mathcal{H}^n(y),$$

the change-of-variable formula in the Lebesgue integral

$$\int\limits_A u(f(x))\mathcal{J}(x,f)\, dx = \int\limits_{\mathbb{X}} u(y) N(f, y, A \setminus \Sigma_f)\, d\mathcal{H}^n(y),$$

and the coarea formula

$$\int\limits_E g(x)\mathcal{J}_k(MD(f,x))\, d\mathcal{H}^n(x) = \int\limits_{\mathbb{X}} d\mathcal{H}^k(s) \int\limits_{f^{-1}(s)\setminus\Sigma_f} g(u)\, d\mathcal{H}^{n-k}(u)$$

(where $\Sigma_f \subset E$, $|\Sigma_f| = 0$, $A \subset E$ $(A \subset \Omega)$ are measurable sets; in the coarea formula $\mathbb{X}$ is a $\mathcal{H}^n$-rectifiable metric space).

8. For Lipschitz mappings $f\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ of metric spaces, we define the metric Jacobian $\mathcal{J}(f,x)$ and obtain the area formula

$$\int_{\mathbb{Y}} \mathcal{J}(f,x)\, d\mathcal{H}^n(x) = \int_{\mathbb{X}} N(f,y,\mathbb{Y})\, d\mathcal{H}^n(y)$$

in the case of a $\mathcal{H}^n$-rectifiable metric space $\mathbb{Y}$.

The property 8 has been proved in [1] in the case of separable metric spaces $\mathbb{Y}$ and $\mathbb{X}$.

9. For the Lipschitz mappings $f\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ of a $\mathcal{H}^n$-rectifiable metric space $\mathbb{Y}$ into a $\mathcal{H}^k$-rectifiable metric space $\mathbb{X}$, $k \leqslant n$, we give the definition of the metric coarea factor $\mathcal{J}_k(f,x)$ and obtain the coarea formula

$$\int_{\mathbb{Y}} f(x)\mathcal{J}_k(f,x)\, d\mathcal{H}^n(x) = \int_{\mathbb{X}} d\mathcal{H}^k(s) \int_{f^{-1}(s)} f(u)\, d\mathcal{H}^{n-k}(u).$$

The property 9 has been proved in [1] in the case of separable metric space $\mathbb{Y}$ and a Lipschitz mapping $f\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{R}^k$. We use methods of [4–6] in the proofs of 2, 4, 5–9.

References

[1] *Ambrosio L., Kirchheim B.* Rectifiable sets in metric and Banach spaces // Math. Ann. 2000. V. 318. P. 527–555.

[2] *Kirchheim B.* Rectifiable metric spaces: local structure and regularity of the Hausdorff measure // Proc. Amer. Math. Soc. 1994, V. 121. P. 113–123.

[3] *Reshetnyak Yu. G.* Sobolev classes of functions with values in a metric space // Sibirsk. Math. Zh. 1997. V. 38, № 3. P. 657–675.

[4] *Vodop'yanov S. K.* $\mathcal{P}$-differentiability on Carnot groups in different topologies and related topics // Proc. Anal. Geom. Novosibirsk: Sobolev Institute Press, 2000. P. 603–670.

[5] *Vodop'yanov S. K.* The theory of Lebesgue integral. Lecture notes on the mathematical analysis, NSU, 1999–2003.

[6] *Vodop'yanov S. K.* Geometry of the Carnot–Carathéodory spaces, quasiconformal analysis and geometric measure theory // Vladikavkaz. Math. Zh. 2003. V. 5, № 1. P. 1–21.

Расширения точечно-инвариантного класса ОДУ третьего порядка

В. В. Картак [1]

Башкирский государственный университет

Класс дифференциальных уравнений назовём *точечно-инвариантным* или *замкнутым* классом, если все уравнения этого класса остаются в нём после применения к ним точечных преобразований.

В работе [1] найден *минимальный* замкнутый класс уравнений третьего порядка

$$y'''=\{-3X(x,y)y''^2+[P(x,y)y'^2+Q(x,y)y'+R(x,y)]y''+S(x,y)y'^5+L(x,y)y'^4 \\ +K(x,y)y'^3+M(x,y)y'^2+N(x,y)y'+T(x,y)\}/(Y(x,y)-X(x,y)y'). \quad (1)$$

Рассмотрим уравнение вида:

$$y''' = \frac{y''^2\mathbf{Q}_t(x,y;y') + y''\mathbf{R}_{t+2}(x,y;y') + \mathbf{P}_{t+5}(x,y;y')}{\mathbf{K}_{t+1}(x,y;y')}. \quad (2)$$

Функции из правой части уравнения (2) суть полиномы по y' с коэффициентами, зависящими только от (x,y), $t \in N_0$:

$$\mathbf{Q}_t(x,y;y') = q_t y'^t + \ldots + q_0, \qquad \mathbf{R}_{t+2}(x,y;y') = r_{t+2}y'^{(t+2)} + \ldots + r_0,$$
$$\mathbf{P}_{t+5}(x,y;y') = p_{t+5}y'^{(t+5)} + \ldots + p_0, \quad \mathbf{K}_{t+1}(x,y;y') = k_{t+1}y'^{(t+1)} + \ldots + k_0.$$

Теорема. *Для того, чтобы класс уравнений* (2) *был замкнут относительно точечных преобразований, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* $q_t = 3k_{t+1}$.

Назовем класс уравнений (2), для которого выполнено условие теоремы, *t-ым расширением класса* (1).

Список литературы

[1] *Дмитриева В. В.* Точечно-инвариантные классы обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка // Мат. зам. 2001. Т. 70, № 2. С. 195–200.

---

[1] Башкирский государственный университет, ул. Фрунзе, 32, Уфа 450074, Россия.
E-mail: DmitrievaVV@ic.bashedu.ru
Работа выполнена при поддержке INTAS (код проекта 03–51–5007).

Классификация h-пространств типа $\{5\}$ по группам и алгебрам Ли проективных движений

А. Н. Карузин [1]

Казанский государственный университет

Используя метод Аминовой (см., например, [1]), необходимые и достаточные условия существования в 5-мерном пространстве $\mathbb{R}^5$ бесконечно малых преобразований, переводящих геодезические снова в геодезические, — проективных движений, можно записать в виде

$$(h_{AB})_{,C} = 2G_{AB}\varphi_{,C} + G_{AC}\varphi_{,B} + G_{BC}\varphi_{,A} \quad \text{(уравнения Эйзенхарта)}, \qquad (1)$$
$$L_\xi G_{AB} = h_{AB} \quad \text{(обобщенные уравнения Киллинга)},$$

где G_{AB} — метрический тензор пространства $\mathbb{R}^5$, h_{AB} — некоторый тензор, φ — некоторая 1-форма, запятая означает ковариантную производную, а $L_\xi G_{AB}$ — производную Ли, $A, B, C = 1, \ldots, 5$, а задача интегрирования уравнений (1) и (2) разбивается на ряд случаев, в зависимости от того, какой тип (характеристику Сегре) имеет тензор h_{AB}. Метрики, допускающие нетривиальные решения уравнений (1), называются h-метриками, а определяемые ими пространства — h-пространствами соответствующего типа.

В данной работе рассмотрен случай h-пространств типа $\{5\}$. Вводя косонормальный репер, были проинтегрированы уравнения Эйзенхарта (1) и найдены проективный репер, h-метрики и соответствующие им h-пространства. Были рассмотрены проективно-групповые свойства h-пространств указанного типа. С помощью полученных результатов проинтегрированы уравнения (2) и получена классификация h-пространств типа $\{5\}$ по группам и алгебрам Ли проективных движений.

Результаты работы планируется использовать при построении теоретико-полевых моделей теории Калуцы — Клейна.

Список литературы

[1] *Аминова А. В.* Проективные преобразования псевдоримановых многообразий. М.: Янус-К, 2003.

[1] Казанский государственный университет, ул. Кремлевская, 18, Казань 420008, Россия.

E-mail: Andrey.Karuzin@ksu.ru

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 02–01–00996).

Оценки интегральных средних гиперболически выпуклых функций

И. Р. Каюмов [1], *Ю. В. Обносов* [2]

Казанский государственный университет и
Научно-исследовательский институт механики и математики
им. Н. Г. Чеботарева

Пусть Ω — односвязная область, лежащая в круге $D = \{|z| < 1\}$. Область Ω называется *гиперболически выпуклой*, если любые две точки из Ω можно соединить дугой окружности, лежащей в Ω и ортогональной к окружности $|z| = 1$. Голоморфная и однолистная в D функция f называется *гиперболически выпуклой*, если область $f(D)$ лежит в D и является гиперболически выпуклой.

В работе доказывается гипотеза Мехии — Поммеренке о том, что тейлоровские коэффициенты гиперболически выпуклых функций в круге ведут себя как $O(\log^{-2} n/n)$ при $n \to \infty$, в предположении, что образ единичного круга при отображении такими функциями является областью с ограниченным граничным вращением. Кроме того, получены асимптотически точные оценки интегральных средних производных таких функций, а также рассмотрен пример гиперболически выпуклой функции, отображающей единичный круг на область с бесконечным граничным вращением.

[1]Научно-исследовательский институт механики и математики им. Н. Г. Чеботарева, Университетская, 17, Казань 420028, Россия.

E-mail: ikayumov@ksu.ru

[2]Научно-исследовательский институт механики и математики им. Н. Г. Чеботарева, Университетская, 17, Казань 420028, Россия.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ 02–01–00168, 03–01–00015, 03–01–96193.

Реализация проекта СО РАН по созданию электронного каталога математических Интернет-ресурсов

О. А. Клименко [1], *В. А. Александров* [2]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Возникновение и внедрение новых информационных технологий, в том числе Интернета, открывает доступ к использованию огромного объёма информации, в частности, математической. Возникает настоятельная необходимость в систематизации знаний.

В ходе выполнения проекта предполагается представить информацию в виде древовидного электронного каталога, в котором различные ветви соответствуют различным разделам математики. Ветви могут переплетаться, образуя новые направления. Двигаясь по ветвям, можно будет получать следующую информацию, связанную с конкретным математическим направлением: лаборатории, кафедры, научные школы и конкретные специалисты, занимающиеся данной проблематикой, диссертации и другие электронные ресурсы, ссылки на журналы, в которых публикуются статьи по этому направлению и конференции с близкой тематикой.

Информационная система будет способствовать созданию единого образовательного пространства. С её помощью можно будет осуществлять подбор квалифицированных кадров по математическим дисциплинам, поиск методических материалов, учебных программных средств и др. Сейчас уже создан прототип электронного каталога. В работе над проектом принимают участие Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Институт систем информатики им. А. П. Ершова СО РАН.

[1]Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск 630090, Россия.
E-mail: klimenko@math.nsc.ru

[2]Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск 630090, Россия.
E-mail: alex@math.nsc.ru

Работа выполнена при поддержке СО РАН, комплексный интеграционный проект № 1–2003.

Об отображениях с конечным искажением площади

Д. Ковтонюк [1], *В. Рязанов* [2]

Институт прикладной математики и механики

Вводится новый естественный класс FAD_k отображений конечного искажения площади в размерности $k = 1, \ldots, n-1$, который при $k = 1$ совпадает с классом FLD отображений с конечным искажением длины, введённым Мартио, Сребро, Рязановым, Якубовым (2001). Во всех размерностях $k = 1, \ldots, n-1$ мы показываем, что отображение f в $\mathbb{R}^n$ с конечным искажение площади удовлетворяет определенным модульным неравенствам в терминах внутренней и внешней дилатаций отображений.

Далее мы предполагаем, что Ω — открытое множество $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и что отображение $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ непрерывно. Аналогично работе Мартио — Сребро — Рязанова — Якубова, для пары $Q(x,y) = (Q_1(x), Q_2(y))$ измеримых функций $Q_1\colon \Omega \to [1,\infty]$ и $Q_2\colon \Omega_* \to [1,\infty]$, мы говорим, что отображение $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$, $f(\Omega) = \Omega_*$, является *гипер-Q-отображением в размерности* $k = 1, \ldots, n-1$, если

$$M(f\Gamma) \leqslant \int\limits_{\Omega} Q_1(x)\rho^n(x)\,dm(x)$$

и

$$M(\Gamma) \leqslant \int\limits_{\Omega_*} Q_2(y)\rho_*^n(y)\,dm(y)$$

для каждого семейства Γ k-мерных поверхностей S в Ω и всех $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$ и $\rho_* \in \operatorname{adm} f\Gamma$. Мы также говорим, что отображение $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ является *гипер-Q-отображением*, если f является гипер-Q-отображением во всех размерностях $k = 1, \ldots, n-1$. Здесь $M(\Gamma)$ обозначает конформный модуль семейства Γ.

Теорема. *Пусть отображение $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ из класса FAD_k для некоторого $k = 1, \ldots, n-1$. Тогда f является гипер-Q-отображением в размерности k с*

$$Q(x,y) = (K_I(x,f), K_I(y,f^{-1})). \tag{1}$$

[1]Институт прикладной математики и механики, Розы Люксембург, 74, Донецк 83114, Украина.

E-mail: denis_kovtonyuk@bk.ru

[2]Институт прикладной математики и механики, Розы Люксембург, 74, Донецк 83114, Украина.

E-mail: ryaz@iamm.ac.donetsk.ua

Здесь $K_I(x,f)$ — внутренняя дилатация отображения f в точке x, а $K_I(y,f^{-1}) := \sum\limits_{x\in f^{-1}(y)} K_O(x,f)$, где $K_O(x,f)$ — внешняя дилатация отображения f в точке x.

Для заданного отображения $\varphi\colon E \to \mathbb{R}^n$ и точки $x \in E \subseteq \mathbb{R}^n$ положим $L(x,\varphi) = \limsup\limits_{y\to x\ y\in E} \dfrac{|\varphi(y)-\varphi(x)|}{|y-x|}$ и $l(x,\varphi) = \liminf\limits_{y\to x\ y\in E} \dfrac{|\varphi(y)-\varphi(x)|}{|y-x|}$. Отображение $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ называется отображением *конечного метрического искажения*, пишем $f \in FMD$, если f обладает (N)-свойством и $0 < l(x,f) \leqslant L(x,f) < \infty$ для почти всех $x \in \Omega$. Отметим, что отображение $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ из класса FMD, если и только если f дифференцируемо п. в. и обладает (N)- и (N^{-1})-свойствами.

Будем говорить, что отображение $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ обладает (A_k)-*свойством*, если выполнены два условия:

$(A_k^{(1)})$: для п. в. k-мерных поверхностей S в Ω сужение $f|_S$ обладает (N)-свойством;

$(A_k^{(2)})$: для п. в. k-мерных поверхностей S_* в $\Omega_* = f(\Omega)$ сужение $f|_S$ обладает (N^{-1})-свойством для каждого поднятия S поверхности S_*.

Здесь поверхность S в Ω называется *поднятием* поверхности S_* в $\mathbb{R}^n$ при отображении $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$, если $S_* = f \circ S$. Мы также говорим, что отображение $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ *конечного искажения площади в размерности* $k = 1,\ldots,n-1$, пишем $f \in FAD_k$, если $f \in FMD$ и обладает (A_k)-свойством. Наконец, мы говорим, что отображение $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ — *конечного искажения площади*, пишем $f \in FAD$, если $f \in FAD_k$ для каждого $k = 1,\ldots,n-1$.

Следствие. *Каждое отображение f из класса FAD является гипер-Q-отображением с Q, заданным в* (1).

Исследование медленных интегральных многообразий с применением инфинитезимального анализа

Л. И. Кононенко [1]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Рассматривается сингулярно возмущенная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y, t, \varepsilon), \\ \varepsilon \dot{y} &= g(x, y, t, \varepsilon), \end{aligned}$$

где $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, ε — малый параметр, f, g — достаточно гладкие функции, $\dot{x}$, $\dot{y}$ — производные по времени; x — медленная, y — быстрая переменные.

Исследование основано на применении метода интегральных многообразий с использованием элементов нестандартного анализа [1–3]. Приведена теорема о существовании медленного интегрального многообразия рассматриваемой системы в случае $m = n = 2$ на языке нестандартного анализа [4].

Список литературы

[1] *Картье П.* Сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений и нестандартный анализ // Успехи мат. наук. 1984. Т. 39, вып. 2(236). С. 57–75.

[2] *Звонкин А. К., Шубин М. А.* Нестандартный анализ и сингулярные возмущения // Успехи мат. наук. 1984. Т. 39, вып. 2(236). С. 77–127.

[3] *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Нестандартные методы анализа. Новосибирск: Наука, 1990.

[4] *Кононенко Л. И.* Инфинитезимальный анализ сингулярных систем с быстрыми и медленными переменными // Сиб. журн. индустр. математики. 2003. Т. 6, № 4(16). С. 51–59.

[1] Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск 630090, Россия.
E-mail: volok@math.nsc.ru

Stability and Regularity of Solutions to Elliptic Systems of Partial Differential Equations

A. P. Kopylov [1]

Sobolev Institute of Mathematics

§ 1. Stability of Classes of Solutions to Systems of Linear Partial Differential Equations.

One of the most important problems in modern analysis is that of investigating stability of classes of mappings. Unfortunately, the limits of this lecture do not allow us to discuss the problem fully. Therefore, we focus on its special (and very significant) case of stability of classes of solutions to systems of linear partial differential equations (this case is also important in solving the problems of the W_q^l-regularity of solutions to uniformly elliptic systems of linear partial differential equations with discontinuous coefficients and right-hand sides (see § 2)).

Let n, m, k, and l be naturals such that $n \geqslant 2$, $m \geqslant 1$, $k \geqslant 1$, $l \geqslant 1$, and

$$D = (D_1, D_2, \dots, D_k) = \sum_{|p|=l} a_p \partial^p, \tag{1.1}$$

where $a_p = \left(a_p^{j\varkappa}\right)_{\substack{j = 1, 2, \dots, k \\ \varkappa = 1, 2, \dots, m}}$ is a real (complex) $(k \times m)$-matrix, p is a multi-index of order $|p| = l$, and $\partial^p = (\partial_1)^{p_1} \circ (\partial_2)^{p_2} \circ \dots \circ (\partial_n)^{p_n}$ is the symbol of the partial derivative corresponding to p ($\partial_s = \partial/\partial x_s$), be an lth-order linear differential operator with constant coefficients. Assume that a mapping $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ (U is an open set in the n-dimensional real arithmetic Euclidean space $\mathbb{R}^n$ ($U \Subset \mathbb{R}^n$)) is locally close (in whatever sense) to the solutions $g = (g_1, g_2, \dots, g_m)$ to the system $Dg = 0$. Is it to be expected that f would be globally close to them?

Positive answers to this question were given in [1, 2]. There we understood proximity of f to the solutions to system $Dg = 0$ in the spirit of the concept of ξ^{l-1}-stability in the C^{l-1}-norm of classes of mappings. By the results of [1, 2], in the asymptotical sense, such (local) proximity is equivalent to the fulfillment of the following condition: f is a $W^l_{p,\mathrm{loc}}(U, \mathbb{R}^m)$-solution, where $p = p(f) > n$,

[1] Sobolev Institute of Mathematics, pr. Acad. Koptyug, 4, Novosibirsk 630090, Russia.
E-mail: kopylov@math.nsc.ru

to the differential inequality

$$|Df(x)| \leqslant \varepsilon \left\{ \sum_{\mu_1,\ldots,\mu_l=1}^{n} \left|\partial_{\mu_1\ldots\mu_l} f(x)\right|^2 \right\}^{1/2} \tag{1.2}$$

($\partial_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_l} = \partial_{\mu_1} \circ \partial_{\mu_2} \circ \ldots \circ \partial_{\mu_l}$) with a small value of the parameter ε.

Remark 1.1. In [1, 2], the operators D of the form of (1.1) with real coefficients are considered. In the lecture, we also consider the operators (1.1) with complex coefficients. Moreover, we make use of the following notions.

Definition 1.1. *A solution of class* $W^l_{q,\mathrm{loc}}(U, \mathbb{R}^m)$ $(W^l_{q,\mathrm{loc}}(U, \mathbb{C}^m))$ or *a* $W^l_{q,\mathrm{loc}}$*-solution*, $q \geqslant 1$, to inequality (1.2) and all other inequalities and systems of partial differential equations considered in the lecture is a mapping $f \in W^l_{q,\mathrm{loc}}(U, \mathbb{R}^m)$ $(\in W^l_{q,\mathrm{loc}}(U, \mathbb{C}^m))$ meeting the inequality (system) under consideration almost everywhere in U ($\mathbb{C}^m = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \ldots \times \mathbb{C}$ is the m-dimensional complex Euclidean space).

Definition 1.2 (see [3])**.** An operator (1.1) is called *elliptic* if its symbol $\sigma_D(\zeta) = \sum\limits_{|p|=l} \zeta^p a_p = \sum\limits_{|p|=l} (\zeta_1)^{p_1} \ldots (\zeta_n)^{p_n} a_p$ meets the condition $\operatorname{rank} \sigma_D(\zeta) = m$ for all $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. A system

$$Dg = 0, \tag{1.3}$$

with D an operator of the form of (1.1), is called *elliptic* if D is elliptic.

Remark 1.2. The symbol $W^l_q(U, \mathbb{R}^m)$ $(W^l_q(U, \mathbb{C}^m))$ stands for the Sobolev space of all mappings $g = (g_1, g_2, \ldots, g_m)\colon U \to \mathbb{R}^m$ $(\to \mathbb{C}^m)$ whose every component function $g_\varkappa$, $\varkappa = 1, 2, \ldots, m$, belongs to the Lebesgue space $L_q(U, \mathbb{R})$ $(L_q(U, \mathbb{C}))$ of measurable real-valued (complex-valued) functions $\psi\colon U \to \mathbb{R}$ $(\to \mathbb{C})$ with $\int\limits_U |\psi(x)|^q\, dx < \infty$ (here and below, $\infty = +\infty$) and has all weak partial derivatives $\partial^p g_\varkappa$, $|p| \leqslant l$, in the sense of Sobolev [4] up to lth order integrable to the power q; and by $W^l_{q,\mathrm{loc}}(U, \mathbb{R}^m)$ $(W^l_{q,\mathrm{loc}}(U, \mathbb{C}^m))$ we denote the space of all mappings $g\colon U \to \mathbb{R}^m$ $(\to \mathbb{C}^m)$ with the following property: every point $x \in U$ has a neighborhood $U_x \subset U$ such that $g|_{U_x} \in W^l_q(U_x, \mathbb{R}^m)$ $(\in W^l_q(U_x, \mathbb{C}^m))$. Note also that here (as it is usual in the theory of integral), two measurable functions on U are regarded as equivalent if they coincide almost everywhere (on U).

Theorem 1.1 (on stability in the C^{l-1}-norm of classes of solutions to systems $Dg = 0$ [1, 2])**.** *The class* $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_D$ *of solutions to the elliptic system* (1.3), *i.e., the class* $\bigcup\limits_{V\subset\mathbb{R}^n} \mathfrak{G}_V$, *where* $\mathfrak{G}_V$ *is the set of (all) solutions* $g\colon V\to\mathbb{R}^m$ *to this system in a domain (open connected set)* $V\subset\mathbb{R}^n$ *and the union is taken over all domains of* $\mathbb{R}^n$, *is stable in the* C^{l-1}*-norm in the following sense. Let* U *be a domain in* $\mathbb{R}^n$ *and let* V *be a bounded subdomain of* U *whose closure* $\operatorname{cl} V$ *is included in* U. *Then there exists a nonnegative real function* $\alpha=\alpha_{U,V,\mathfrak{G}}\colon [0,\infty[\to[0,\infty[$ *such that*

(1) $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0}\alpha(\varepsilon)=\alpha(0)=0$;

(2) *if a continuous mapping* $f\colon U\to\mathbb{R}^m$ *is a* $W^l_{q,\mathrm{loc}}$*-solution,* $q>n$, *to the differential inequality* (1.2), *where* $0\leqslant\varepsilon<\infty$, *and satisfies the condition*

$$\operatorname{diam} f^{(l-1)}(U)=\sup_{x,y\in U}\|f^{(l-1)}(x)-f^{(l-1)}(y)\|<\infty,$$

then there exists a mapping $g=g_{U,V}\colon U\to\mathbb{R}^m$ *in the class* $\mathfrak{G}$ *which meets the inequality*

$$\sum_{u=0}^{l-1}(\operatorname{diam} V)^{-(l-u-1)}\|(f-g)^{(u)}(x)\|\leqslant\alpha(\varepsilon)\operatorname{diam} f^{(l-1)}(U)$$

for $x\in V$. *Here* $h^{(\nu)}(x)$ *is the* ν*th-order derivative (differential) of a mapping* h *at a point* x, $\|h^{(\nu)}(x)\|$ *is its operator norm, and* $\operatorname{diam} V=\sup\limits_{x,y\in V}|x-y|$.

Remark 1.3. If D in (1.2) has complex coefficients then Theorem 1.1 is easily reduced to its special case when the coefficients of D are real (note that if D has complex coefficients then g and f are $\mathbb{C}^m$-valued mappings in Theorem 1.1).

Remark 1.4. It was also established in [2] that the condition of ellipticity of D is necessary for stability in the C^{l-1}-norm of classes $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_D$ of solutions to systems (1.3).

Remark 1.5. One of the most important cases of Theorem 1.1 is the theorem on stability of the class of holomorphic functions $g\colon U\to\mathbb{C}$, $U\Subset\mathbb{C}$, of a single complex variable. We first mention the following assertion.

Lemma 1.1. *If* $f\colon U\to\mathbb{C}$, $U\Subset\mathbb{C}$, *is a continuous* $W^1_{2,\mathrm{loc}}(U,\mathbb{C})$*-solution to the differential inequality*

$$|\partial_{\overline{z}}f(z)|\leqslant\varepsilon\big\{|\partial_z f(z)|^2+|\partial_{\overline{z}}f(z)|^2\big\}^{1/2} \tag{1.4}$$

($\partial_z=\frac12(\partial_x-i\partial_y)$, $\partial_{\overline{z}}=\frac12(\partial_x+i\partial_y)$, $x=\operatorname{Re} z$, $y=\operatorname{Im} z$, i *stands for the imaginary unit, inequality* (1.4) *is inequality* (1.2) *in complex notations in the* *case when, in* (1.2), $n = m = k = 2$, $l = 1$, *and* $D = D_{C-R}$ *is the Cauchy–Riemann operator) with* $0 \leqslant \varepsilon < 1/\sqrt{2}$, *then* f *is a solution to the Beltrami system*

$$\partial_{\overline{z}} f(z) = \mu(z)\partial_z f(z), \quad M = \operatorname*{ess\,sup}_{z\in U} |\mu(z)| < 1, \tag{1.5}$$

with $M \leqslant \varepsilon/\sqrt{1-\varepsilon^2}$. *On the other hand, if* f *is a continuous* $W^1_{2,\mathrm{loc}}(U,\mathbb{C})$*-solution to* (1.5) *with* $M < 1$ *then it is also a solution to* (1.4) *with* $\varepsilon = M$.

Next, let $\mathfrak{G}^\circ$ be the class of (all) orientation-preserving planar conformal mappings. The theory of stability in the C-norm of this class is based on the following theorem due to M. A. Lavrentiev and P. P. Belinskii (see, for example, [5, 6]).

Theorem 1.2. *If* $f\colon \mathrm{cl}\, B \to \mathrm{cl}\, B$, B *is the unit disk in* $\mathbb{C}$, *is a homeomorphism such that* $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, *and* $f|_B$ *is an orientation-preserving* $(1+\varepsilon)$*-quasiconformal mapping (i.e., a homeomorphic* $W^1_{2,\mathrm{loc}}$*-solution to some Beltrami system* (1.5) *with* $M = \varepsilon/(2+\varepsilon)$) *then the inequality*

$$|f(z) - z| \leqslant m \ln(1+\varepsilon), \tag{1.6}$$

where m *is a constant, holds at every* $z \in B$.

Other authors also took up the stability problem of the class $\mathfrak{G}^\circ$ (see, for example, [7, 8]). It was P. P. Belinskii who made the greatest contribution to solving this problem. He obtained stability estimate (1.6) and found the least value of the constant m in (1.6).

It should be noted in this connection that N. S. Dairbekov extended Theorem 1.2 to the case of mappings of arbitrary planar domains. Namely, in [9], he proved

Theorem 1.3. *Suppose that* $f\colon U \to \mathbb{C}$ *is a* $(1+\varepsilon)$*-quasiconformal mapping of a domain* $U \subset \mathbb{C}$. *Then there exists a conformal mapping* $g\colon U \to \mathbb{C}$ *such that*

$$|f(z) - g(z)| \leqslant m \ln(1+\varepsilon) R(f(U)),$$

where m *is the constant of* (1.6) *and* $R(f(U))$ *is the least of the radii of the disks including* $f(U)$ ($R(f(U)) = \infty$ *if* $f(U)$ *is unbounded*).

Thus, Theorems 1.2 and 1.3 guarantee stability of the class $\mathfrak{G}^\circ$ of planar conformal mappings in the whole domain U of f and not only in compact subdomains V of U (in other words, Theorems 1.2 and 1.3 guarantee stability of $\mathfrak{G}^\circ$ in a closed domain). The following natural question arises. Is it possible to strengthen Theorem 1.1 in a similar way? It turns out that, in general, this theorem cannot be sharpened. This ensues from results by Kopylov [10, 11] and Dairbekov [12] by which the class $\mathfrak{G}_{n,m}$ of (all) holomorphic mappings $g\colon V \to \mathbb{C}^m$ of domains $V \subset \mathbb{C}^n$, where n and m are arbitrary naturals, is not stable in the C-norm in a closed domain U even if U is of a sufficiently simple geometric structure. For example, the results of [12] and Lemma 1.1 imply

Theorem 1.4. *If* $0 < \varepsilon < \infty$ *then* $\mu(\varepsilon) = \sup\limits_f \inf\limits_g \sup\limits_{|z|<1} |f(z) - g(z)| = 1$, *where the supremum is taken over all continuous* $W^1_{2,\mathrm{loc}}$*-solutions* $f\colon B \to B$ (B *is the unit disk in* $\mathbb{C}$) *to differential inequality* (1.2) *in which* ε *is now the above-mentioned number, and the infimum is calculated over all holomorphic functions* $g\colon B \to \mathbb{C}$.

It is useful to compare Theorems 1.1–1.4 with the corresponding assertions in the stability theory of spatial conformal mappings founded (mainly) by Yu. G. Reshetnyak (see [13]). First, he demonstrated that stability in the C-norm of classes of n-dimensional conformal mappings, $n \geqslant 3$, takes place in a closed domain U if U is in the very broad class of so-called John domains. Second, he showed that the degree of integrability of 1st-order partial derivatives of spatial $(1+\varepsilon)$-quasiconformal mappings increases infinitely as $\varepsilon \searrow 0$. Finally, he proved that the class of spatial conformal mappings is stable in the W^1_q-norms, where $q = q(\varepsilon) \to \infty$ as $\varepsilon \searrow 0$.

Returning to Theorems 1.1–1.4, note that they correspond to the first of the above-mentioned results due to Reshetnyak. The following two theorems (Theorems 1.5 and 1.6) are in turn analogs to his second and third results. Really, by Theorem 1.5 the degree of integrability of the lth-order partial derivatives of solutions to (1.2), where D is elliptic, grows infinitely as $\varepsilon \searrow 0$, and by Theorem 1.6 these derivatives are close to the corresponding derivatives of solutions to (1.3) in the L_d-norms for arbitrarily large d.

Theorem 1.5. *If* $\mathfrak{G}$ *is the class of solutions to an elliptic system* (1.3) *then* $\varliminf\limits_{\varepsilon\to 0}\{\varepsilon P_D(\varepsilon)\} > 0$, *where* D *is the differential operator given by the left-hand sides of the equations of the system and* $P_D(\varepsilon) = \inf\limits_{f\in\mathfrak{G}(\varepsilon)}\bigl\{\sup\bigl[d \geqslant 1 \mid f \in W^l_{d,\mathrm{loc}}(\operatorname{dom} f)\bigr]\bigr\}$, $0 \leqslant \varepsilon < \infty$ *is the supremum of the set of all numbers* d *such that the* l*th-order partial derivatives* $\partial^p f$ *of each mapping* f *in the class* $\mathfrak{G}(\varepsilon) = \mathfrak{G}_D(\varepsilon) = \bigcup\limits_{U\subset\mathbb{R}^n} \mathfrak{G}_U(\varepsilon)$ ($\mathfrak{G}_U(\varepsilon)$ *is the set of all continuous* W^l*-solutions*, $W^l = \bigcup\limits_{U\subset\mathbb{R}^n}\bigcup\limits_{q>n} W^l_{q,\mathrm{loc}}(U, \mathbb{R}^m)$, *to differential inequality* (1.2) *in* U) *belong to* L_d *locally.*

Remark 1.6. By hypoellipticity of elliptic linear differential operators [3], $\mathfrak{G}(0)$ coincides with the class $\mathfrak{G}$ of solutions to elliptic system (1.3).

Theorem 1.6. *Suppose that $\mathfrak{G}$ is the class of solutions to an elliptic system* (1.3) *and d is a real number greater than n. Then there exist a positive number $\varepsilon_d = \varepsilon_{d,\mathfrak{G}}$ and a function $\gamma_d = \gamma_{d,\mathfrak{G}} : [0, \varepsilon_d[\times]0, 1[\to [0, \infty[$ such that*

(1) $\lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} \gamma_d(\varepsilon, t) = \gamma_d(0, t) = 0$ *for each $t \in]0, 1[$;*

(2) *if a continuous mapping $f : U \to \mathbb{R}^m$ of a domain U in $\mathbb{R}^n$ belongs to the class $\mathfrak{G}(\varepsilon)$, where $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_d$, then f also belongs to the class $W^l_{d,\mathrm{loc}}$ and for every $t \in]0, 1[$ and every bounded domain V which lies in U together with its φ-neighborhood $O_\varphi(V)$, $\varphi = \frac{1-t}{2t} \operatorname{diam} V$, there exists a solution $g : V \to \mathbb{R}^m$ to* (1.3) *satisfying the inequality*

$$\Big\| \Big[\sum_{|p|=l} |\partial^p (f - g)|^2 \Big]^{1/2} \Big\|_{L_d(V)} \left(= \left\{ \int_V \Big[\sum_{|p|=l} |\partial^p f(x) - \partial^p g(x)|^2 \Big]^{d/2} dx \right\}^{1/d} \right)$$
$$\leqslant \gamma_d(\varepsilon, t) (\operatorname{diam} V)^{n/d-1} \operatorname{diam} f^{(l-1)}(O_\varphi(V)).$$

The following assertion is an analog to Lemma 1.1 in the case of solutions to inequalities (1.2) of the general type.

Lemma 1.2. *A continuous mapping $f : U \to \mathbb{R}^m$ $(\to \mathbb{C}^m)$, $U \Subset \mathbb{R}^n$, is a $W^l_{q,\mathrm{loc}}$-solution, $q \geqslant 1$, to differential inequality* (1.2), *with D a linear differential operator of the form of* (1.1), *if and only if f is a solution to some system of linear partial differential equations*

$$Df(x) = Q(x) (\ldots \partial_{\mu_1 \ldots \mu_l} f_1(x) \ldots \ldots \partial_{\mu_1 \ldots \mu_l} f_2(x) \ldots \ldots \ldots \partial_{\mu_1 \ldots \mu_l} f_m(x) \ldots)^T, \tag{1.7}$$

where $(\cdot)^T$ stands for matrix transposition and $Q : U \to \mathbb{R}^{k \times mn^l}$ $(\to \mathbb{C}^{k \times mn^l})$ is a measurable mapping such that $\|Q\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in U} \|Q(x)\| \leqslant \varepsilon$ ($\|Q(x)\|$ is the operator norm of the matrix $Q(x)$).

If D is elliptic and ε is sufficiently small then the system (1.7) may be naturally considered as a multidimensional analog to a Beltrami system (1.5).

Concluding the section, note that the results of Section 2 make it possible to essentially reduce a priori assumptions on the differential properties of mappings in the above-mentioned assertions. Indeed, Theorem 2.1 and Lemma 1.2 imply

Theorem 1.7. *If D is an elliptic linear differential operator of the form of* (1.1) *with constant coefficients and d is in $]1, \infty[$ then there exists a positive* *number* $\varepsilon_{D,d}$ *such that each* $W^l_{d,\mathrm{loc}}$*-solution to* (1.2), *where* $\varepsilon \leqslant \varepsilon_{D,d}$, *is its* W^l*-solution.*

§ 2. On Regularity of Solutions to Uniformly Elliptic Systems of Linear Partial Differential Equations with Discontinuous Coefficients and Right-Hand Sides.

In this section, we consider the problem of W^l_q-regularity of solutions to uniformly elliptic systems of linear partial differential equations with discontinuous coefficients and right-hand sides on the assumption that the leading coefficients of the systems under consideration possess the property of "slow variation". It should be noted that this problem has much in common with the stability problem of classes of solutions to systems of linear partial differential equations considered in Section 1 as regards the nature of the results of Section 1 and 2 and methods used in their proofs (see [1, 14]).

Now, we briefly expose the results of the section.

To this end, suppose that an lth-order system

$$\sum_{|p|\leqslant l} a_p(x)\partial^p f(x) = h(x), \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U, \tag{2.1}$$

consisting of k linear partial differential equations in m sought real (complex) functions of n real variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($n \geqslant 2$, $m \geqslant 1$, $k \geqslant 1$, $l \geqslant 1$) has measurable real-valued (complex-valued) coefficients $a_p^{j\varkappa}\colon U \to \mathbb{R}$ ($\to \mathbb{C}$) and right-hand sides $h_j\colon U \to \mathbb{R}$ ($\to \mathbb{C}$), where $j = 1, 2, \ldots, k$; $\varkappa = 1, 2, \ldots, m$; and $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ is a multi-index of order $|p| \leqslant l$. Furthermore, in (2.1), $U \Subset \mathbb{R}^n$; $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)\colon U \to \mathbb{R}^m$ ($\to \mathbb{C}^m$) and $h = (h_1, h_2, \ldots, h_k)\colon U \to \mathbb{R}^k$ ($\to \mathbb{C}^k$) are $\mathbb{R}^m$- and $\mathbb{R}^k$-valued ($\mathbb{C}^m$- and $\mathbb{C}^k$-valued) mappings; $a_p = \left(a_p^{j\varkappa}\right)_{\substack{j = 1, 2, \ldots, k\\ \varkappa = 1, 2, \ldots, m}}\colon U \to \mathbb{R}^{k\times m}$ ($\to \mathbb{C}^{k\times m}$) is a mapping from U into the space $\mathbb{R}^{k\times m}$ ($\mathbb{C}^{k\times m}$) of real (complex) $(k\times m)$-matrices; finally, in (2.1), we as usual use the matrix notation. Moreover, assume that the following conditions are fulfilled.

($\circ$) System (2.1) is *uniformly elliptic*, i.e., there exists a number t, $0 < t < \infty$, such that the inequalities

$$\left|a_p^{j\varkappa}(x)\right| \leqslant t, \quad |p| = l, \quad j = 1, 2, \ldots, k, \quad \varkappa = 1, 2, \ldots, m, \tag{2.2}$$

and

$$\left|\sum_{|p|=l} \zeta^p a_p(x) u\right| \geqslant \frac{1}{t}, \quad \zeta \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{C}^m, \quad |\zeta| = 1, \quad |u| = 1, \tag{2.3}$$

hold for almost every $x \in U$.

($\circ\circ$) The leading coefficients $a_p^{j\varkappa}$, $|p| = l$, of the system have *the property of slow variation*, i.e., there exists a nonnegative number ε, such that every point $x \in U$ has a neighborhood U_x ($\subset U$) and a measurable set $E \subset U_x$ of full measure with respect to U_x ($\operatorname{mes}(U_x \setminus E) = 0$) for which the inequalities

$$\left|a_p^{j\varkappa}(x') - a_p^{j\varkappa}(x'')\right| \leqslant \varepsilon, \quad |p| = l, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad \varkappa = 1, 2, \dots, m, \tag{2.4}$$

hold for every x' and x'' in E.

($\circ\circ\circ$) There exists a number q_0, $1 \leqslant q_0 < \infty$, such that the remaining coefficients $a_p^{j\varkappa}$, $|p| < l$, and right-hand sides h_j of the system belong to the Lebesgue space $L_{q_0,\mathrm{loc}}(U, \mathbb{R})$ ($L_{q_0,\mathrm{loc}}(U, \mathbb{C})$), i.e., they are locally integrable to the power q_0 in U.

Remark 2.1. Conditions ($\circ$) and ($\circ\circ$) are not independent: ($\circ$) implies ($\circ\circ$) with $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}_{r,t} \leqslant \tilde{\varepsilon}_{c,t} \leqslant 2t$. Here $\tilde{\varepsilon}_{r,t} = \tilde{\varepsilon}_{r,t}^{n,m,k,l}$ ($\tilde{\varepsilon}_{c,t} = \tilde{\varepsilon}_{c,t}^{n,m,k,l}$) is the supremum of $\tilde{\varepsilon}(a_p)$ taken over all measurable mappings $a_p \colon U \to \mathbb{R}^{k\times m}$ ($\to \mathbb{C}^{k\times m}$), $U \Subset \mathbb{R}^n$, meeting (2.2) and (2.3). Moreover, $\tilde{\varepsilon}(a_p)$ is the infimum of the numbers $\varepsilon \geqslant 0$ for which a_p satisfies (2.4). It is important that the parameter ε of slow variation of leading coefficients $a_p^{j\varkappa}$, $|p| = l$, of system (2.1) can take a value less than $\tilde{\varepsilon}_{r,t}$ ($\tilde{\varepsilon}_{c,t}$).

Remark 2.2. A typical example of systems (2.1) satisfying ($\circ$)–($\circ\circ\circ$) is given by a Beltrami system (1.5). Moreover, its various multidimensional generalizations, as well as linear uniformly elliptic systems with continuous coefficients and right-hand sides, are also among systems like (2.1) with ($\circ$)–($\circ\circ\circ$).

Remark 2.3. Denote by $t_{0,r} = t_{0,r}^{n,m,k,l}$ ($t_{0,c} = t_{0,c}^{n,m,k,l}$) the least of the numbers t that can be used in condition ($\circ$) (it is easy to show that $t_{0,r}, t_{0,c} \geqslant 1/k^{1/4}$). We also assume that the values of parameters n, m, k, and l are such that the set of uniformly elliptic systems corresponding to these parameters is not empty.

The following result on W_q^l-regularity of solutions to systems (2.1) was obtained in [14].

Theorem 2.1. *Suppose that numbers t, q_0, and ρ satisfy the inequalities $t_{0,r} \leqslant t < \infty$, $n < q_0 < \infty$, and $1 < \rho < q_0$, respectively. Then there exists a positive number $\varepsilon_{r,t,q_0,\rho} = \varepsilon_{r,t,q_0,\rho}^{n,m,k,l}$ having the property: if system (2.1) with measurable real-valued coefficients and right-hand sides satisfies the conditions ($\circ$)–($\circ\circ\circ$) with these t and q_0, and with $\varepsilon \leqslant \varepsilon_{r,t,q_0,\rho}$, then every $W_{\rho,\mathrm{loc}}^l$-solution to the system is its $W_{q_0,\mathrm{loc}}^l$-solution.*

Remark 2.4. In [14], we considered the number 1 instead of $t_{0,r}$ in the corresponding theorem and some other results. Clearly, their proofs in [14] are extendable to the case of $t \in [t_{0,r}, \infty[$.

In other words, Theorem 2.1 claims that if system (2.1) with measurable coefficients and right-hand sides is uniformly elliptic then, on the assumption of a sufficiently slow variation of its leading coefficients $a_p^{j\varkappa}$, $|p| = l$, the degree of local integrability of lth-order partial derivatives of each $W^l_{\rho,\mathrm{loc}}$-solution to the system is the same as the degree of local integrability of its lower coefficients and right-hand sides.

The following questions arise in this connection. How important is condition ($\circ\circ$) of slow variation for the leading coefficients of (2.1) in Theorem 2.1? Can it be removed at all?

Theorem 2.2 and Proposition 2.2 (see below) in particular imply that condition ($\circ\circ$) may be eliminated from Theorem 2.1 only if $m = l = 1$. Furthermore, if (2.1) is a uniformly elliptic system with measurable complex-valued coefficients and right-hand sides then Theorem 2.1 still holds (see Theorem 2.6) but, in this case, eliminating ($\circ\circ$) is possible for no collection of n, m, k, and l.

Now, we consider the results of the lecture in more detail. To this end, starting from Theorem 2.1 and fixing t, ρ, and q_0 such that $t_{0,r} \leqslant t < \infty$, $1 < \rho < q_0$, and $n < q_0 < \infty$, we introduce the quantity $\mathcal{E}_{r,t,\rho}(q_0) = \mathcal{E}^{n,m,k,l}_{r,t,\rho}(q_0)$, which is the least upper bound of the set of numbers $\varepsilon \geqslant 0$ having the following property: every $W^l_{\rho,\mathrm{loc}}$-solution to an arbitrary system (2.1) with measurable real-valued coefficients and right-hand sides meeting ($\circ$)–($\circ\circ\circ$) with the values of ε, t, and q_0 considered now, belongs to $W^l_{q_0,\mathrm{loc}}(U, \mathbb{R}^m)$. Note that in the case of system (2.1) with complex-valued coefficients and right-hand sides, the corresponding quantity $\mathcal{E}_{c,t,\rho}(q_0) = \mathcal{E}^{n,m,k,l}_{c,t,\rho}(q_0)$, where $t \in [t_{0,c}, \infty[$, $\rho \in]1, q_0[$, and $q_0 \in]n, \infty[$, is defined similarly.

We consider the case when systems (2.1) have real-valued coefficients and right-hand sides, and the case of systems (2.1) with complex-valued coefficients and right-hand sides separately.

First case: *$a_p^{j\varkappa}$ and h_j are real functions.*

First, suppose that the condition $m = l = 1$ holds. Then we have the following assertion.

Theorem 2.2. *Let n, m, k, and l be such that $m = l = 1$. Assume that the system (2.1) with measurable real-valued coefficients and right-hand sides satisfies ($\circ$) and ($\circ\circ\circ$). Then every $W^1_{1,\mathrm{loc}}$-solution to this system is its $W^1_{q_0,\mathrm{loc}}$-solution.*

Thus, in the case of $m = l = 1$, if we study the problems of W_q^l-regularity of solutions to uniformly elliptic systems (2.1) with measurable real-valued coefficients and right-hand sides then condition ($\circ\circ$) of slow variation of the leading coefficients of the systems is unnecessary.

Now, turn to the case of $(m-1)^2+(l-1)^2 \neq 0$. But at first, using $\mathcal{E}_{r,t,\rho}(q_0)$, Theorem 8 of [14], and Remarks 1 and 2 thereto (see [14]), we can strengthen Theorem 2.1 as follows.

Theorem 2.1′. *For each* $\rho \in]1, q_0[$, *there exists a function* $C_{r,\rho}(t) = C_{r,\rho}^{n,m,k,l}(t)$, $0 < C_{r,\rho}(t) < \infty$, *in* t $(t_{0,r} \leqslant t < \infty)$ *such that*

$$\frac{C_{r,\rho}(t)}{q_0} \leqslant \mathcal{E}_{r,t,\rho}(q_0) \tag{2.5}$$

if $n < q_0 < \infty$.

In Theorem 2.1′, an estimate from below is given for the quantity $\mathcal{E}_{r,t,\rho}(q_0)$. In turns out that, for $(m-1)^2+(l-1)^2 \neq 0$, there is an upper bound for this quantity similar to lower bound (2.5). Namely, the following assertion is true.

Theorem 2.3. *Suppose that* $(m-1)^2+(l-1)^2 \neq 0$. *Assume that* t, q_0, *and* ρ *satisfy the conditions* $t > t_{*r}$, $q_0 \geqslant n/\varepsilon_0$, *and* $1 < \rho < q_0$, *where* $t_{*r} = t_{*r}^{n,m,k,l}$ *is defined in Lemma* 2.2 *below, and*

$$\varepsilon_0 = \min\left\{\Lambda(n,l), \frac{t-t_{*r}}{C_0}, \frac{t-t_{*r}}{m^{1/2} n_l C_0 t t_{*r}}\right\} \quad (<1) \tag{2.6}$$

with $n_l = (n+l-1)!/\{l!(n-1)!\}$ *and*

$$C_0 = t_{*r}\{kmn_l\}^{1/2}[\Lambda(n,l)]^{-1}, \tag{2.7}$$

moreover, $\Lambda(n,l)$ (<1) *depends only on* n *and* l. *Then the inequality* $\mathcal{E}_{r,t,\rho}(q_0) \leqslant 2C_0 n/q_0$ *holds.*

In connection with Theorem 2.3, it is necessary to note the following two lemmas (Lemmas 2.1 and 2.2).

Lemma 2.1. *An operator* D *of the kind of* (1.1) *is elliptic if and only if there exists a real number* t $(0 < t < \infty)$ *satisfying the inequalities*

$$\left|a_p^{j\varkappa}\right| \leqslant t, \quad |p| = l, \quad j = 1,2,\ldots,k, \quad \varkappa = 1,2,\ldots,m, \tag{2.8}$$

and

$$\left|\sum_{|p|=l} \zeta^p a_p u\right| \geqslant \frac{1}{t}, \quad \zeta \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{C}^m, \quad |\zeta| = 1, \quad |u| = 1. \tag{2.9}$$

Denote by $\mathcal{O}_r = \mathcal{O}_r^{n,m,k,l}$ ($\mathcal{O}_c = \mathcal{O}_c^{n,m,k,l}$) the set of all lth-order elliptic linear differential operators with real (complex) constant coefficients of the form of (1.1) (note that the relation $\mathcal{O}_r^{n,m,k,l} \neq \varnothing$ ($\mathcal{O}_c^{n,m,k,l} \neq \varnothing$) holds for those and only those values of n, m, k, and l, for which the set of uniformly elliptic systems (2.1) with measurable real-valued (complex-valued) coefficients and right-hand sides is not empty).

Remark 2.5. Starting from Lemma 2.1 and considering an elliptic differential operator $D \in \mathcal{O}_r^{n,m,k,l}$ ($\in \mathcal{O}_c^{n,m,k,l}$), we define the parameter t_D to be the least of the numbers t satisfying (2.8) and (2.9), where $a_p^{j\varkappa}$ are (now) the coefficients of D. In view of Remark 2.3, the inequality $t_D \geqslant 1/k^{1/4}$ holds.

Definition 2.1. An operator $D \in \mathcal{O}_r^{n,m,k,l}$ ($\in \mathcal{O}_c^{n,m,k,l}$) is called *trivial* if the set of all solutions-distributions to the system $Df = 0$ consists only of $\mathbb{C}^m$-valued polynomials $P_{l-1}(x) = \sum\limits_{|p|\leqslant l-1} x^p \gamma_p$ of degree at most $l-1$, where $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ and $\gamma_p = (\gamma_p^1, \gamma_p^2, \dots, \gamma_p^m) \in \mathbb{C}^m$. We call an operator $D \in \mathcal{O}_r^{n,m,k,l}$ ($\in \mathcal{O}_c^{n,m,k,l}$) *nontrivial* if it is not trivial in this sense.

Lemma 2.2. *Let $n \geqslant 2$, $m \geqslant 1$, $k \geqslant 1$, $l \geqslant 1$, $(m-1)^2 + (l-1)^2 \neq 0$, and $\mathcal{O}_r^{n,m,k,l} \neq \varnothing$. Suppose that $t_{*r} = t_{*r}(n,m,k,l)$ is the infimum of the set of the parameters t_D for nontrivial differential operators $D \in \mathcal{O}_r^{n,m,k,l}$. Then there exists a nontrivial operator $D_* \in \mathcal{O}_r^{n,m,k,l}$ with $t_{D_*} = t_{*r}$.*

The definition of $\mathcal{E}_{r,t,\rho}(q_0)$ and Theorems 2.1′ and 2.3 imply the following assertions.

Proposition 2.1. *Suppose that $t_{0,r} \leqslant t < \infty$, $n < q_0 < \infty$, and $1 < \rho < q_0$. Then the fulfillment of the inequality $\varepsilon < C_{r,\rho}(t)/q_0$, where $C_{r,\rho}(t)$ is the function of Theorem* 2.1′, *is sufficient for a number $\varepsilon \geqslant 0$ to serve as $\varepsilon_{r,t,q_0,\rho}$ in Theorem* 2.1.

Proposition 2.2. *Suppose that $(m-1)^2 + (l-1)^2 \neq 0$, $t_{*r} < t < \infty$, $n/\varepsilon_0 < q_0 < \infty$, and $1 < \rho < q_0$. Then for $\varepsilon \geqslant 0$ to serve as $\varepsilon_{r,t,q_0,\rho}$ in Theorem* 2.1, *it is necessary that $\varepsilon \leqslant 2C_0 n/q_0$, where C_0 is the constant* (2.7).

Second case: *the coefficients and the right-hand sides of system* (2.1) *are complex functions.*

Now, we consider the case where the coefficients and the right-hand sides of systems (2.1) are complex functions. This case is different than the case when the systems under consideration have real-valued coefficients and right-hand sides. Namely, the following assertions hold.

Theorem 2.4. *For every n ($\geqslant 2$), m ($\geqslant 1$), k ($\geqslant 1$), and l ($\geqslant 1$) such that $\mathcal{O}_c^{n,m,k,l} \neq \varnothing$ and every $\rho \in]1, q_0[$, we have the inequalities $C_{r,\rho}^{n,2m,2k,l}(t)/q_0 \leqslant$*

$\mathcal{E}_{c,t,\rho}^{n,m,k,l}(q_0)$, $n < q_0 < \infty$, $t_{0,c} \leqslant t < \infty$, *where* $C_{r,\rho}^{n,2m,2k,l}(t)$ *is a function in* t *defined in* (2.5).

Theorem 2.5. *Let* n, m, k, *and* l *such that* $\mathcal{O}_c^{n,m,k,l} \neq \varnothing$. *Suppose that* t, q_0, and ρ *satisfy the conditions* $t > t_{*c}$, $q_0 \geqslant n/\varepsilon_0$, *and* $1 < \rho < q_0$. *Then* $\mathcal{E}_{c,t,\rho}(q_0) \leqslant 2C_0 n/q_0$, *where* $\varepsilon_0 = \varepsilon_{0,c} = \varepsilon_{0,c,t}^{n,m,k,l}$ *and* $C_0 = C_{0,c} = C_{0,c}^{n,m,k,l}$ *are defined by* (2.6) *and* (2.7), *respectively*; *moreover*, *in* (2.6) *and* (2.7), t_{*r} *is now replaced by the infimum* $t_{*c} = t_{*c}^{n,m,k,l}$ *of the set of the characteristics* t_D (*defined in Remark* 2.5) *of nontrivial differential operators* $D \in \mathcal{O}_c^{n,m,k,l}$.

Thus, in Theorem 2.5 (in comparison with Theorem 2.3), the case $m = l = 1$ is no longer exceptional.

The definition of $\mathcal{E}_{c,t,\rho}(q_0)$ and Theorems 2.4 and 2.5 imply the following assertions.

Theorem 2.6. *Suppose that* $t_{0,c} \leqslant t < \infty$, $n < q_0 < \infty$, *and* $1 < \rho < q_0$. *Then there exists a positive number* $\varepsilon_{c,t,q_0,\rho} = \varepsilon_{c,t,q_0,\rho}^{n,m,k,l}$ *having the following property*: *if system* (2.1) *with measurable complex-valued coefficients and right-hand sides satisfies the conditions* $(\circ)-(\circ\circ\circ)$ *with* t *and* q_0 *considered now and* $\varepsilon \leqslant \varepsilon_{c,t,q_0,\rho}$, *then every* $W_{\rho,\mathrm{loc}}^l$*-solution to the system is its* $W_{q_0,\mathrm{loc}}^l$*-solution.*

Proposition 2.3. *Suppose that* $t_{0,c} \leqslant t < \infty$, $n < q_0 < \infty$, *and* $1 < \rho < q_0$. *Then the fulfillment of the inequality* $\varepsilon < C_{r,\rho}^{n,2m,2k,l}(t)/q_0$ *is sufficient for a number* $\varepsilon \geqslant 0$ *to serve as* $\varepsilon_{c,t,q_0,\rho}$ *in Theorem* 2.6.

Proposition 2.4. *Suppose that* $t_{*c} < t < \infty$, $n/\varepsilon_0 < q_0 < \infty$, *and* $1 < \rho < q_0$. *Then for* $\varepsilon \geqslant 0$ *to serve as* $\varepsilon_{c,t,q_0,\rho}$ *in Theorem* 2.6, *it is necessary that* $\varepsilon \leqslant 2C_0 n/q_0$.

Thus, if q_0 is sufficiently large then we cannot eliminate condition $(\circ\circ)$ from Theorem 2.6 (by Remark 2.1, the absence of $(\circ\circ)$ means that $\tilde{\varepsilon}_{c,t}$ is among the numbers $\varepsilon_{c,t,q_0,\rho}$ in Theorem 2.6).

Remark 2.6. By Proposition 2.2 and Remark 2.1, if $(m-1)^2 + (l-1)^2 \neq 0$ then omitting condition $(\circ\circ)$ in Theorem 2.1 is also impossible.

References

[1] *Kopylov A. P.* Principles of the stability theory in the C^l-norm of classes of solutions to systems of linear partial differential equations // Dokl. Akad. Nauk. 1999. V. 365, № 5. P. 589–592. (Russian).

[2] *Kopylov A. P.* Stability in the C^l-norm of classes of solutions to systems of linear partial differential equations of elliptic type // Sibirsk. Mat. Zh. 1999. V. 40, № 2. P. 352–371. (Russian).

[3] *Schwartz L.*, Complex Analytic Manifolds. Elliptic Partial Differential Equations. Moscow: Mir, 1964. (Russian translation).
[4] *Sobolev S. L.* Some applications of functional analysis in mathematical physics. Novosibirsk: Izdat. SO AN SSSR, 1962. (Russian).
[5] *Belinskii P. P.* Solution of extremal problems of theory of quasiconformal mappings by the variational method // Sibirsk. Mat. Zh. 1960. V. 1, № 3. P. 303–330. (Russian).
[6] *Belinskii P. P.* General properties of quasiconformal mappings. Novosibirsk: Nauka, Sibirsk. otd-nie, 1974. (Russian).
[7] *Ahlfors L.* Lectures on quasiconformal mappings. M.: Mir, 1969. (Russian translation).
[8] *Krushkal' S. L.*, Mappings, ε-quasiconformal in the mean // Sibirsk. Mat. Zh. 1967. V. 8, № 4. P. 798–806. (Russian).
[9] *Dairbekov N. S.* About stability of classes of conformal mappings on plane and in space // Sibirsk. Mat. Zh. 1986. V. 27, № 5. P. 188–191. (Russian).
[10] *Kopylov A. P.* On stability of classes of conformal mappings. II // Sibirsk. Mat. Zh. 1997. V. 38, № 2. P. 326–343. (Russian).
[11] *Kopylov A. P.* On stability of classes of conformal mappings. III // Sibirsk. Mat. Zh. 1997. V. 38, № 4. P. 825–842. (Russian).
[12] *Dairbekov N. S.* On the question of stability of the class of holomorphic functions in a closed domain // Sibirsk. Mat. Zh. 1997. V. 38, № 5. P. 1047–1050. (Russian).
[13] *Reshetnyak Yu. G.* Stability theorems in geometry and analysis. Novosibirsk: Nauka, 1982. (Russian).
[14] *Kopylov A. P.* On the W^l_q-regularity of solutions to systems of differential equations in the case when the equations are constructed from discontinuous functions // Sibirsk. Mat. Zh. 2003. V. 44, № 4. P. 749–771. (Russian).

On Lambek's Invariants Ker and Im for Commutative Squares in Raĭkov-Semiabelian Categories

Yaroslav Kopylov [1]

Sobolev Institute of Mathematics

In [1], Lambek introduced two invariants Ker and Im for commutative squares in the category of groups and proved that if, in the diagram

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \\ \downarrow & S & \downarrow & T & \downarrow \\ A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' \end{array} \tag{1}$$

of groups and group homomorphisms the rows are exact then $\operatorname{Im} S = \operatorname{Ker} T$. Leicht and Nomura pointed out that this theorem holds for arbitrary exact categories (see [2, 3]). Nomura also considered the case where the rows in (1) are semiexact, constructed a morphism $\Lambda\colon \operatorname{Im} S \to \operatorname{Ker} T$ and some sequence including Λ. We try to find out if there are similar results for categories semiabelian in the sense of Raĭkov. Apart from all abelian categories, the class of Raĭkov-semiabelian categories contains many nonabelian additive categories. The categories of (Hausdorff or all) topological abelian groups, topological vector spaces, Banach (or normed) spaces, filtered modules over filtered rings, and torsion-free abelian groups are typical examples of Raĭkov-semiabelian categories. The main difference between the Raĭkov-semiabelian and abelian categories is that the standard diagram lemmas hold in Raĭkov-semiabelian categories under some extra conditions which usually amount to the strictness of these morphisms. It turns out that the "inverse" to Nomura's morphism Λ always exists and Λ itself is defined if the vertical morphism $A \to A'$ is strict. We also study exactness of Nomura's sequence when this morphism is a kernel (= strict monomorphism) or a cokernel (= strict epimorphism).

References

[1] *Lambek J.* Goursat's theorem and homological algebra // Can. Math. Bull. 1964. V. 7. P. 597–608.

[2] *Leicht J. B.* Axiomatic proof of J. Lambek's homological theorem // Can. Math. Bull. 1964. V. 7. P. 609–613.

[3] *Nomura Y.* An exact sequence generalizing a theorem of Lambek // Arch. Math. 1971. V. 22. P. 467–478.

[1] Sobolev Institute of Mathematics, Academik Koptyug Prospect 4, Novosibirsk 630090, Russia.

E-mail: yakop@math.nsc.ru

Инвариантные приводимые почти комплексные структуры и ассоциированные метрики на $S^1 \times S^3$

Е. С. Корнев [1]

Кемеровский государственный университет

Рассматривается прямое произведение $(S^1 \times S^3, g_0)$ единичных сфер. Пространство $S^1 \times S^3$ является группой Ли $U(1) \times SU(2)$. Алгебра Ли отождествляется с пространством $\mathbb{R}^4$ с операцией $[X, Y] = (0, [X', Y']_{\mathbb{R}^3})$, где X' и Y' — проекции векторов X и Y на $\mathbb{R}^3$, а $[X', Y']_{\mathbb{R}^3}$ — их векторное произведение. Пространство $S^1 \times S^3$ является расслоением Хопфа над S^2. Слои этого расслоения являются двумерными торами. Пусть E — двумерное расслоение подпространств, касательных к слоям расслоения Хопфа и пусть F — g_0-ортогональное к E двумерное распределение.

В работе изучаются левоинвариантные почти комплексные структуры J, которые сохраняют распределения E и F. Такие структуры будем называть *приводимыми*.

Найден вид приводимых инвариантных почти комплексных структур. Каждой такой структуре соответствует число $q = (a, b, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4$ такое, что $b < 0$, $\beta < 0$. Найдены значения параметров, при которых структура J_q интегрируема.

Все почти комплексные структуры J_q сохраняют фундаментальную 2-форму $\omega_0(X, Y) = g_0(X, J_0 Y)$, где J_0 — почти комплексная структура, соответствующая значению $q = (0, -1, 0, -1)$. Тогда каждой почти комплексной структуре J_q соответствует эрмитова метрика $g_q = \omega_0(JX, Y)$. Легко видеть, что метрики g_q имеют вид:

$$g_q = c\, dx_0^2 - 2a\, dx_0\, dx_1 - b\, dx_1^2 + \gamma\, dx_2^2 - 2\alpha\, dx_2\, dx_3 - \beta\, dx_3^2.$$

Для таких метрик найден тензор Риччи и скалярная кривизна.

Теорема. *Все метрики g_q не эйнштейновы, их скалярные кривизны имеют вид*:

$$s_q = \frac{b}{2} + 2c + (\gamma - \beta) - \frac{c}{2}(\gamma - \beta)^2.$$

Если $c \in (0, 1/2)$, то скалярная кривизна неограничена, при $c \geqslant 1/2$, $s_q < 2$. Скалярная кривизна s_q не имеет критических точек при допустимых значениях параметра q.

[1] Кемеровский государственный университет, ул. Красная, 6, Кемерово 650043, Россия. E-mail: smolen@kemsu.ru

On Izentropy Solutions to Quasilinear Equations of the First Order

Mikhail V. Korobkov [1] *and Evgeniy Yu. Panov* [2]

Sobolev Institute of Mathematics,
Novgorod State University

One of the main results of the talk is the following

Theorem 1. *Let $u = u(t,x)$ be a continuous generalized solution to the equation $u_t + \varphi(u)_x = 0$ in a domain $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, where $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a continuous function. Put $(a,b) = \operatorname{Int} u(\Omega)$. Then the following condition is fulfilled*:

$(*)$ *There exists a closed set $F \subset (a,b)$ of measure 0 such that $\varphi(u)$ satisfies Lipschitz condition locally in $U = (a,b)\setminus F$ and the derivative $\varphi'(u)$ is a function of bounded variation locally in U.*

In addition, if Ω is a strip $\Omega = (t_1,t_2) \times \mathbb{R}$ then $F = \varnothing$.

Consider the partial case $u(t,x) = v_x(t,x)$ for some C^1-smooth function $v\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Then we immediately get the following corollary.

Theorem 2. *Let $v = v(t,x)$ be a nonlinear C^1-smooth function in a domain $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ such that $v_t = \varphi(v_x)$ in Ω, where $\varphi(u)$ is a continuous function. Put $(a,b) = \operatorname{Int} v_x(\Omega)$. Then the function $\varphi(u)$ satisfies the condition $(*)$. In a particular, the function $\varphi(u)$ is twice differentiable a.e. in (a,b).*

To prove Theorems 1 and 2 we use the results of the theory of izentropy solutions to quasilinear equations of the first order introduced by the second author [1]. Theorem 2 gives some information about analytical and geometrical properties of the images of the derivatives for C^1-smooth functions of two variables. Geometrical properties of the images of the derivatives for the case of differentiable (nonsmooth) functions were studied in [2].

References

[1] *Panov E. Yu.* Generalized solutions to Cauchy problem for quasilinear conservation laws. Diss.. . . kand. fiz.-mat. nauk. M.: MSU, 1991.

[2] *Korobkov M. V.* On a generalization of the Darboux theorem to the multidimensional case // Sibirsk. Mat. Zh. 2000. V. 41, № 1. P. 118–133.

[1] Sobolev Institute of Mathematics, pr. Acad. Koptyug, 4, Novosibirsk 630090, Russia.
E-mail: korob@math.nsc.ru

The first author was supported by RFBR (№ 02–01–01009) and the President Grant for Young Candidates of Science.

[2] Novgorod State University, ul. Bol'shaya Sankt-Peterburgskaya, 41, Velikii Novgorod 173003, Russia.
E-mail: pey@novsu.ac.ru

The second author was supported by RFBR (№ 02–01–00483, 03–01–00444), by the Ministry of Education of RF (№ E 02–1.0–216) and the Program "Universities of Russia".

Gluing Theorem for Alexandrov Spaces

Nikolai N. Kosovsky [1]

Saint-Petersburg State University

Let M be the result of attaching two Riemannian manifolds M_0 and M_1 along some isometry of their boundaries. In general the metric on M is not smooth. Hence we could not use classical Riemannian geometry. However M can be a space of curvature bounded from one side.

By $\mathbf{B}_i$ denote the second fundamental forms of common boundary Γ of M_i w.r.t. interior normals.

Theorem 1. *M is Alexandrov space of curvature $\geqslant \kappa$ iff $\mathbf{B}_0+\mathbf{B}_1$ is positively semidefinite and all sectional curvatures of M_0 and M_1 are $\geqslant \kappa$.*

Analogous assertion for spaces of curvatures bounded above is not true without additional assumptions. For example let us consider two copies of three-dimensional Euclidean spaces with a ball cut out. If we attach these spaces by corresponding spheres then the obtained space is not a space of nonpositive curvature. However this is an unique principal problem.

Moreover for spaces of curvatures bounded above one can attach more than two Riemmanian manifolds.

Theorem 2. *$M = \bigcup\limits_i M_i$ is an Alexandrov space of curvature $\leqslant \kappa$ iff next three conditions hold true.*

1. *$\mathbf{B}_i + \mathbf{B}_j$ is negatively semidefinite for $i \neq j$.*
2. *All sectional curvatures of all M_i are $\leqslant \kappa$.*
3. *Consider 2-directions σ such that restrictions of all $\mathbf{B}_i$ to σ are negatively definite. Sectional curvatures of Γ in 2-directions of such kind are $\leqslant \kappa$.*

[1] Saint-Petersburg State University, Universitetskii pr. 28, Peterhof 198504, Saint-Petersburg, Russia.

E-mail: kosovnn@pdmi.ras.ru

Totally Geodesic Distributions on Homogeneous 3-Manifolds

V. Krouglov [1] (*Joint work with D. Bolotov*)

Karazin Kharkiv National University

1. Introduction. Distribution on a smooth Riemannian manifold is the smooth subbundle of the tangent bundle. The distribution is said to be *transversally oriented* if it can be defined by the global non-degenerate 1-form α.

Definition 1. *Foliation structure* on a smooth $(2n+1)$-dimensional manifold is the transversally oriented codimension 1 distribution which is integrable, i.e. $\alpha \wedge (d\alpha)^n = 0$.

Definition 2. *Contact structure* on a smooth $(2n+1)$-dimensional manifold is the transversally oriented codimension 1 distribution which is as far from being integrable as possible, i.e. $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$.

Definition 3. *Confoliation* on a smooth $(2n+1)$-dimensional manifold is the transversally oriented codimension 1 distribution such that $\alpha \wedge (d\alpha)^n \geqslant 0$.

We will follow [2] defining second fundamental form of the distribution on a Riemannian manifold (M, g):

$$B(X, Y) = \frac{1}{2} g(\nabla_X Y + \nabla_Y X, Z),$$

where X, Y are the sections of the distribution and Z is the section of the orthogonal distribution.

Definition 4. The distribution is said to be *totally geodesic* if $B \equiv 0$.

2. The Existence of Totally Geodesic Distributions. We study the problem of existence of totally geodesic distributions on a closed orientable locally homogeneous 3-manifolds, which are either foliations, contact structures or confoliations. Using the integral formula from [3] and the explicit expression of the Ricci tensor, it can be obtained that *there are no totally geodesic contact structures and confoliations on closed manifolds modelled on* $\mathbb{E}^3$, $\mathbb{H}^3$, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ *and* Sol.

It is known that Hopf fibration defines the totally geodesic contact structure on spherical forms. It can be constructively proven the existence of the totally

[1] Karazin Kharkiv National University, Svobody Sq. 4, Kharkov 61077, Ukraine.
E-mail: vovik@univer.kharkov.ua

geodesic contact structures on the closed manifolds modelled on $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ and Nil.

It turned out that the case of $S^2 \times \mathbb{R}$-manifolds is the most difficult one. We prove the following theorem:

Theorem 1. *There are no totally geodesic contact structures on the closed manifolds modelled on* $S^2 \times \mathbb{R}$.

Remark 1. It is known that each totally geodesic foliation on the closed manifolds modelled on $S^2 \times \mathbb{R}$ is the foliation by the totally geodesic spheres.

3. The Extremal Properties of the Totally Geodesic Distributions. It is easy to show that the flow orthogonal to codimension 1 totally geodesic distribution is Riemannian [2]. In [1] it is shown that each totally geodesic confoliation on S^3 is the contact structure. The following question was posed:

Question 1. *Is it true, that each totally geodesic confoliation on the closed manifold modelled on some* 3*-dimensional homogeneous space, is either foliation or contact structure?*

The answer is "No" in general case as non-extremal (which is neither a foliation nor a contact distribution) confoliation on $S^2 \times S^1$ does exist. The next conjecture was stated by D. Bolotov:

Conjecture 1. *Each totally geodesic confoliation on closed* Nil*- or* $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$*-manifold is a contact structure.*

In present work we announce the partial answer to the conjecture.

Theorem 2. *Each totally geodesic confoliation on closed* $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$*-manifold is a contact structure.*

Remark 2. The local variant of the conjecture is false.

References

[1] *Gromoll D., Grove K.* One dimensional metric foliations in constant curvature spaces // Differential geometry and complex analysis. Berlin: Springer, 1985. P. 165–168.

[2] *Reinhart B.* The second fundamental form of a plane field // J. Different. Geom. 1977. V. 12. P. 619–627.

[3] *Aminov Yu.* The geometry of vector field. Amsterdam: Gordon & Breach, 2001.

The Grunsky–Milin Coefficients of Riemann Surfaces

S. L. Krushkal [1]

Bar-Ilan University, Israel, and
Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia

The classical method of the Grunsky coefficient inequalities provides one of the main technical tools for the theory of univalent holomorphic functions in the disk. Its applications to the functions with quasiconformal extensions recently gave rise to establishing various results in complex geometry of Teichmüller spaces and in related directions in geometric function theory.

In the case of the maps of Riemann surfaces, for example of finite analytic type (p, n), the corresponding inequalities do not concern the intrinsic features of these surfaces and thus cannot provide the sharp estimates.

The main subject of this talk is to extend this approach to Riemann surfaces of finite topological type and provide certain applications.

In particular, this allows us to extend to such surfaces the theorem of Kra on coincidence of all invariant (hyperbolic) metrics on abelian disks in the Teichmüller space $T(p, n)$ of Riemann surfaces of finite conformal type (p, n). We obtain also some important consequences in the complex geometry and pluripotential theory on Teichmüller spaces of open Riemann surfaces. The most of results concern the flat surfaces.

A principal point is that in order to provide quasiconformal continuations of conformal maps determined on the subdomains of a given surface, one is needed to work on the double of this surface.

[1] Bar-Ilan University, Ramat Gan 52900, Israel.
E-mail: krushkal@macs.biu.ac.il

Nonlinear Potential Theory for Sobolev Spaces in Carnot Groups

N. A. Kudryavtseva [1] *and S. K. Vodopyanov* [2]

Novosibirsk State University,
Sobolev Institute of Mathematics of SB of RAS

It is well-known that the famous paper by Yu. G. Reshetnyak [1] was at the beginning of the study of the nonlinear potential theory. The gaol of the talk is to show that there is a counterpart of this theory on one class of nilpotent Lie group. A *stratified homogeneous group* [2] or, in another terminology, a *Carnot group* is a connected simply connected nilpotent Lie group $\mathbb{G}$ whose Lie algebra V splits into the direct sum $V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$ of vector spaces such that $\dim V_1 \geqslant 2$, $[V_1, V_k] = V_{k+1}$ for $1 \leqslant k \leqslant m-1$ and $[V_1, V_m] = \{0\}$. Let vector fields $X_{11}, \ldots, X_{1n_1}$ constitute a basis for V_1. As they generate V, for each $1 < i \leqslant m$ we can choose a basis X_{ij}, $1 \leqslant j \leqslant n_i = \dim V_i$, for V_i which consists of commutators of the fields $X_{1k} \in V_1$ of order $i-1$. We identify each element $g \in \mathbb{G}$ with $x \in \mathbb{R}^N$, $N = \sum\limits_{i=1}^{m} n_i$, $x = (x_{ij})$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n_i$, by means of the exponential mappings $\exp\bigl(\sum x_{ij} X_{ij}\bigr) = g$. The dilations δ_t defined as $\delta_t x = (t^i x_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n_i}$, are automorphisms of $\mathbb{G}$ for every $t > 0$. The Lebesgue measure dx on $\mathbb{R}^N$ is the bi-invariant Haar measure on $\mathbb{G}$, and $d(\delta_t x) = t^\nu \, dx$ where $\nu = \sum\limits_{i=1}^{m} i \dim V_i$ is the homogeneous dimension of the group $\mathbb{G}$. The Lebesgue measure $|E|$ of a measurable set $E \subset \mathbb{G}$ equals $\int\limits_E dx$. Folland [3] defines a generalized Bessel kernel $J_\alpha(x)$ for $\operatorname{Re} \alpha > 0$ by

$$J_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int\limits_0^\infty t^{\alpha/2-1} \exp(-t) h(x,t)\, dt.$$

Here $h(x,t)$ is a fundamental solution to $\mathcal{L} + \partial/\partial t$, where $\mathcal{L} = -\sum\limits_{i=1}^{n_1} X_{1i}^2$ is a sublaplacian on the group $\mathbb{G}$. An analogous of Bessel potentials on Carnot groups is a space S^p_α of functions

[1] Novosibirsk State University, Pirogova str., 2, Novosibirsk 630090, Russia.
E-mail: nkudr@itam.nsc.ru
[2] Sobolev Institute of Mathematics, pr. Acad. Koptyug, 4, Novosibirsk 630090, Russia.
E-mail: vodopis@math.nsc.ru
Supported by Ministry of Education of Russia, grant E02–1.0–27.

$$g = J_\alpha * f = \int\limits_{\mathbb{G}} J_\alpha(y^{-1}x) f(y)\, dy$$

where $f \in L_p(\mathbb{G})$, $p \in (1,\infty)$, $\alpha \in (0,\infty)$ with the norm $\|g \mid S^p_\alpha\| = \|f \mid L^p\|$. If $\alpha \in \mathbb{N}$ then $S^p_\alpha(\mathbb{G}) = W^p_\alpha(\mathbb{G})$, where the Sobolev space $W^p_\alpha(\mathbb{G})$ consists of functions $f \in L^p$ having generalized derivatives $X_{1i_1} \ldots X_{1i_\alpha} f \in L^p$, $1 \leqslant i_1, i_\alpha \leqslant n_1$. Let μ be a Borel measure on $\mathbb{G}$. A non-linear potential corresponding to the classical non-linear potential theory [4] is defined by the following way [5]:

$$U_{\alpha,p}\mu(x) = \int\limits_{\mathbb{G}} J_\alpha(y^{-1}x) \Big[\int\limits_{\mathbb{G}} J_\alpha(z^{-1}y)\, d\mu(z) \Big]^{q-1} dy$$

where numbers $p, q \geqslant 0$, $1/p + 1/q = 1$, $p \in (1,\infty)$. An appropriate Wolff potential [4, 5] is a function

$$x \in \mathbb{G} \Rightarrow W_{\alpha,p}\mu(x) = \int\limits_0^1 \left[\frac{\mu(B(x,r))}{r^{\nu-\alpha p}} \right]^{q-1} \frac{dr}{r}, \quad \alpha p < \nu.$$

On Carnot group the Wolff inequality holds.

Theorem 1. *Let μ be a Borel measure on Carnot group $\mathbb{G}$. There exists constants c_1 and c_2 such that*

$$c_1 \int\limits_{\mathbb{G}} W_{\alpha,p}\mu(x)\, d\mu(x) \leqslant \int\limits_{\mathbb{G}} U_{\alpha,p}\mu(x)\, d\mu(x) \leqslant c_2 \int\limits_{\mathbb{G}} W_{\alpha,p}\mu(x)\, d\mu(x), \quad \alpha p < \nu.$$

If E is a compact subset of $\mathbb{G}$, then its L^p-capacity with respect to the Bessel kernel is defined similar to [1]:

$$\operatorname{cap}_{\alpha,p}(E) = \inf \Big\{ \int\limits_{\mathbb{G}} f(y)^p\, dy : f \geqslant 0,\ J_\alpha * f \geqslant 1 \quad \text{on} \quad E \Big\}.$$

We estimate the capacity of a set by getting upper and lower bounds for the W-potential of measures concentrated on that set.

Proposition 1. *For any nonnegative Borel measure μ,*

$$\operatorname{cap}_{\alpha,p}(W_{\alpha,p}\mu > \lambda) \leqslant \frac{c}{\lambda^{p-1}} \|\mu\|_1, \quad \alpha p < \nu,$$

with c depending on α, p, ν only.

Proposition 2. *Suppose E is a compact set in $\mathbb{G}$, μ is a Borel measure supported on E.*

(i) *If $W_{\alpha,p}\mu(x) \leqslant 1$ for all $x \in E$, then* $\operatorname{cap}_{\alpha,p}(E) \geqslant c_1\|\mu\|_1$, $\alpha p < \nu$.

(ii) *If $W_{\alpha,p}\mu \geqslant 1$ for all $x \in E$, then* $\operatorname{cap}_{\alpha,p}(E) \leqslant c_1\|\mu\|_1$, $\alpha p < \nu$.

Here c_1 and c_2 depend on α, p and ν.

As a corollary we obtain estimates for capacity of a ball.

Corollary 1. *For all $x \in \mathbb{G}$, $r \leqslant 1/2$ we have* $\operatorname{cap}_{\alpha,p}(B(x,r)) \sim r^{\nu-\alpha p}$.

We prove the capacitary strong-type inequality.

Theorem 2. *There is a constant c depending on α, p, ν only such that*

$$\int\limits_0^\infty \operatorname{cap}_{\alpha,p}(x : J_\alpha * f(x) \geqslant t)\, dt^p \leqslant c \int\limits_{\mathbb{G}} f(x)^p\, dx$$

for all $f \geqslant 0$.

It follows the following embedding

Theorem 3. *Let $1 < p < q < \infty$ and μ a regular Borel measure on $\mathbb{G}$. Then the following are equivalent*:

(i) *there is a constant c_1 such that $[\mu(B(x,r))]^{1/q} \leqslant c_1 r^{\frac{\nu}{p}-\alpha}$ for all $x \in \mathbb{G}$, $0 < r < 1$;*

(ii) *there is a constant c_2 such that $\|J_\alpha * f\|_{L^q(\mu)} \leqslant c_2\|f\|_{L^p}$ for all measurable $f \geqslant 0$.*

The proofs of above-mentioned results follows along lines of the corresponding proofs from [5]. It has be taken into account only that the kernel $J_\alpha(x)$ is not radial. Nevertheless, its behavior at 0 and at ∞ makes possible to adopt arguments of [5] to realize all the proofs under new conditions.

References

[1] *Reshetnyak Yu. G.* On the concept of capacity in the theory of functions with generalized derivatives // Sibirsk. Mat. Zh. 1969. V. 10, № 5. P. 1109–1138. (Russian). Engl. transl. in Siberian Math. J. 1969. V. 10. P. 818–842.

[2] *Folland G. B., Stein I. M.* Hardy spaces on homogeneous groups // Princeton NJ: Univ. Press, 1982.

[3] *Folland G. B.* Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups // Ark. Mat. 1975. V. 13. P. 161–207.

[4] *Adams D. R., Hedberg L. I.* Function spaces and potential theory. Berlin–Heidelberg: Springer, 1996.

[5] *Vodopyanov S. K.* Weighted L^p potential theory on homogeneous groups // Sibirsk. Mat. Zh. 1992. V. 33, № 2. P. 29–48. (Russian). Engl. transl. in Siberian Math. J. 1992. V. 33, № 2. P. 201–218.

О дискретности спектра оператора Лапласа на римановом многообразии

В. И. Кузьминов[1], *И. А. Шведов*[2]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Пусть X — гладкое риманово n-мерное многообразие; $L_2^k(X)$ — гильбертово пространство, состоящее из всевозможных измеримых дифференциальных k-форм ω, для которых $\int\limits_X |\omega|^2\,dx < \infty$; $d_k\colon L_2^k(X) \to L_2^{k+1}(X)$ — оператор, являющийся замыканием внешнего дифференциала, заданного на гладких формах из $L_2^k(X)$, имеющих компактный носитель; Δ_k — оператор Лапласа, полученный расширением по Фридрихсу оператора $d_{k+1}d_k^* + d_k^* d_{k-1}$, заданного на гладких формах с компактным носителем.

Теорема 1. *Самосопряжённый оператор Δ_k имеет дискретный спектр тогда и только тогда, когда операторы d_{k-1} и d_k, компактно разрешимы, а пространство L_2-когомологий $H^k L_2(X)$ конечномерно.*

Следствие. *Пусть X_0 — компактное n-мерное подмногообразие многообразия X. Операторы Δ_k в $L_2^k(X)$ и Δ_k в $L_2^k(X\setminus X_0)$ обладают дискретным спектром одновременно.*

Пусть $f = (f_1, \dots, f_q)$ — набор положительных гладких функций на луче $T := [0,\infty[$; Y — декартово произведение компактных гладких многообразий $Y_1, \dots, Y_q$ размерностей $m_1, \dots, m_q$; $X = T\times_f Y$ — гладкое многообразие $X \times Y$, снабжённое римановой метрикой $(dt)^2 + \sum\limits_{i=1}^q (f_i\,dy_i)^2$; M_k — множество таких мультииндексов $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_q)$, что $\mu_i \in \{0, \dots, m_i\}$, $\sum\limits_{i=1}^q \mu_i = k$; $\varrho_\mu := f_1^{m_1/2-\mu_1} \cdots f_q^{m_q/2-\mu_q}$.

---

[1]Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск 630090, Россия.
E-mail: kuzminov@math.nsc.ru

[2]Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск 630090, Россия.
E-mail: shvedov@math.nsc.ru

Работа выполнена при частичной поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых российский ученых и ведущих научных школ Российской Федерации (грант НШ 311.2003.1).

Теорема 2. *Оператор* $d_k\colon L_2^k(X)\to L_2^{k+1}(X)$ *компактно разрешим, если либо*

$$\int\limits_0^t \varrho_\mu^2\,d\tau \int\limits_t^\infty \varrho_\mu^{-2}\,d\tau \underset{t\to\infty}{\to} 0 \quad \textit{для каждого } \mu\in M_k,$$

либо

$$\int\limits_0^t \varrho_\mu^{-2}\,d\tau \int\limits_t^\infty \varrho_\mu^{2}\,d\tau \underset{t\to\infty}{\to} 0 \quad \text{для каждого } \mu\in M_k.$$

Приведенные выше утверждения позволяют указать достаточные условия дискретности спектра оператора Δ_k на многообразии с концами, каждый конец которого квазиизометричен многообразию вида $T\times_f Y$.

About One Avkhadiev Problem

Alexander Kuznetsov [1]

Saratov State University

Let Ω be a simply connected domain on the complex plane $\mathbb{C}$ and $w \in \Omega$. Let $\rho_\Omega(w)$ be the conformal radius of Ω at the point w, and $d_\Omega(w)$ the Euclidean distance from the point w to the boundary $\partial\Omega$ of the domain Ω. $I_c(\Omega) = \int\limits_\Omega \rho_\Omega^2(x+iy)\,dx\,dy$ is the conformal moment of Ω, and $I(\partial\Omega) = \int\limits_\Omega d_\Omega^2(x+iy)\,dx\,dy$ is the moment of inertia of Ω about $\partial\Omega$. This functionals were introduced by F. G. Avkhadiev [1] for solution of classical St. Venant problem of finding two-side estimate for the torsional rigidity $P(\Omega)$ of the domain Ω by simple geometric characteristics of domain [2]. As a solution the following inequalities

$$I(\partial\Omega) \leqslant I_c(\Omega) \leqslant P(\Omega) \leqslant 4I_c(\Omega) \leqslant 64I(\partial\Omega) \tag{1}$$

were obtained. First inequality in (1) is not sharp when $I_c(\Omega)$ and $I(\partial\Omega)$ are finite. F. G. Avkhadiev set a problem to find lower and upper sharp bounds for the ratio $I(\Omega) = I_c(\Omega)/I(\partial\Omega)$, when $I_c(\Omega)$ and $I(\partial\Omega)$ are finite. The first and the last inequalities in (1) imply, that region of values $I(\Omega)$ is a subset of $[1, 16]$.

Let $w_1, w_2 \in \Omega$, and let holomorphic univalent function $f(z)$ map the unit disk $\mathbb{U} = \{z : |z| < 1\}$ onto Ω so that $f(0) = w_1$ and $f(r) = w_2$, where $r \in (0,1)$ is a given constant. The normalization of f means, that hyperbolical distance between points w_1 and w_2 is constant. Let us consider the functional $G(f,\alpha) = \frac{|f'(0)|^\alpha + |f'(r)|^\alpha (1-|r|^2)^\alpha}{d_\Omega(f(0))^\alpha + d_\Omega(f(r))^\alpha}$, $\alpha > 0$, on the class $\mathcal{S}^0$ of univalent holomorphic functions $f(z), z \in \mathbb{U}$. Let r_α be the unique solution of the equation

$$1 - \frac{4r}{(1-r)^2} + \frac{(1-r)^{2\alpha}}{(1+r)^{2\alpha}} + \frac{(1+r)^{2\alpha}}{(1-r)^{2\alpha}}\Big(\min_{\gamma,\theta\in\mathbb{R}} \mathrm{Re}\Big[\frac{1-2re^{i\gamma}-r^2e^{2i\gamma}}{(1+re^{i\gamma})^2} + \frac{2r^2}{1-r^2}\frac{1-re^{i\gamma}}{1+re^{i\gamma}} + \frac{4re^{i\theta}}{1-r^2}\frac{1-re^{i\gamma}}{1+re^{i\gamma}}\Big] - \frac{4r}{(1-r)^2}\Big) = 0,$$

on the interval $(0,1)$. Then we have

Theorem 1. *If $r < r_\alpha$, then every function $f(z)$ minimizing the functional $G(f,\alpha)$ on the class $\mathcal{S}^0$ maps $\mathbb{U}$ onto an arc biangle, bounded by circle arcs centered at the points $f(0)$ and $f(r)$.*

[1] Department of Mathematics and Mechanics, Saratov State University, Astrakhanskaya Str. 83, Saratov 410012, Russia.
E-mail: kuznetsovaa@pisem.net

To improve the lower estimate of $I(\Omega)$ we need to find the sharp bound of the functional $F(f,r,c) = \dfrac{|f'(0)|^4 c + |f'(r)|^4(1-r^2)^4}{d_{f(\mathbb{U})}(f(0))^2|f'(0)|^2 c + d_{f(\mathbb{U})}(f(r))^2|f'(r)|^2(1-r^2)^2}$, $c > 0$, $0 < r < 1$, on class $\mathcal{S}^0$. We have

Proposition. *If $r < r_0$, then every function $f(z)$ minimizing the functional $F(f,r,c)$ on the class $\mathcal{S}^0$ maps $\mathbb{U}$ onto an arc biangle, bounded by circle arcs centered at the points $f(0)$ and $f(r)$.*

Let $f_{\theta,d}$ denote a function mapping $\mathbb{U}$ onto arc biangle satisfying following requirement: one of bounding circle has center at origin and unit radius, second bounding circle has center at point $d > 0$ and θ is argument of intersection point of this circle laying in upper half-plane. Lower estimate for $I(\Omega)$ in terms of the functional $F(f,r,c)$ is obtained in

Theorem 2. *For any simply connected domain Ω, for which $I_c(\Omega)$ and $I(\partial\Omega)$ are finite, the estimate*

$$\frac{I_c(\Omega)}{I(\partial\Omega)} \geqslant \min_{r_1 \leqslant f_{\theta,d}^{-1}(d) \leqslant r_0} \left\{ F\left(f_{\theta,d}, f_{\theta,d}^{-1}(d), \frac{1}{1-r^{*2}}\right), F(f_{\theta,d}, f_{\theta,d}^{-1}(d), 1-r^{*2}) \right\} = 1.031021\ldots$$

holds.

Reference

[1] *Avkhadiev F. G.* Solution of generalizated St Venant problem // Mat. Sb. 1998. V. 189, № 12. P. 3–12.

[2] *Timoshenko S. P.* History of science of strength of materials. M.: GITTL, 1957. (Russian).

Выпуклая динамическая система связанная с линейной задачей распределения ресурсов

М. В. Куркина [1]

Югорский государственный университет

Пусть отображение $\lambda\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ имеет компоненты $\lambda_s(x)$ — выпуклые вниз функции (верхние огибающие линейных функций).

Отображение $\lambda\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ определяет динамическую систему, траекториями которой служат последовательности

$$x_1 = \lambda(x_0),\ x_2 = \lambda(x_1),\ \dots,\ x_{n+1} = \lambda(x_n),\ \dots$$

В данной работе, с помощью указанной динамической системы, даётся явное решение многомерной задачи динамического программирования о линейном распределении ресурсов.

[1] Югорский государственный университет, ул. Мира, 13, Ханты-Мансийск 628007, Россия.
E-mail: slavsky@uriit.ru

Об ограниченности операторов с ядром в весовом пространстве Лебега

Л. К. Кусаинова [1]

Карагандинский государственный университет им. Е. А. Букетова

Рассматривается оператор $Kf(x) = \int\limits_{\Omega} k(x,y)f(y)\,dy$, заданный на пространстве $L_{p,v}(\Omega)$ с нормой $\|u\|_{p,v} = \left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^p v(x)\,dx\right)^{1/p}$, $1 < p < \infty$, где Ω — область в $\mathbb{R}^n$, v — вес на Ω. Получены условия, при которых оператор K является ограниченным оператором из $L_{p,v}(\Omega)$ в $L_{q,\omega}(\Omega)$, $1 < p < q < \infty$.

Введём обозначения: $Q_{(d,\lambda)}(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y_i - x_i| < d^{\lambda_i},\ i = 1,\dots,n\}$ для $d > 0$ и $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ с $\lambda_i > 0$; $c^\lambda Q = Q_{(cd,\lambda)}(x)$ для $Q = Q_{(d,\lambda)}(x)$, где $c^\lambda = (c^{\lambda_1,\dots,\lambda_n})$, $cQ = c^\lambda Q$, $1/\lambda = (1/\lambda_1,\dots,1/\lambda_n)$.

Пусть $d(x)$ — положительная функция на Ω, удовлетворяющая условиям:

1) $\forall x \in \Omega\ \ 2Q(x) \subset \Omega$, где $Q(x) = Q_{(d(x),\lambda)}(x)$,

2) $\exists \eta \in (0,1) : \forall x \in \Omega\ \forall y \in Q(x)\ \eta \leqslant d(y)/d(x) \leqslant \eta^{-1}$.

Положим: $\widetilde{Q}(x) = \delta^\lambda Q(x)$, $\delta > 0$, $\delta\eta^{-1} = 8^{-|1:\lambda|}$, $\mathcal{B} = \{Q = Q_{(d,\lambda)}(y) : \exists \widetilde{Q}(x) \supset Q\}$. Пусть

$$A_{\sigma,p,q}(v,\omega) = \sup_{Q\in\mathcal{B}} \left\{ \operatorname*{vrai\,sup}_{y\in Q} \left[\int\limits_Q \omega(x)|k(x,y)|^\sigma \left(\int\limits_Q |k(x,t)|^{(1-\sigma/q)p'} \tilde{v}(t)\,dt \right)^{q/p'} dx \right]^{1/q} \right\},$$

$$B_{p,q}(v,\omega) = \left\{ \int\limits_\Omega \omega(x) \left[\int\limits_{\Omega\setminus(\delta\eta)^\lambda Q(x)} |k(x,y)|^{p'} \tilde{v}(y)dy \right]^{q/p'} dx \right\}^{1/q},$$

для $0 < \sigma < q$, $p' = p/(p-1)$, $\tilde{v} = v^{1-p'}$

[1] Карагандинский государственный университет им. Е. А. Букетова, ул. Университетская, 28, Караганда 470074, Казахстан.

E-mail: kusainova@kargu.krg.kz

Теорема. *Пусть* $1 < p < q < \infty$ *и веса* v *и* ω *на* Ω *удовлетворяют условиям* $A_{\sigma,p,q}(v,\omega) < \infty$, $B_{p,q}(v,\omega) < \infty$. *Тогда* K *есть ограниченный оператор из* $L_{p,v}(\Omega)$ *в* $L_{q,\omega}(\Omega)$. *Норма* $\|K\| \leqslant c(A_{\sigma,p,q}(v,\omega) + B_{p,q}(v,\omega))$, *где постоянная* c *не зависит от* Ω *и весов* v *и* ω.

В частности, пусть $0 < \gamma < n$, $1 < p < q < n\gamma^{-1}$, а веса v и ω на $\mathbb{R}^n$ удовлетворяют условиям:

$$A = \sup_{Q = Q_{(\delta|x|,1)}(x)} |Q|^{-\gamma/n} \tilde{v}(Q)^{1/p'} \omega(Q)^{1/q} < \infty,$$

$$B = \left[\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega(x) \left(\int\limits_{\{|y-x|>\delta_0|x|} |k(x,y)|^{p'} \tilde{v}(y) dy \right)^{q/p'} dx \right]^{1/q} < \infty,$$

где $0 < \delta_0 < \delta < 1$ — постоянные, зависящие только от n. Тогда $I_\gamma f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{-\gamma} f(y)\, dy$, $f \in C_0^\infty = D$, есть ограниченный оператор из $D \cap L_{p,v}(\mathbb{R}^n)$ в $L_{q,\omega}(\mathbb{R}^n)$. В случае, когда $\gamma = n/p' + n/q$, $v \equiv 1$, достаточно потребовать, чтобы $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega(x)|x|^{-n}\, dx < \infty$.

О трёхмерных гельмгольцевых многообразиях

В. А. Кыров [1]

Горно-Алтайский государственный университет

В. Х. Лев в работе [1] провёл классификацию трёхмерных феноменологически симметричных геометрий. Их оказалось десять. Среди них есть как известные (пространство Евклида, псевдоевклидово пространство, пространство Лобачевского, пространство Римана), так и неизвестные. К числу неизвестных геометрий принадлежат: собственно гельмгольцево пространство, псевдогельмгольцево и дуальногельмгольцево.

Рассмотрим трёхмерное гладкое многообразие M, которое можно локально превратить в собственно гельмгольцево, псевдогельмгольцево или дуально гельмгольцево многообразие введением в некоторой координатной окрестности произвольной точки метрической функции собственно гельмгольцева, псевдогельмгольцева или дуальногельмгольцева пространства [2] Метрические функции этих многообразий принимают вид:

$$f = [(a_i^1 X^i)^2 - \varepsilon(a_i^2 X^i)^2] \exp\left(2\alpha\Phi_\varepsilon \operatorname{arctg} \frac{a_i^2 X^i}{a_i^1 X^i} + 2a_i^3 X^i\right),$$

где $\gamma, \beta = \mathrm{const}$, $\gamma > 0$, $\beta > 0$, $\beta \neq 1$, для собственно гельмгольцева пространства $\varepsilon = -1$, $\alpha = \gamma$ и $\Phi_{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$; для псевдогельмгольцева пространства $P\Gamma^3$ $\varepsilon = 1$, $\alpha = \beta$ и $\Phi_1(x) = \mathrm{Ar(c)th}\, x$; для дуальногельмгольцева пространства D^3 $\varepsilon = 0$, $\alpha = 1$ и $\Phi_0(x) = x$; a_i^j — структурные функции.

Вектор $X = (X^1, X^2, X^3)$ пространства $T_x(M)$ будем называть неизотропным, если на нём определено значение метрической функции. Связность в расслоении линейных реперов $L(M)$ называется *квазиметрической связностью* трёхмерного гельмгольцева многообразия M, если параллельный перенос слоев из $T(M)$ сохраняет метрическую функцию f. Из определения квазиметричекой связности следует, что имеет место следующее равенство $\nabla_k f(X, X) = 0$, где X — неизотропный вектор.

Теорема. *Гельмгольцево трёхмерное многообразие M допускает квазиметрическую связность, символы Кристоффеля которой в координатной окрестности U произвольной точки неявно задаются такими выражени-*

[1]Горно-Алтайский государственный университет, ул. Социалистическая, 14, Горно-Алтайск 649000, Россия.

ями:

$$\Gamma^i_{ki} h_{jl} + \Gamma^l_{kj} h_{il} = \frac{\partial h_{ij}}{\partial x^k} - 2\alpha\lambda_{ijk}, \quad \frac{\partial a^3_i}{\partial x^k} = \Gamma^l_{ki} a^3_l,$$
$$h_{ij} = a^1_i a^1_j - \varepsilon a^2_i a^2_j + \alpha(a^1_i a^2_j - a^1_j a^2_i),$$

причём для символов λ *имеем*:

$$\lambda_{ijk} = a^2_j \frac{\partial a^1_i}{\partial x^k} - a^1_j \frac{\partial a^2_i}{\partial x^k},$$

где $i, j, k, l = 1, 2, 3$.

Список литературы

[1] *Лев В. Х.* Трёхмерные геометрии в теории физических структур // Вычислительные системы. Т. 125. Новосибирск, 1988. С. 90–104.

[2] *Кыров В. А.* Трёхмерные гельмгольцевы пространства // Тез. конф. молодых ученых. Новосибирск, 2001. С. 16–18.

Наследование свойств функциями

Т. Г. Латфуллин [1]

Тюменский государственный университет

Обозначим через $\Phi(D)$ пространство всех действительных функций, определённых на множестве D. Пусть M — множество функций из $\Phi(D)$, обладающих некоторым свойством $\mathcal{A}$. Как должна быть расположена функция $g \in \Phi(D)$ относительно множества M, чтобы g также обладала свойством $\mathcal{A}$? Естественно предположить, что g должна быть близка, в каком-то, смысле ко множеству M. Тогда вопрос сводится к заданию близости способом, отвечающим свойству $\mathcal{A}$.

В работе рассматриваются множества функций, обладающих свойствами — непрерывность, интегрируемость по Риману, измеримость по Лебегу.

Постановка задач вытекает из теорем о квазиравномерной и обобщённой квазиравномерной сходимости [1; 2, с. 436; 3, с. 97, 99]. Предлагается универсальный подход к задачам такого рода.

Определение 1. Скажем, что функция $g \in \Phi(D)$ находится в отношении $\mathcal{N}_1$ ко множеству $M \subset \Phi(D)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся конечный или счётный набор множеств $\{U_i\}$ открытых в D и таких, что $D = \bigcup\limits_i U_i$ и для каждого такого множества U_i найдётся функция $f_i \in M$ такая, что для любой точки $x \in U_i$ выполнено неравенство $|f_i(x) - g(x)| < \varepsilon$.

Определение 2. D — произвольное подмножество $\mathbb{R}^n$. Скажем, что функция находится в отношении $\mathcal{N}_2$ ко множеству $M \subset \Phi(D)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся конечный или счетный набор открытых в D множеств $\{U_i\}$ таких, что $\mu\Big(D \setminus \bigcup\limits_i U_i\Big) = 0$ и для каждого множества U_i найдётся функция $f_i \in M$ такая, что для любой точки $x \in U_i$ выполнено неравенство $|f_i(x) - g(x)| < \varepsilon$.

Определение 3. Множество D — измеримое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$. Скажем, что функция $g \in \Phi(D)$ находится в отношении $\mathcal{N}_3$ ко множеству M, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся конечный или счетный набор измеримых множеств $\{U_i\}$ таких, что $\mu\left(D \setminus \bigcup\limits_i U_i\right) = 0$ и для каждого множества U_i найдётся функция $f_i \in M$ такая, что для любой точки $x \in U_i$ выполнено неравенство $|f_i(x) - g(x)| < \varepsilon$.

[1] Тюменский государственный университет, ул. Семакова, 10, Тюмень 625000, Россия. E-mail: tlatfullin@utmn.ru

Утверждение 1. *Пусть D — некоторое множество из $\mathbb{R}^n$ и M состоит из непрерывных функций. Если функция $g\colon D \to \mathbb{R}$ находится в отношении $\mathcal{N}_1$ ко множеству M, то g непрерывна.*

Пусть D — произвольное подмножество $\mathbb{R}^n$. Через $\mathcal{R}(D)$ обозначим множество тех функций из $\Phi(D)$, у которых множество точек разрыва имеет меру 0.

Утверждение 2. *Пусть M — некоторое множество функций из $\mathcal{R}(D)$ и функция $g \in \Phi(D)$ находится в отношении $\mathcal{N}_2$ ко множеству M. Тогда g принадлежит пространству $\mathcal{R}(D)$ (если D — отрезок, а g — ограниченная функция, то g интегрируема по Риману).*

Утверждение 3. *Пусть D — измеримое подмножество $\mathbb{R}^n$ и M — некоторое множество измеримых функций, определенных на D. Если функция $g\colon D \to \mathbb{R}$ находится в отношении $\mathcal{N}_3$ ко множеству M, то g измерима.*

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — отношения, в которых может находиться функция g ко множеству $\Phi(D)$. Запишем $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, если из $\mathcal{A}$ следует $\mathcal{B}$.

Утверждение 4. *Пусть D — произвольное подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ (в п. 2 и 3 D измеримо), M — некоторое множество функций из $\Phi(D)$. Тогда для функции $g \in \Phi(D)$ выполнено $\mathcal{N}_1 \Rightarrow \mathcal{N}_2 \Rightarrow \mathcal{N}_3$ и ни одна из стрелок не обратима.*

Список литературы

[1] *Александров П. С.* О так называемой квазиравномерной сходимости // Успехи мат. наук. 1948. Т. 3, № 1(23). С. 213–215.

[2] *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Гос. изд-во физ.-мат. л-ры, 1959.

[3] *Медведев Ф. А.* Очерки истории теории функций действительного переменного. М.: Наука, 1975.

Polyhedral Spaces Without Conjugate Points

Nina Lebedeva [1]

Steklov Mathematical Institute

We say that a locally simply connected metric space M with inner metric ***has no conjugate points*** if any two points in the universal cover of M are connected by a unique geodesic. By an ***n-dimensional polyhedral space*** we mean a metric space (with an inner metric) covered by n-simplicies, such that the restriction of the metric to each simplex is a smooth Riemannian metric.

The work has two directions: the first one is studying of geometry of polyhedral spaces and developing of special technique for studying these spaces, the second is studying of polyhedral and general metric spaces without conjugate points; the particular aim was to give a generalization of the Hopf conjecture for polyhedral spaces.

We prove that every abelian subgroup of the fundamental group of a compact locally simply connected metric space without conjugate points is straight; this result generalize the result obtained by C. Croke and V. Schroeder for analytic Riemannian manifolds.

We also prove that if the triangulation of an n-dimensional compact polyhedral space M without boundary and with no conjugate points contains three n-simplicies with a common $(n-1)$-face, then the fundamental group $\pi_1(M)$ is of exponential growth.

Relying on two results formulated above we prove the following generalization of the Hopf conjecture: if the fundamental group of an n-dimensional compact polyhedral space M without boundary and with no conjugate points is of polynomial growth, then there exists a finite covering of M with a flat torus.

The main technical approach to prove theorems for polyhedral spaces was considering a geodesic flow on a space of geodesics of a polyhedral space and constructing the wide class of invariant measures (with a given properties) on this space. This gave a possibility to apply ergodic theory for polyhedral spaces.

[1] Steklov Mathematical Institute, Fontanka 27, St.-Petersburg 191023, Russia.
E-mail: lebed@pdmi.ras.ru

Внешние характеристики субдифференциалов сублинейных операторов и универсальные пространства линейных операторов

Ю. Э. Линке [1]

Институт динамики систем и теории управления СО РАН

Как известно, одной из внешних характеристик субдифференциала сублинейного оператора является следующее свойство: *с каждым непрерывным сублинейным оператором можно связать такое многозначное отображение, что его непрерывные селекторы отождествляются с субдифференциалом сублинейного оператора.* Используя этот результат, можно получить другие внешние характеристики.

Теорема 1. *Для каждого непрерывного сублинейного оператора $P\colon V \to C(X)$, где V — сепарабельное банахово пространство, а $C(X)$ — банахово пространство непрерывных функций на компакте X с* sup*-нормой, найдётся компактный сублинейный оператор $P_0\colon \ell_2 \to C(X)$, где ℓ_2 — гильбертово пространство последовательностей, что его компактный субдифференциал $\partial^C P_0$, т. е. субдифференциал, состоящий только из компактных операторов, операторно аффинно гомеоморфен субдифференциалу ∂P, если во всех пространствах операторов рассматривать топологию простой сходимости.*

С точки зрения универсальных пространств этот результат означает, что верна двойственная

Теорема 1′. *Пространство $L^C(\ell_2, C(X))$ компактных линейных операторов универсально в том смысле, что оно содержит гомеоморфные образы субдифференциалов, описанного в теореме* 1 *класса сублинейных операторов $P : V \to C(X)$.*

Если в теореме 1 и 1′ ограничиться только метризуемыми компактами X, то можно считать, что в теореме 1 оператор P_0 действует в $C([0,1])$, а в теореме 1′ можно заменить пространство $L^C(\ell_2, C(X))$ пространством $L^C(\ell_2, C([0,1]))$.

В докладе обсуждаются и другие вопросы, связанные с построением универсальных пространств, содержащих операторно аффинные образы субдифференциалов сублинейных операторов или функционалов.

[1]Институт динамики систем и теории управления СО РАН, ул. Лермонтова, 134, а/я 1233, Иркутск 66403, Россия.
E-mail: linke@icc.ru

Оценки аппроксимативных чисел интегральных операторов с переменными пределами интегрирования в L^∞

Е. Н. Ломакина [1]

Дальневосточный государственный университет путей сообщения

Пусть X и Y — банаховы пространства. Последовательность *аппроксимативных чисел* (*а-чисел*) линейного ограниченного оператора $B\colon X \to Y$ определена по формуле $a_m(B) = \inf\limits_{P\colon X\to Y,\,\mathrm{rank}\,P<m} \|B-P\|$, $m = 1,2,\ldots$, выражающей расстояние между оператором B и подпространством конечномерных операторов. В особом случае, когда X и Y — гильбертовы пространства, аппроксимативные числа совпадают с *сингулярными числами* (*s-числами*) и являются поперечниками Колмогорова образа единичного шара пространства X при преобразовании B. Для компактных операторов $S\colon L^\infty(\mathbb{R}^+) \to L^\infty(\mathbb{R}^+)$, $Sf(x) = v(x)\int\limits_0^{\psi(x)} u(y)f(y)\,dy$, $T\colon L^\infty(\mathbb{R}^+) \to L^\infty(\mathbb{R}^+)$, $Tf(x) = v(x)\int\limits_{\varphi(x)}^{\infty} u(y)f(y)\,dy$, где $u(y) \in L^1(\mathbb{R}^+)$, $v(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$ и $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — возрастающие дифференцируемые функции такие, что $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, $\varphi(x) < \psi(x)$ для $x \in (0,\infty)$ и $\varphi(\infty) = \psi(\infty) = \infty$ получены двухсторонние асимптотические оценки аппроксимативных чисел

$$\frac14\int\limits_0^\infty |u(\psi(x))|v_s(x)\psi'(x)\,dx \leqslant \liminf_{n\to\infty} na_n(S) \leqslant \limsup_{n\to\infty} na_n(S) \leqslant 2\int\limits_0^\infty |u(\psi(x))|v_s(x)\psi'(x)\,dx,$$

$$\frac14\int\limits_0^\infty |u(\varphi(x))|v_s(x)\varphi'(x)\,dx \leqslant \liminf_{n\to\infty} na_n(T) \leqslant \limsup_{n\to\infty} na_n(T) \leqslant 2\int\limits_0^\infty |u(\varphi(x))|v_s(x)\varphi'(x)\,dx,$$

где $v_s(x) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \|v\|_{L^\infty(x-\varepsilon,x+\varepsilon)}$.

---

[1] Дальневосточный государственный университет путей сообщения, ул. Серышева, 47, Хабаровск 680021, Россия.

E-mail: Lomakina@as.khb.ru

Работа поддержана грантом РФФИ 03–01–00017.

Об асимптотике числа расстановок фигур на шахматной доске

А. П. Ляпин [1]

Красноярский государственный университет

Производящая функция $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ является эффективным средством исследования последовательности $\{a_n\}$. При изучении асимптотического поведения в случае, когда $F(z)$ — рациональная функция, известно, что асимптотика $\{a_n\}$ определяется ближайшим полюсом. В случае многомерной последовательности возникают трудности принципиального характера из-за отсутствия понятия кратного асимптотического ряда.

Один из способов изучения кратной последовательности — исследование асимптотики «по диагоналям». Для двойных последовательностей $\{a(n,k)\}$ определим диагональную подпоследовательность следующим образом: фиксируем $(p,q) \in \mathbb{Z}_+^2$ и будем рассматривать одномерную последовательность $\{a(pl, ql)\}$, $l \in \mathbb{Z}_+$. Такой подход к изучению асимптотического поведения двойной последовательности применялся в [1] при решении проблемы устойчивости двумерных цифровых рекурсивных фильтров, имеющих рациональную передаточную функцию от двух переменных.

В работе [2] асимптотика коэффициентов рациональной производящей функции двух переменных изучалась в связи с такими задачами перечислительного комбинаторного анализа как, задача о числе решеточных путей, задача о покрытии костями домино и др.

В данной работе рассматривается одна из задач о расстановках фигур на шахматной доске, которая в [3] сформулирована следующим образом.

Задача. *Дана матрица размером $m \times n$. Выбираем k элементов из них таким образом, чтобы никакие два не стояли в одной строке, а если выбраны элементы из смежных строк, то они должны стоять в одном столбце (порядок элементов не имеет значения). Обозначим число всех возможных выборов такого рода через $a(n,k)$, $n \geqslant k > 0$.*

Для двойной последовательности $\{a(n,k)\}$ получена производящая функция $F(z,w) = \sum a(n,k) z^n w^k = \frac{m}{(1+(m-1)z)(1-z-zw-(m-1)zw^2)}$ и асимп-

[1] Факультет математики, Красноярский государственный университет, пр. Свободный, д. 7, Красноярск 9660041, Россия.
E-mail: lalex@krasu.ru

тотическая формула для $p \geqslant q$:

$$
\begin{aligned}
&a(n,k) \sim \frac{C\left(\frac{p}{q}\right)}{\sqrt{2\pi l}} z_0^{-n} w_0^{-k},\ n = pl,\ k = ql,\ l \to \infty,\ \mu = \frac{p}{q},\\
&z_0 = \frac{1}{2(m-1)} \frac{2 - 2m + \mu m - 2\mu + \sqrt{4m^2 - 4\mu m^2 - 4m + 4\mu m + \mu^2 m^2}}{\mu - 1},\\
&w_0 = \frac{1 - z_0}{z_0(1 + (m-1)z_0)},\\
&C = \frac{(z_0 w_0 + m - 1)(1 - z_0)}{z_0 w_0} \sqrt{\frac{\mu(1 - z_0)}{2m z_0^2 w_0 - \mu(1-\mu)(1-z_0)^2}}.
\end{aligned}
$$

При выводе данной формулы мы использовали теорему 5.1 из [4].

В книге [3, теорема 4.4.5] получена асимптотическая оценка последовательности $\{a(n,k)\}$ лишь в случае, когда $k = \mathrm{const}$, $n \to \infty$. Отметим, что указанную оценку можно уточнить.

Список литературы

[1] *Цих А. К.* Условия абсолютной сходимости рядя из коэффициентов Тейлора мероморфных функций двух переменных // Мат. сб. 1981. Вып. 11. С. 1588–1612.

[2] *Pemantle R., Wilson M.* Asymptotics for multivariate sequences. I. Smooth points of the singular variety // J. Combin. Theory. Ser. A. 2002. V. 97. P. 129–161.

[3] *Егорычев Г. П.* Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм. Новосибирск: Наука, 1977.

[4] *Федорюк М. В.* Асимптотика: Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.

Задача Дирихле для полулинейного эллиптического уравнения на римановых многообразиях специального вида

Мазепа Е. А. [1]

Волгоградский государственный университет

В данной работе изучаются вопросы разрешимости некоторых краевых задач для полулинейного эллиптического уравнения

$$\Delta u = u\phi(|u|), \tag{1}$$

где $\phi(\xi) > 0$ — монотонно возрастающая, непрерывно дифференцируемая функция при $0 \leqslant \xi < \infty$, на некомпактных римановых многообразиях в связи с аналитическими и геометрическими свойствами последних.

Пусть M — произвольное гладкое связное некомпактное риманово многообразие. Известно, что на M из существования нетривиального ограниченного решения для уравнения $\Delta u - u = 0$ следует существование аналогичного решения для уравнения $\Delta u - \mu u = 0$, где $\mu > 0$ — произвольная константа (см., [1]).

Справедливо следующее утверждение.

Лемма. *На M существуют нетривиальные ограниченные решения для уравнения* (1) *тогда и только тогда, когда на M существуют нетривиальные ограниченные решения для уравнения $\Delta u - u = 0$.*

Далее пусть M — модельное многообразие, т. е. полное риманово многообразие, представимое в виде объединения $M = B \cup D$, где B — некоторый предкомпакт с непустой внутренностью, граница которого ∂B является гладким подмногообразием, D изометрично прямому произведению $[r_0, +\infty) \times S$ (где $r_0 > 0$, S — компактное риманово многообразие без края) с метрикой $ds^2 = dr^2 + g^2(r)\, d\theta^2$ (где $g(r) > 0$ — гладкая на $[r_0, +\infty)$ функция, а $d\theta^2$ — риманова метрика на S).

Будем говорить, что на M разрешима задача Дирихле для уравнения (1) в классе положительных (отрицательных) функций, если для любой непрерывной, положительной (отрицательной) на S функции $\Phi(\theta)$ на M суще-

[1] Волгоградский государственный университет, ул. 2-я Продольная, 30, Волгоград 400062, Россия.

E-mail: lmazepa@rambler.ru

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект 03–01–00304).

ствует ограниченное решение этого уравнения $u(x)$ такое, что $\lim\limits_{r\to\infty} u(r,\theta) = \Phi(\theta)$.

Введём обозначение $I = \int\limits_{r_0}^{+\infty} \frac{dt}{g^{n-1}(t)} \int\limits_{r_0}^{t} g^{n-1}(\xi)\, d\xi$, $n = \dim M$.

Замечание. Известно, что всякое ограниченное решение уравнения $\Delta u - u = 0$ на M является тождественным нулем тогда и только тогда, когда $I = \infty$ (см., например, [2]).

Следующее утверждение распространяет данный результат на случай полулинейного уравнения.

Теорема. 1. *Пусть риманово многообразие M таково, что $I = \infty$. Тогда на M не существует нетривиальных целых ограниченных решений уравнений* (1).

2. *Пусть риманово многообразие M таково, что $I < \infty$. Тогда на M существуют нетривиальные целые ограниченные решения уравнения* (1). *Более того, на M разрешима задача Дирихле для уравнения* (1) *в классе положительных* (*отрицательных*) *функций.*

Список литературы

[1] *Григорьян А. А., Надирашвили Н. С.* Лиувиллевы теоремы и внешние краевые задачи // Изв. вузов. Математика. 1987. № 5. С. 25–33.

[2] *Лосев А. Г.* О взаимосвязи некоторых лиувиллевых теорем на римановых многообразиях специального вида // Изв. вузов. Математика. 1997. № 10. С. 59–63.

On Stability of Some Minimal Surfaces in the Heisenberg Group

L. A. Masaltsev [1] *and E. V. Petrov* [2]

Karazin Kharkiv National University

We study stability of some complete ruled and $SO(2)$-invariant minimal surfaces in the real 3-dimensional Heisenberg group Nil^3 endowed with the left-invariant metric $ds^2 = dx^2 + dy^2 + (dz - x\,dy)^2$. We use the criterion of stability, founded by D. Fischer-Colbrie and R. Schoen to prove

Theorem 1. *The following complete ruled minimal surfaces in* Nil^3 *are stable*: 1) *"vertical plane"* $r(u, v) = (u, au + b, v)$, 2) *"oblique plane, parallel to axe* Ox*"* $r(u, v) = (u, v, au + b)$ (*in particular "horizontal plane"* $z = b$), 3) *minimal surface* ($r(u, v) = (u, v, uv/2)$ (*the image of the horizontal space under the exponential map* $\exp\colon nil \to Nil$.

We also study stability of the analogs of catenoid.

Theorem 2. *Every* $SO(2)$*-invariant minimal surface in* Nil^3 *is unstable.*

[1]Karazin Kharkiv National University, Svobody Sq. 4, Kharkov 61077, Ukraine.
E-mail: masaltsev@univer.kharkov.ua

[2]Karazin Kharkiv National University, Svobody Sq. 4, Kharkov 61077, Ukraine.

Value Distribution of Yosida-Type Quasimeromorphic Mappings

Shamil Makhmutov [1] *and Matti Vuorinen* [2]

Sultan Qaboos University,
University of Helsinki

Let $n \geqslant 2$ and $p > 1$. A quasimeromorphic mapping f in $\mathbf{R}^n$ is called a p-*Yosida mapping* if for any sequence of points $\{a_n\} \in \mathbf{R}^n$, $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$, the family of mappings $\{f(a_n + |a_n|^{2-p}x)\}$ is normal in $\mathbf{R}^n$.

We show that for any p-Yosida quasimeromorphic mapping f non-constant limit mappings of converging sequences of the form $\{f(a_n + |a_n|^{2-p}x)\}$ in $\mathbf{R}^n$ are 2-Yosida mappings.

We estimate the growth properties of the averaged counting function $A(f)$ for 2-Yosida mappings of the first order and discuss the distribution of a-points of p-Yosida quasimeromorphic mappings.

[1]Department of Mathematics and Statistics, Sultan Qaboos University, P.O.Box 36, Al Khodh, Postal Code 123, Oman.
E-mail: makhm@squ.edu.om

[2]Department of Mathematics, University of Helsinki, P.O.Box 4 (Yliopistonkatu 5), Helsinki 00014, Finland.
E-mail: vuorinen@csc.fi

Гауссова кривизна как дифференциальный инвариант некоторой группы Ли

А. Г. Меграбов [1]

Новосибирский государственный университет
и Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН

1. Найдено, что гауссова кривизна $K(x,y)$ поверхности в трёхмерном евклидовом пространстве с линейным элементом (римановой метрикой) $d\tau^2 = n^2(x,y)(dx^2+dy^2)$, определяемая по формуле $K(x,y) = -\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\Delta \ln n^2(x,y)}{n^2(x,y)} \equiv J^{11}$, является дифференциальным инвариантом (ДИ) бесконечной группы G точечных преобразований пространства пяти переменных t, x, y, u^1, u^2 с алгеброй Ли инфинитезимальных операторов X её однопараметрических подгрупп вида $X = \Phi(x,y)\,\dfrac{\partial}{\partial x} + \Psi(x,y)\,\dfrac{\partial}{\partial y} - 2\Phi_x(x,y)u^2\,\dfrac{\partial}{\partial u^2}$, где Φ, Ψ — произвольные сопряженные гармонические функции, а также ДИ каждого из сужений группы G на пространство x, y, u^1, u^2 и x, y, u^2. При этом $u^2 = (n)^2 = n^2$. Показано, что группа G является допускаемой группой (эквивалентности) для широкого класса дифференциальных уравнений (ДУ) в частных производных с переменным коэффициентом (параметром) $u^2 = n^2(x,y)$, включающего многие классические ДУ математической физики: эйконала, характеристик волнового уравнения, линейные и нелинейные волновые, линейные и нелинейные теплопроводности, линейные и нелинейные эллиптического типа, в том числе Гельмгольца, Пуассона, уравнения минимальной поверхности, заданной средней кривизны и другие.

2. Пусть $\tau = \tau(t,x,y) \equiv J^2$ — некоторое решение уравнения эйконала $J^7 \equiv \{(\tau_x)^2 + (\tau_y)^2\}/n^2(x,y) = 1$, $t \equiv J^1$ — параметр точечного источника сигналов, $p = \tau_t(t,x,y) \equiv J^3$ и функции h, v, U^1, U^2 определены равенствами $h(t,\tau,p) = \dfrac{\Delta\tau}{n^2}(t,x,y) \equiv J^4$, $v(t,\tau,p) = \tau_{tt}(t,x,y) \equiv J^5$, $U^1(t,\tau,p) = vU^2$, $U^2(t,\tau,p) = \left\{\dfrac{\tau_y\tau_{tx} - \tau_x\tau_{ty}}{n^2}\right\}^{-1} \equiv (J^6)^{-1}$. Показано, что уравнение эйконала трансформируется в классические скалярные обыкновенные ДУ: в уравнение Риккати $h_\tau + h^2 = -K(x,y)$ для h, в линейное уравнение Штурма —

[1]Институт вычислительной математики и математической геофизики, пр. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск 630090, Россия.
E-mail: mag@sscc.ru

Лиувилля $U_{\tau\tau}+K(x,y)U=0$ для U^1, U^2, образующих его фундаментальную систему, в уравнение $\{v,\tau\}\equiv\dfrac{v_{\tau\tau\tau}}{v_\tau}-\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{v_{\tau\tau}}{v_\tau}\right)^2=2K(x,y)$ для v. В случае регулярности семейства лучей (геодезических) в рассматриваемой области это — преобразование «в целом». Аналогичные результаты справедливы для уравнения $J^7=\varphi(\tau)$, где $\varphi(\tau)\neq 0$ — произвольная функция класса C^2 обобщающего уравнения эйконала, и для уравнения $J^7=(\tau_t)^2$ (характеристик волнового уравнения). Выражения J^j — это ДИ группы G $(u^1=\tau)$.

3. Гауссова кривизна $K(x,y)$ выражается через ДИ J^4, J^7 по явной формуле $(\tau\to u)$ $n^2(x,y)K(x,y)=\dfrac{1}{2}\,\Delta\ln J^7-\left\{\left(u_x\,\dfrac{J^4}{J^7}\right)_x+\left(u_y\,\dfrac{J^4}{J^7}\right)_y\right\}$, эквивалентной дивергентному тождеству 3-го порядка $\dfrac{1}{2}\,\Delta\ln g-\left\{\left(u_x\,\dfrac{\Delta u}{g}\right)_x+\left(u_y\,\dfrac{\Delta u}{g}\right)_y\right\}=0$, где $g\equiv(u_x)^2+(u_y)^2\equiv|\operatorname{grad}u|^2$, связывающему лапласиан и модуль градиента скалярной функции $u(x,y)$.

Квазиконформность гауссова отображения и устойчивость экстремальных поверхностей

Н. М. Медведева [1]

Волгоградский государственный университет

В данном докладе представлены теоремы о квазиконформности гауссова отображения и оценки G-ёмкости конденсатора. Пусть $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — поверхность класса C^2, $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$ — стандартный ортонормированный базис, ассоциированный с декартовыми координатами x_1, x_2, $\ldots$, x_{n+1}, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1})$ — единичная нормаль к поверхности M, $\phi(\xi)\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ — неотрицательная функция класса C^2. Рассмотрим функционал типа площади:

$$F(M) = \int\limits_M \phi(\xi_{n+1}). \tag{1}$$

Введём обозначения, применяемые ниже: H — средняя кривизна поверхности M, $\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi_1}, \frac{\partial\phi}{\partial\xi_2}, \ldots, \frac{\partial\phi}{\partial\xi_{n+1}}\right)$, v^T — ортогональная проекция вектора v на касательную плоскость к поверхности M в соответствующей точке, div — дивергенция в метрике поверхности M.

Определение 1. Будем говорить, что поверхность M является *экстремальной*, если первая вариация функционала (1) равна нулю.

Теорема 1. *Поверхность M класса C^2 является экстремальной тогда и только тогда, когда*

$$H = \frac{1}{\phi}\,\mathrm{div}(\nabla\phi^T). \tag{2}$$

Теорема 2. *Если найдется $q \geqslant 1$ такое, что*

$$(1-q)/q \leqslant B(t) \leqslant q - 1, \tag{3}$$

где $B(t) = \dfrac{\phi''(t)(1-t^2)}{\phi(t) - \phi'(t)t}$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$, *то гауссово отображение решения уравнения* (2) *является q-квазиконформным.*

Определение 2. Пусть M — риманово многообразие с краем (возможно с пустым). Пусть $P, Q \subset M$ — непересекающиеся замкнутые множества. Определим *G-ёмкость* конденсатора (P, Q) (см. [2]), полагая $\mathrm{cap}_G(P, Q) =$

[1] Волгоградский государственный университет, ул. 2-ая Продольная, 30, Волгоград 400062, Россия.
E-mail: nmedv@rambler.ru

$\inf \int\limits_M G|\nabla\varphi|^2$, где $|\nabla\varphi|^2 = \langle\nabla\varphi, \nabla\varphi\rangle$ — скалярный квадрат градиента $\nabla\varphi$ и точная нижняя грань берется по всем локально липшицевым функциям $\varphi\colon M \to \mathbb{R}^1$, $\varphi(m) = 1$, $m \in P$, $\varphi(m) = 0$, $m \in Q$.

Определение 3. Будем говорить, что поверхность M *трубчата* (см. [1]), если вектор $e_{n+1} \in \mathbf{R}^{n+1}$ и два числа $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, такие, что для каждой гиперплоскости $\Pi_t = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = t\}$, ортогональной $e_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$, сечение $\Sigma(t) = M \cap \Pi_t$ не пусто при всяком $t \in (a;b)$ и всякая порция, заключенная между двумя гиперплоскостями Π_{t_1} и Π_{t_2} при $a < t_1 < t_2 < b$ является компактом. В этом случае интервал $(a;b)$ будем называть проекцией поверхности M. Будем говорить, что M *трубчатая в целом*, если $a = -\infty$ и $b = +\infty$.

Определим для любого $t \in (a;b)$ множества: $P(t) = \{x \in M : f(x) \leqslant t\}$, $Q(t) = \{x \in M : f(x) \geqslant t\}$, где $f(x) = x_{n+1}$ (f — координатная функция).

Теорема 3. *Пусть функция $\phi(\xi_{n+1})$ функционала* (1) *удовлетворяет условию* (3) *и M — трубчатая поверхность класса C^2 с проекцией $(a;b)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ является экстремальной для функционала* (1). *Тогда для любых $a < t_1 < t_2 < b$ выполнено*:

$$\mathrm{cap}_G(P(t_2), Q(t_1)) \leqslant \frac{qI}{t_2 - t_1}, \tag{4}$$

где $I = \int\limits_{\Sigma(t)} (\phi - \phi'\xi_{n+1})|\nabla f|$ — величина не зависящая от t.

Замечание. Равенство в (4) достигается для минимальных поверхностей (см. [1]).

Определение 4. Многообразие M имеет *G-параболический тип* (см. [1]), если для любого компакта $F \subset M$ существует исчерпание $D_1 \subset D_2 \subset \ldots$, $\bigcup\limits_{k\geqslant 1} D_k = M$, многообразия M последовательностью открытых множеств $D_k \supset F$ с компактными замыканиями, для которого $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathrm{cap}(F, M \setminus D_k) = 0$.

Следствие. *Пусть функция $\phi(\xi_{n+1})$ функционала* (1) *удовлетворяет условию* (3)*. Тогда всякая трубчатая в целом экстремальная для функционала* (1) *поверхность класса C^2 имеет G-параболический тип.*

Список литературы

[1] *Миклюков В. М., Ткачев В. Г.* Некоторые свойства трубчатых минимальных поверхностей произвольной коразмерности // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 9. С. 1278–1295.

[2] *Клячин В. А., Миклюков В. М.* Признаки неустойчивости поверхностей нулевой средней кривизны в искривленных лоренцевых преобразованиях // Мат. сб. 1996. Т. 187, № 11. С. 67–88.

Некоторые свойства квазиконформно плоских поверхностей в римановых многообразиях

В. М. Миклюков [1]

Волгоградский государственный университет

Пусть $\mathcal{X}$ — n-мерное риманово C^3-многообразие без края, которое предполагается связным некомпактным и ориентируемым. Пусть $d(x', x'')$ — геодезическое расстояние между точками $x', x'' \in \mathcal{X}$. Используем обозначения $B_{\mathcal{X}}(a,t) = \{x \in \mathcal{X} : d(a,x) < t\}$, $S_{\mathcal{X}}(a,t) = \{x \in \mathcal{X} : d(a,x) = t\}$ для геодезического шара и геодезической сферы, соответственно. Здесь $a \in \mathcal{X}$ — центр шара или сферы, $t > 0$ — радиус. Далее полагаем $B(a,t) = B_{\mathbb{R}^n}(a,t)$.

Положим $R_a = \liminf d(a, x_n)$, где нижний предел берется по всевозможным последовательностям $\{x_n\} \subset \mathcal{X}$, не имеющим точек накопления в $\mathcal{X}$.

Пусть $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — точка в $\mathbb{R}^n$ и $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Рассмотрим k-мерную плоскость $\Pi_0 = \{y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n : \ \ y_{k+1} = \ldots = y_n = 0\}$. Пусть Π — поверхность в $\mathcal{X}$. Зафиксируем точку $a \in \Pi$ и R, $0 < R < R_a$. Обозначим через $\Pi(a,R)$ компоненту связности множества $\Pi \cap B_{\mathcal{X}}(a,R)$, содержащую точку a. Будем говорить, что k-мерная поверхность Π является *локально квазиконформно плоской*, если для всякой точки $a \in \Pi$ и всякого R, $0 < R < R_a$, существует квазиконформное отображение $f\colon B_{\mathcal{X}}(a,R) \to B(0,1)$ такое, что $f(\Pi(a,R)) \subset \Pi_0$.

В терминах изопериметрии и основной частоты сечений $\mathcal{X} \setminus \Pi$ сферами $S_{\mathcal{X}}(a,t)$ описываются некоторые глобальные свойства локально квазиконформно плоских поверхностей в римановых многообразиях общего вида. Случай квазиконформно плоских гиперповерхностей изучался в [1–3].

Список литературы

[1] *Вуоринен М., Мартио О., Миклюков В. М.* // Тр. кафедры математического анализа и теории функций Волгоградского государственного университета. Изд-во Волгоградского гос. ун-та, 2002. С. 21–31.

[2] *Martio O., Miklyukov V., Ponnusamy S., Vuorinen M.* On some properties of quasiplanes // Result. Math. 2002. V. 42. P. 107–113.

[3] *Миклюков В. М.* Изв. РАН. Сер. матем. 2003. Т. 67, № 5. С. 83–106.

[1] Волгоградский государственный университет, ул. 2-ая Продольная, 30, Волгоград 400062, Россия.
E-mail: miklyuk@vlink.ru

Symmetries for Semilinear Equations

Roberto Monti [1]

Universita di Padova

Consider the semilinear equation

$$\Delta_x u + |x|^{2\alpha}\Delta_y u = -u^{\frac{Q+2}{Q-2}} \qquad \text{in } \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k, \tag{1}$$

where Δ_x and Δ_y are Laplace operators in the variables $x \in \mathbb{R}^m$ and $y \in \mathbb{R}^k$, respectively, $\alpha > 0$ is a positive real number and $Q = m + k(\alpha+1)$. The partial differential operator $\Delta_x + (\alpha+1)^2|x|^{2\alpha}\Delta_y$ is known (at least for $\alpha = 1$) as Grushin operator.

Equation (1) arises as Euler equation for the Sobolev inequality

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{2Q}{Q-2}}\,dx\,dy\right)^{\frac{Q-2}{2Q}} \leqslant C\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} (|\nabla_x u|^2 + (\alpha+1)^2|x|^{2\alpha}|\nabla_y u|^2)\,dx\,dy\right)^{1/2}$$

for functions in a suitable Sobolev space.

For $z = (x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$, let $\|z\| = (|x|^{2(\alpha+1)} + |y|^2)^{\frac{1}{2(\alpha+1)}}$. The "norm" $\|z\|$ is 1-homogeneous for the group of anisotropic dilations $(x,y) \mapsto \delta_\lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda^{\alpha+1}y)$, $\lambda > 0$. Define the spherical inversion $\mathcal{I}(z) = \delta_{\|z\|^{-2}}(z)$, $z \neq 0$. The inversion $\mathcal{I}$ is conformal in the Grushin metric space. It also induces the following Kelvin transform. Given a function u on $\mathbb{R}^n$, define $u^*(z) = \|z\|^{2-Q}u(\mathcal{I}(z))$. The correct scaling for solutions to (1) is $\delta_\lambda u(z) = \lambda^{\frac{Q}{2}-1}u(\delta_\lambda(z))$, $\lambda > 0$.

Any entire, positive solution to (1) enjoys a spherical symmetry property. Precisely,

Theorem 1. *Let $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ be a positive solution of equation* (1)*. Then for a suitable $\lambda > 0$, the function $\delta_\lambda u$ satisfies $\delta_\lambda u = (\delta_\lambda u)^*$.*

After a suitable functional transformation, Theorem 1 implies a symmetry result for solutions to (1) in the hyperbolic metric. In fact, it turns out that the dimension of the equation can be reduced. Precisely,

Theorem 2. Let $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ be a positive solution of equation (1). Then, up to a scaling and a translation of u in the variable y, the function $v(x) = u(x,0)$,

[1] Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Universita di Padova, via Belzoni 7, Padova I-35131, Italia.

E-mail: monti@math.unipd.it

$x \in \mathbb{R}^m$, solves

$$\begin{cases} \operatorname{div}_x(p\nabla_x v) - qv = -pv^{\frac{Q+2}{Q-2}}, & |x| < 1, \\ v > 0, & |x| \leqslant 1, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu} + \Big(\dfrac{Q}{2} - 1\Big)v = 0, & |x| = 1, \end{cases} \tag{2}$$

where $p(x) = (1 - |x|^{2(\alpha+1)})^k$ and $q(x) = k(\alpha+1)(Q-2)(1-|x|^{2(\alpha+1)})^{k-1}|x|^{2\alpha}$. Here, ν denotes the exterior normal to the unit ball in $\mathbb{R}^m$.

The partial differential equation in (2) is of variational type and it is related to the following Sobolev–Hardy inequality ($m, k \in \mathbb{N}$ and $\alpha \geqslant 0$ satisfying $Q-2>0$)

$$\Big(\int_B |v|^{\frac{2Q}{Q-2}} p\, dx\Big)^{\frac{Q-2}{Q}} \leqslant C \int_B \big(|\nabla_x v|^2 p + |v|^2 q\big)\, dx$$

for functions $v \in C^1(\overline{B})$, where $B = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| < 1\}$.

It is natural to conjecture that the solution of (1) is unique up to scaling and translations in y. This statement reduces to proving uniqueness for problem (2). We can prove the conjecture in the following case.

Theorem 3. *Let $m = k = 1$ and $\alpha > 0$. Up to a scaling and a vertical translation, there exists a unique positive solution $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ of equation* (1).

These results are obtained in collaboration with D. Morbidelli, from the Università di Bologna.

Two-Weight Norm Inequality for Parabolic Calderon–Zygmund Operators

F. M. Mushtagov [1]

Institute of Mathematics and Mechanics,
Azerbaijan Academy of Sciences

In this work, we shall prove the boundedness of parabolic Calderon–Zygmund operators in weighted L_p-spaces.

Let $\mathbb{R}^n$ be the n-dimensional Euclidean space of points $x' = (x_1, \dots, x_n)$ and $x = (x', t) = (x_1, \dots, x_n, t)$ be a point in $\mathbb{R}^{n+1}$, $|x|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + t^2$.

Theorem. *Let $p \in (1, \infty)$, K be a parabolic Calderon–Zygmund kernel, i.e. $K \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$, $K(rx', r^2 t) = r^{-(n+2)} K(x', t)$ for each $r > 0$, $x \neq 0$, $\int\limits_{|x|=1} K(x)\, d\sigma = 0$ and $Tf = \mathrm{v.p.}\, K * f$. Moreover, let $\omega(t)$, $\omega_1(t)$ be weight functions on $\mathbb{R}$ satisfying the following three conditions:*

(a) *there exists $b > 0$ such that $\sup\limits_{|t|/4 < |\tau| \leqslant 4|t|} \omega_1(\tau) \leqslant b\omega(t)$ for a.e. $t \in \mathbb{R}$,*

(b) $\sup\limits_{\tau > 0} \left(\int\limits_{|t| > 2|\tau|} \omega_1(t) |t|^{-p}\, d\tau \right) \left(\int\limits_{|t| < |\tau|} \omega^{1-p'}(t)\, dt \right)^{p-1} < \infty,$

(c) $\sup\limits_{\tau > 0} \left(\int\limits_{|t| < |\tau|} \omega_1(t)\, dt \right) \left(\int\limits_{|t| > 2|\tau|} \omega^{1-p'}(t) |t|^{-p'}\, dt \right)^{p-1} < \infty.$

Then there exists a constant c independent of f such that

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} |Tf(x)|^p \omega_1(t)\, dx'\, dt \leqslant c \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} |f(x)|^p \omega(t)\, dx'\, dt$$

for all $f \in L_{p,\omega}(\mathbb{R}^{n+1})$. Moreover, condition (a) *can be replaced by the condition*

(a_1) *there exists $b > 0$ such that $\omega_1(t) \Big(\sup\limits_{|t|/4 \leqslant |\tau| \leqslant 4|t|} \frac{1}{\omega(\tau)} \Big) \leqslant b$ for a.e. $t \in \mathbb{R}$.*

[1] Institute of Mathematics and Mechanics, Azerbaijan Academy of Sciences, F. Agayev st. 10, Baku 370148, Azerbaijan.
E-mail: mushtagov@aznetmail.com

Метод $\bar{\partial}$-проблемы и $(2+1)$-мерные солитонные уравнения

К. Р. Мырзакул [1], *Г. Н. Нугманова* [2]
Физико-технический институт, Алматы, Казахстан

Одним из мощных методов исследования интегрируемых систем в (2+1)-измерении является метод одевания, основанный на нелокальную $\bar{\partial}$-проблему. Он позволяет одновременно построить само нелинейное уравнение и его лаксовое представление, точные решения и т. д. В данной работе рассматривается следующая нелокальная матричная $\bar{\partial}$-проблема

$$w_{\bar{z}}(z,\bar{z}) = \iint d\xi \wedge d\bar{\xi}\, w(\xi,\bar{\xi}) f(\xi,\bar{\xi};z,\bar{z}), \tag{1}$$

где w, f — матричные функции. С помощью уравнения (1) исследуется следующее $(2+1)$-мерное нелинейное уравнение Шрёдингера:

$$i\varphi_t + \varphi_{xx} - v\varphi = 0, \quad v_y + v_x + (|\varphi|^2)_x = 0, \tag{2}$$

где φ (v) — комплексная (скалярная) функция. В частности, построены различные точные решения системы (2). Кроме того, используя нелокальную $\bar{\partial}$-проблему (1) изучено следующее уравнение M-VIII

$$\mathbf{S}_t = \mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_{xx} + u\mathbf{S}_x, \quad u_y = \beta \mathbf{S} \cdot (\mathbf{S}_x \times \mathbf{S}_y), \tag{3}$$

где $\mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3)$, $\mathbf{S}^2 = 1$, $\beta = \text{const}$, u — скалярная функция (потенциал), $\times$ $(\cdot)$ — векторное (скалярное) произведение. Для этой системы построено представление Лакса, интегралы движения и точные солитонные решения различного типа [1, 2].

Список литературы

[1] *Martina L., Myrzakul Kur., Myrzakulov R., Soliani G.* Deformation of surfaces, integrable systems, and Chern-Simons theory // J. Math. Phys. 2001. V. 42. P. 1397–1417.

[2] *Myrzakulov R., Vijayalakshmi S., Nugmanova G. N., Lakshmanan M.* A (2+1)-dimensional integrable spin model: geometrical and gauge equivalent counterpart, solitons and localized coherent structures // Phys. Lett. A. 1997. V. 233. P. 391–396.

[1] Физико-технический институт, ул. Ибрагимова, 11, Алматы 480082, Казахстан. E-mail: cnlpmyra@satsun.sci.kz

[2] Физико-технический институт, ул. Ибрагимова, 11, Алматы 480082, Казахстан. E-mail: cnlpmyra@satsun.sci.kz

Неравенство ДНК и его аналоги

А. И. Назаров [1], *Ф. В. Петров* [2]

Санкт-Петербургский государственный университет

Рассмотрим на плоскости натурально параметризованную замкнутую кривую $\gamma(s)$, $s \in [0, l(\gamma)]$. Будем говорить, что $\gamma(s)$ принадлежит классу BV^1, если скорость $\gamma'(s)$ существует и непрерывна всюду на $[0, l(\gamma)]$, за исключением счетного числа точек, в которых имеет односторонние пределы, и имеет конечную вариацию. Полную вариацию $V(\gamma')$ назовем *полным поворотом* кривой γ.

Определим *среднюю абсолютную кривизну* $T(\gamma)$ кривой $\gamma \in BV^1$ как её полный поворот, деленный на длину.

С. Л. Табачников [1] сформулировал следующую гипотезу, названную им *неравенством ДНК*:

Теорема. 1. *Если кривая $\gamma \in BV^1$ («ДНК») лежит внутри выпуклой замкнутой кривой γ_1 («клетки»), то $T(\gamma) \geqslant T(\gamma_1)$.*

2. *Если вдобавок $T(\gamma) = T(\gamma_1)$, то γ есть кратный обход кривой γ_1.*

Обзор результатов, связанных с этой гипотезой и её обобщениями, приведен в [1]. Первая часть теоремы доказана в [2].

Мы доказываем неравенство ДНК полностью. Кроме того, в докладе будут сформулированы некоторые гипотезы, обобщающие это неравенство.

Список литературы

[1] *Tabachnikov S.* The tale of a geometric inequality // MASS colloquium lecture, 2001.

[2] *Lagarias J., Richardson T.* Convexity and the average curvature of the plane curves // Geom. Dedicata. 1997. V. 67. P. 1–38.

---

[1] Санкт-Петербургский государственный университет, Университетский пр., 28, Старый Петергоф, Санкт-Петербург 194504, Россия.

E-mail: an@AN4751.spb.edu

Работа поддержана грантами для поддержки ведущих научных школ РФ НШ–2261.2003.1 (первый автор).

[2] Санкт-Петербургский государственный университет, Университетский пр., 28, Старый Петергоф, Санкт-Петербург 194504, Россия.

E-mail: fedor@FP5607.spb.edu

Работа поддержана грантами для поддержки ведущих научных школ РФ НШ–2251.2003.1, а также грантом РФФИ 02–01–00093 (второй автор).

Two-Weighted Norm Inequalities for Some Anisotropic Sublinear Operators with Rough Kernel

Sh. A. Nazirova [1]

Institute of Mathematics and Mechanics,
Azerbaijan Academy of Sciences

In the work, we shall prove the boundedness of some sublinear operators with rough kernel on a weighted L_p-spaces.

Let $\mathbb{R}^n$ be the n-dimensional Euclidean space of points $x=(x_1,\ldots,x_n)$ with the norm $|x|=\left(\sum\limits_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$, $a=(a_1,\ldots,a_n)$, $a_i>0$, $i=1,\ldots,n$, $|a|=\sum\limits_{i=1}^n a_i$, $\rho(x)=\sum\limits_{i=1}^n |x_i|^{1/a_i}$, let $\Sigma=\{x\in\mathbb{R}^n : |x|=1\}$.

Theorem. *Let $p\in(1,\infty)$ and let T be a sublinear operator bounded from $L_p(\mathbb{R}^n)$ to $L_p(\mathbb{R}^n)$ such that, for any $f\in L_1(\mathbb{R}^n)$ with compact support and $x\notin \operatorname{supp} f$*

$$|Tf(x)|\leqslant c_0\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{|\Omega(x-y)|}{\rho(x-y)^{|a|}}|f(y)|\,dy,$$

where c_0 is independent of f and x, Ω is homogeneous of degree zero and $\Omega\in L_s(\Sigma)$.

Moreover, let $s>p'$, $p'=p/(p-1)$ and $\omega(x)$, $\omega_1(x)$ be weight functions on $\mathbb{R}^n$ satisfying the following three conditions:

(a) *there exists $b>0$ such that* $\sup\limits_{\rho(x)/4<\rho(y)\leqslant 4\rho(x)}\omega_1(y)\leqslant b\omega(x)$ *for a.e.* $x\in\mathbb{R}^n$,

(b) $$\sup_{r>0}\left(\int\limits_{\rho(x)>2r}\omega_1(x)\rho(x)^{-|a|p/s'}\,dx\right)\left(\int\limits_{\rho(x)<r}\omega^{1-(p/s')'}(x)\,dx\right)^{p/s'-1}<\infty,$$

(c) $$\sup_{r>0}\left(\int\limits_{\rho(x)<r}\omega_1(x)\,dx\right)\left(\int\limits_{\rho(x)>2r}\omega^{1-(p/s')'}(x)\rho(x)^{-|a|p/s'}\,dx\right)^{p/s'-1}<\infty.$$

Then there exists a constant c, independent of f, such that

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}|Tf(x)|^p\omega_1(x)\,dx\leqslant c\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p\omega(x)\,dx\quad \textit{for all } f\in L_{p,\omega}(\mathbb{R}^n).$$

[1] Institute of Mathematics and Mechanics, Azerbaijan Academy of Sciences, F. Agayev st. 10, Baku 370148, Azerbaijan.
E-mail: vagif@guliyev.com

On Characterization by a Single Constant of the Weighted L_p–L_q Boundedness of Generalized Hardy-Type Integral Operator

Maria G. Nassyrova [1]
Computing Centre FEB RAS

Let $r > 0$ and $\|f\|_r := \left(\int\limits_0^\infty |f(x)|^r\,dx\right)^{1/r}$. We consider the inequality

$$\|(Kf)u\|_q \leqslant C\|fv\|_p \tag{1}$$

and its dual, where u and v are weight functions, i.e. nonnegative and measurable functions on $(0,\infty)$, and the operator K is given by

$$Kf(x) := \int\limits_0^x k(x,y)f(y)\,dy, \quad x \geqslant 0, \tag{2}$$

with a kernel $k(x,y) \geqslant 0$ satisfying the following condition: there exists a constant $D \geqslant 1$ independent of x, y, z such that

$$D^{-1}(k(x,z)+k(z,y)) \leqslant k(x,y) \leqslant D(k(x,z)+k(z,y)), \quad 0 \leqslant y \leqslant z \leqslant x. \tag{3}$$

It is well known (see e.g. [1]), that the inequality (1) with K of the form (2) and a kernel $k(x,y)$ satisfying (3) can be characterized by two independent conditions, so that none of them alone is sufficient for (1) in general and, consequently, that they are uniformly incomparable. However, in many related areas of analysis and ordinary differential equations a progress has been made in particular situations when the inequality (1) was characterized by a single functional only. A simple sufficient condition for this was first pointed out by A. Kufner (1993). We consider the following problem: when can the inequality (1) be characterized by a single condition? We fix one of the weights and obtain necessary and sufficient conditions on the other weight function which provide just one constant to be important and the second one to be subordinate. The important special cases with Riemann–Liouville operators, some particular weights are also discussed.

References

[1] *Kufner A., Persson L.-E.* Integral inequalities with weights. River Edge, NJ: World Scientific, 2003.

---

[1] Computing Centre FEB RAS, Tikhookeanskaya st., 153, Khabarovsk 680042, Russia.
E-mail: nassm@mail.ru

The research work was financially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project 03–01–00017).

Einstein 6-Dimensional Solvmanifolds

E. V. Nikitenko [1] *and Yu. G. Nikonorov* [2]

Rubtsovsk Industrial Institute

This talk is devoted to the classification of 6-dimensional Einstein solvmanifolds. Let us recall, that Ricci flat homogeneous spaces are flat by the theorem of D. V. Alekseevskii and B. N. Kimmel'fel'd. Our main result is the following

Theorem. *Let* $(\mathfrak{s}, Q)$ *be a* 6*-dimensional Einstein metric Lie algebra,* $\mathrm{Ric}(Q) = -r^2 Q$ $(r > 0)$*. Then* $(\mathfrak{s}, Q)$ *is isometric to one of metric Lie algebras from the list below. For every algebra we show an orthonormal basis with respect to* Q *and nontrivial commutators of basic vectors.*

1) $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, Y_1\}$, $[X_1, X_2] = \frac{r}{\sqrt{2}} X_5$, $[X_3, X_4] = \frac{r}{\sqrt{2}} X_5$, $[Y_1, X_i] = \frac{r}{2\sqrt{2}} X_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$, $[Y_1, X_5] = \frac{r}{\sqrt{2}} X_5$.

2) $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, Y_1\}$, $[X_1, X_2] = \frac{2r}{\sqrt{7}} X_3$, $[X_1, X_4] = \sqrt{\frac{2}{7}} r X_5$, $[X_2, X_3] = \frac{2r}{\sqrt{7}} X_5$, $[Y_1, X_1] = 2\sqrt{\frac{2}{105}} r X_1$, $[Y_1, X_2] = \sqrt{\frac{3}{70}} r X_2$, $[Y_1, X_3] = \sqrt{\frac{7}{30}} r X_3$, $[Y_1, X_4] = 2\sqrt{\frac{3}{70}} r X_4$, $[Y_1, X_5] = \sqrt{\frac{10}{21}} r X_5$.

3) $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, Y_1\}$, $[X_1, X_2] = \sqrt{\frac{6}{11}} r X_3$, $[X_1, X_3] = \sqrt{\frac{6}{11}} r X_4$, $[X_1, X_4] = \frac{2r}{\sqrt{11}} X_5$, $[X_2, X_3] = \frac{2r}{\sqrt{11}} X_5$, $[Y_1, X_1] = \frac{r}{\sqrt{55}} X_1$, $[Y_1, X_2] = \frac{2r}{\sqrt{55}} X_2$, $[Y_1, X_3] = \frac{3r}{\sqrt{55}} X_3$, $[Y_1, X_4] = \frac{4r}{\sqrt{55}} X_4$, $[Y_1, X_5] = \frac{5r}{\sqrt{55}} X_5$.

4) $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, Y_1\}$, $[X_1, X_2] = \frac{r}{\sqrt{2}} X_3$, $[X_1, X_3] = \sqrt{\frac{2}{3}} r X_4$, $[X_1, X_4] = \frac{r}{\sqrt{2}} X_5$, $[Y_1, X_1] = \frac{1}{30}\sqrt{6} r X_1$, $[Y_1, X_2] = \frac{3}{20}\sqrt{6} r X_2$, $[Y_1, X_3] = \frac{11}{60}\sqrt{6} r X_3$, $[Y_1, X_4] = \frac{13}{60}\sqrt{6} r X_4$, $[Y_1, X_5] = \frac{1}{4}\sqrt{6} r X_5$.

5) $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, Y_1\}$, $[X_1, X_2] = \frac{r}{\sqrt{2}} X_4$, $[X_1, X_3] = \frac{r}{\sqrt{2}} X_5$, $[Y_1, X_1] = \frac{r}{3\sqrt{2}} X_1$, $[Y_1, X_2] = \frac{r}{2\sqrt{2}} X_2$, $[Y_1, X_3] = \frac{r}{2\sqrt{2}} X_3$, $[Y_1, X_4] = \frac{5r}{6\sqrt{2}} X_4$, $[Y_1, X_5] = \frac{5r}{6\sqrt{2}} X_5$.

---

[1] Rubtsovsk Industrial Institute, ul. Traktornaya, 2/6, Rubtsovsk 658207, Russia.
E-mail: nikit@inst.rubtsovsk.ru

[2] Rubtsovsk Industrial Institute, ul. Traktornaya, 2/6, Rubtsovsk 658207, Russia.
E-mail: nik@inst.rubtsovsk.ru

This project was supported by Council on Leading scientific schools of Russian Federation (grant 311.2003.1), Russian Foundation for Basic Research (grant 02–01–01071), and Ministry of Education of RF (grant E 02–1.0–120).

6) $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, Y_1\}$, $[X_1, X_2] = \sqrt{\frac{2}{3}} r X_3$, $[X_1, X_3] = \frac{r}{\sqrt{2}} X_4$, $[X_2, X_3] = \frac{r}{\sqrt{2}} X_5$, $[Y_1, X_1] = \frac{r}{2\sqrt{6}} X_1$, $[Y_1, X_2] = \frac{r}{2\sqrt{6}} X_2$, $[Y_1, X_3] = \frac{r}{\sqrt{6}} X_3$, $[Y_1, X_4] = \frac{1}{4}\sqrt{6} r X_4$, $[Y_1, X_5] = \frac{1}{4}\sqrt{6} r X_5$.

7) $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, Y_1\}$, $[X_1, X_2] = \sqrt{\frac{2}{3}} r X_3$, $[X_1, X_3] = \sqrt{\frac{2}{3}} r X_4$, $[Y_1, X_1] = \frac{r}{\sqrt{39}} X_1$, $[Y_1, X_2] = \frac{2r}{\sqrt{39}} X_2$, $[Y_1, X_3] = \frac{3r}{\sqrt{39}} X_3$, $[Y_1, X_4] = \frac{4r}{\sqrt{39}} X_4$, $[Y_1, X_5] = \frac{3r}{\sqrt{39}} X_5$.

8) $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, Y_1\}$, $[X_1, X_2] = \sqrt{\frac{2}{3}} r X_3$, $[Y_1, X_1] = \sqrt{\frac{2}{21}} r X_1$, $[Y_1, X_2] = \sqrt{\frac{2}{21}} r X_2$, $[Y_1, X_3] = 2\sqrt{\frac{2}{21}} r X_3$, $[Y_1, X_4] = \sqrt{\frac{3}{14}} r X_4$, $[Y_1, X_5] = \sqrt{\frac{3}{14}} r X_5$.

9) $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, Y_1\}$, $[Y_1, X_i] = \frac{r}{\sqrt{5}} X_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 5)$.

10) $\{X_1, X_2, X_3, X_4, Y_1, Y_2\}$, $[X_1, X_2] = \sqrt{\frac{2}{3}} r X_3$, $[Y_1, X_1] = \frac{2r}{\sqrt{33}} X_1$, $[Y_1, X_2] = \frac{2r}{\sqrt{33}} X_2$, $[Y_1, X_3] = \frac{4r}{\sqrt{33}} X_3$, $[Y_1, X_4] = \frac{3r}{\sqrt{33}} X_4$, $[Y_2, X_1] = t \cdot r X_1 + r\sqrt{\frac{1}{2} - 11t^2} X_2$, $[Y_2, X_2] = r\sqrt{\frac{1}{2} - 11t^2} X_1 + t \cdot r X_2$, $[Y_2, X_3] = 2t \cdot r X_3$, $[Y_2, X_4] = -4t \cdot r X_4$ *for some* $t \in [0, 1/\sqrt{22}]$.

11) $\{X_1, X_2, X_3, X_4, Y_1, Y_2\}$, $[X_1, X_2] = \sqrt{\frac{2}{3}} r X_3$, $[X_1, X_3] = \sqrt{\frac{2}{3}} r X_4$, $[Y_1, X_1] = \frac{r}{\sqrt{30}} X_1$, $[Y_1, X_2] = \frac{2r}{\sqrt{30}} X_2$, $[Y_1, X_3] = \frac{3r}{\sqrt{30}} X_3$, $[Y_1, X_4] = \frac{4r}{\sqrt{30}} X_4$, $[Y_2, X_1] = \frac{3r}{\sqrt{30}} X_1$, $[Y_2, X_2] = -\frac{4r}{\sqrt{30}} X_2$, $[Y_2, X_3] = -\frac{r}{\sqrt{30}} X_3$, $[Y_2, X_4] = \frac{2r}{\sqrt{30}} X_4$.

12) $\{X_1, X_2, X_3, X_4, Y_1, Y_2\}$, $[Y_1, X_i] = \frac{r}{2} X_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$, $[Y_2, X_1] = \frac{1+s+t}{2\sqrt{1+t^2+s^2}} r X_1$, $[Y_2, X_2] = \frac{1-s-t}{2\sqrt{1+t^2+s^2}} r X_2$, $[Y_2, X_3] = \frac{t-s-1}{2\sqrt{1+t^2+s^2}} r X_3$, $[Y_2, X_4] = \frac{s-t-1}{2\sqrt{1+t^2+s^2}} r X_4$ *for some* $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$.

13) $\{X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3\}$, $[Y_1, X_i] = \frac{r}{\sqrt{3}} X_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$, $[Y_2, X_2] = \frac{r}{\sqrt{2}} X_2$, $[Y_2, X_3] = -\frac{r}{\sqrt{2}} X_3$, $[Y_3, X_1] = -\frac{2r}{\sqrt{6}} X_1$, $[Y_3, X_2] = \frac{r}{\sqrt{6}} X_2$, $[Y_3, X_3] = \frac{r}{\sqrt{6}} X_3$.

All the above listed metric Lie algebras are pairwise nonisometric.

Corollary. *Every nonflat Einstein* 6*-dimensional solvable metric Lie algebra is standard. The solvmanifolds, which correspond to the metric Lie algebras listed in the items* 1)–13) *of the theorem, have the eigenvalue types* $(1 < 2; 4, 1)$, $(3 < 4 < 6 < 7 < 10; 1, 1, 1, 1, 1)$, $(1 < 2 < 3 < 4 < 5; 1, 1, 1, 1, 1)$, $(2 < 9 < 11 < 13 < 15; 1, 1, 1, 1, 1)$, $(2 < 3 < 5; 1, 2, 2)$, $(1 < 2 < 3; 2, 1, 2)$, $(1 < 2 < 3 < 4; 1, 1, 2, 1)$, $(2 < 3 < 4; 2, 2, 1)$, $(1; 5)$, $(2 < 3 < 4; 2, 1, 1)$, $(1 < 2 < 3 < 4; 1, 1, 1, 1)$, $(1; 4)$, $(1; 3)$ *respectively.*

$\overline{\partial}$-замкнутое продолжение CR-форм с особенностями на порождающем многообразии

Т. Н. Никитина [1]

Красноярский государственный технический университет

Пусть Γ — гладкое порождающее многообразие в области голоморфности $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, $n > 1$, с ненулевой формой Леви. Область $\Omega_\Gamma \subset \Omega$ есть область, примыкающая к Γ, в которую $\overline{\partial}$-замкнуто продолжаются все CR-формы, заданные на Γ. Компакт $K = \widehat{K}_\Omega \subset \Omega$. Показывается, что всякая CR-форма на $\Gamma \setminus K$ класса $L^1_{\mathrm{loc}}(\Lambda^{p,r}, \Gamma \setminus K)$ $\overline{\partial}$-замкнуто продолжается в $\Omega_\Gamma \setminus K$. При $n = 2$ многообразие Γ должно быть замкнуто ($\partial\Gamma = 0$).

Пусть $S_{q,z}$ — замкнутое множество тех точек x из единичной сферы, для которых форма Леви $L_{z,x}$ имеет менее q отрицательных собственных значений на T^c_z. Пусть U есть стягиваемая окрестность множества S_{q,z^0} в S.

Теорема 1. *Пусть компакт $K = \widehat{K}_\Omega$ и $\Gamma \setminus K$ связно, существуют точки $\zeta^0 \in \Gamma \setminus K$ и $x^0 \in U$ такие, что сильно регулярный барьер $P(\zeta^0, z, x^0)$ является голоморфной функцией в Ω. Если $n \geqslant 3$ и f — CR-форма на $\Gamma \setminus K$ класса $L^1_{\mathrm{loc}}(\Lambda^{p,r}, \Gamma \setminus K)$ $(r < q)$, то f $\overline{\partial}$-замкнуто продолжается в $\Omega_\Gamma \setminus K$. В случае $n = 2$ теорема верна для замкнутых многообразий Γ (т. е. $\partial\Gamma = 0$). Если в каждой точке $\zeta^0 \in \Gamma \setminus K$ существует сильно регулярный голоморфный по $z \in \Omega$ барьер, то теорема верна без условия связности $\Gamma \setminus K$.*

При доказательстве теоремы 1 используется более простое и естественное интегральное представление, полученное из интегрального представления Р. А. Айрапетяна и Г. М. Хенкина, в котором интегрирование производится лишь только по CR-многообразию Γ (а не по его дополнению).

Данная теорема допускает обобщение на случай, когда K — мероморфно p-выпуклый компакт, которое для $p = q = 0$ приведено в [1].

Список литературы

[1] *Кытманов А. М., Никитина Т. Н.* Устранимые особенности CR-функций на порождающих многообразиях // Докл. РАН. 1992. Т. 326, № 3. С. 414–416.

[1] Красноярский государственный технический университет, ул. Акад. Киренского, 26, Красноярск 660074, Россия.

E-mail:nick@fivt.kgtu.runnet.ru

Работа поддержана грантом Президента для поддержки ведущих научных школ НШ–1212.2003.1.

Noncompact Homogeneous Einstein 5-Manifolds

Yu. G. Nikonorov [1]

Rubtsovsk Industrial Institute

This talk is devoted to the classification of 5-dimensional *noncompact* homogeneous Einstein manifolds. Ricci flat homogeneous spaces are flat by the theorem of D. V. Alekseevskii and B. N. Kimmel'fel'd. In this talk we deal with Einstein manifolds of negative Ricci curvature. Our main result is the following

Theorem. *Let (M^5, ρ) be a connected and simply connected noncompact homogeneous Einstein 5-manifold,* $\mathrm{Ric}(\rho) = -r^2\rho$ $(r > 0)$. *Then (M^5, ρ) is isometric to one of solvmanifolds $(S, \tilde{\rho})$, which correspond to metric Lie algebras $(\mathfrak{s}, Q)$ from the list below. For every algebra we show an orthonormal basis with respect to Q and nontrivial commutators of basic vectors.*

1) $\{X_1, X_2, X_3, X_4, Y\}$, $[Y, X_i] = \frac{r}{2}X_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$.

2) $\{X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2\}$, $[Y_1, X_i] = \frac{r}{\sqrt{3}}X_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$, $[Y_2, X_1] = \frac{t+\sqrt{2-3t^2}}{2}rX_1$, $[Y_2, X_2] = -trX_2$, $[Y_2, X_3] = \frac{t-\sqrt{2-3t^2}}{2}rX_3$ *for some* $t \in [0, 1/\sqrt{6}]$.

3) $\{X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2\}$, $[X_1, X_2] = \sqrt{\frac{2}{3}}rX_3$, $[Y_1, X_i] = \frac{r}{\sqrt{6}}X_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 2)$, $[Y_1, X_3] = \sqrt{\frac{2}{3}}rX_3$, $[Y_2, X_1] = \frac{r}{\sqrt{2}}X_1$, $[Y_2, X_2] = -\frac{r}{\sqrt{2}}X_2$.

4) $\{X_1, X_2, X_3, X_4, Y\}$, $[X_1, X_2] = \sqrt{\frac{2}{3}}rX_3$, $[Y, X_1] = \frac{2r}{\sqrt{33}}X_1$, $[Y, X_2] = \frac{2r}{\sqrt{33}}X_2$, $[Y, X_3] = \frac{4r}{\sqrt{33}}X_3$, $[Y, X_4] = \frac{3r}{\sqrt{33}}X_4$.

5) $\{X_1, X_2, X_3, X_4, Y\}$, $[X_1, X_2] = \sqrt{\frac{2}{3}}rX_3$, $[X_1, X_3] = \sqrt{\frac{2}{3}}rX_4$, $[Y, X_1] = \frac{r}{\sqrt{30}}X_1$, $[Y, X_2] = \frac{2r}{\sqrt{30}}X_2$, $[Y, X_3] = \frac{3r}{\sqrt{30}}X_3$, $[Y, X_4] = \frac{4r}{\sqrt{30}}X_4$.

All the solvmanifolds, corresponded to the above listed metric Lie algebras, are pairwise nonisometric.

Corollary. *Every nonflat Einstein 5-dimensional solvable metric Lie algebra is standard. The solvmanifolds, which correspond to the metric Lie algebras listed in the items* 1)–5) *of the theorem, have the eigenvalue types* $(1;4)$, $(1;3)$, $(1 < 2; 2, 1)$, $(2 < 3 < 4; 2, 1, 1)$, $(1 < 2 < 3 < 4; 1, 1, 1, 1)$ *respectively.*

---

[1] Rubtsovsk Industrial Institute, ul. Traktornaya, 2/6, Rubtsovsk 658207, Russia.
E-mail: nik@inst.rubtsovsk.ru

This project was supported by Council on Leading scientific schools of Russian Federation (grant 311.2003.1), Russian Foundation for Basic Research (grant 02–01–01071), and Ministry of Education of RF (grant E 02–1.0–120).

Bilinear Expansions of Non-Symmetric, Continuous Carleman Kernels

Igor M. Novitskiĭ [1]

Institute for Applied Mathematics FEB RAS

Let T be a bounded integral operator on $L_2(\mathbb{R})$ induced by continuous Carleman kernel K on $\mathbb{R}^2$. We give conditions under which the bilinear formula

$$K(s,t) = \sum_n Wu_n(s)\overline{Vu_n(t)}$$

holds for each orthonormal basis $\{u_n\}$ in the sense of uniform convergence. Examples of factorizations of T into products $T = WV^*$ associated with canonical expansions of K are also discussed.

[1] Institute for Applied Mathematics, Zaparina str., 92, Khabarovsk 680000, Russia.
E-mail: novim@iam.khv.ru

О существовании сжимающего отображения, сохраняющего граничные значения

А. И. Парфёнов [1]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Пусть целое $n \geqslant 2$, F — открытый куб в $\mathbb{R}^{n-1}$ с длиной стороны 1, $E = (-1,1) \times F$, и в E задана конечная борелевская знакопеременная мера μ с разложением Хана $E_- = (-1,0] \times F$, $E_+ = (0,1) \times F$. Полная вариация $|\mu|$ меры μ задаётся формулой $|\mu|(X) = \mu(X \cap E_+) - \mu(X \cap E_-)$. Введём H_0 — построенное по мере $|\mu|$ над E пространство L_2. Пусть целое $m \geqslant 1$, $\infty > p > n/m$ и W — пополнение $C_0^\infty(E)$ в норме пространства Соболева $W_p^m(E)$. Поскольку W состоит из непрерывных функций, определён оператор $R \in L(W, H_0)$, сопоставляющий (непрерывному представителю) функции из W её класс эквивалентности в H_0. Снабдим линейное пространство RW ($\subset H_0$) нормой $\|u\|_{RW} = \inf\limits_{v \in W : Rv = u} \|v\|_W$.

Обозначим через J оператор умножения функции на $\chi_{E_+} - \chi_{E_-}$, где χ_X — характеристическая функция X, а $(\cdot,\cdot)_{\theta,q}$ пусть, как обычно — метод вещественной интерполяции банаховых пространств с параметрами θ и q. Рассмотрим условие

$$\exists \theta \in (0,1) \quad J \in L((H_0, RW)_{\theta,2}). \tag{1}$$

В § 2 и § 6 из [2] описаны индефинитная эллиптическая спектральная задача и нелинейное дифференциальное уравнение смешанного типа, при исследовании которых важно знать о справедливости одномерного аналога условия (1). Пусть H — сужение H_0 на E_+, Z — сужение W на E_+, Z_0 — подпространство всех функций из Z, имеющих нулевой полный след на $\{0\} \times F$, а $R \in L(Z, H)$ определяется по аналогии с $R \in L(W, H_0)$. Нетрудно видеть, что $H = L_{2,\mu}(E_+)$, а Z_0 — это пополнение $C_0^\infty(E_+)$ в норме пространства $W_p^m(E_+)$. С помощью лемм 1 и 2 из [1] можно показать, что для выполнимости (1) достаточно существования функции $T\colon Z \to Z$ и констант $N_1 \in (0,1)$, $N_2 > 0$ таких, что для любого $u \in Z$ выполнены следующие три условия:

(T_0): $T(u) - u \in Z_0$;

(T_1): $\|RT(u)\|_H \leqslant N_1 \|Ru\|_H$;

[1] Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск 630090, Россия.

E-mail: pai79@sibmail.ru

(T_2): $\|T(u)\|_Z \leqslant N_2 \|u\|_Z$.
Грубо говоря, T — ограниченный в Z оператор, сохраняющий граничные значения на $\{0\} \times F$, и сжимающий в H. Это достаточное для выполнения (1) условие является новым. В § 3 из [2] рассмотрена аналогичная одномерная ($m = n = 1$) ситуация и приведен критерий существования оператора T с перечисленными свойствами, причём T можно построить так, чтобы он был линеен и симметричен в H.

Сформулируем условие в терминах сужения μ на E_+, достаточное для существования тройки (T, N_1, N_2) со свойствами (T_0), (T_1) и (T_2). Обозначим длину стороны куба Q в $\mathbb{R}^{n-1}$ или в $\mathbb{R}^n$ через l_Q. Для куба $X \subset \mathbb{R}^n$ и $u \in W_p^m(X)$ положим $N_X(u) = 0$ при $u = 0$ и

$$N_X(u) = \left[\int\limits_X |\nabla^m u|^p \, dx \left(l_X^{-mp} \int\limits_X |u|^p \, dx \right)^{-1} \right]^{1/p}$$

при $u \neq 0$, где $\nabla^m u$ — вектор из частных производных функции u порядка m. Пусть $N_X(u)$ мало. Из интегрального представления Соболева следует, что функция u в X близка в равномерной метрике к некоторому многочлену степени не выше $m - 1$, и u можно называть *почти полиномиальной* в X. Понятие почти полиномиальности близко к тематике книги [3]; другие варианты почти полиномиальности рассматривались в публикациях [4 5]. Имеет место следующий результат:

Пусть для любого $q \in (0,1)$ существуют $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ и $0 < h_0 \leqslant 1$ такие, что для любого открытого куба $Q \subset F$ с $l_Q \leqslant h_0$ из $N_X(u) \leqslant \varepsilon_1$, $X = (0, l_Q) \times Q$, следует, что $\int\limits_{(0,\varepsilon_2 l_Q)\times Q} |u|^2 \, d\mu \leqslant q \int\limits_X |u|^2 \, d\mu$. Тогда существует тройка (T, N_1, N_2) со свойствами (T_0), (T_1) и (T_2).

В доказательстве используется разложение E_+ типа Уитни. Наложенное на $\mu\big|_{E_+}$ условие означает, во-первых, убывание меры при приближении к границе, а во-вторых то, что мера не концентрируется в $(\varepsilon_2 l_Q, l_Q) \times Q$ вблизи множества нулей полинома степени не выше $m - 1$. При $m = 1$ вторая составляющая условия пропадает, а при $p(m-1) < 2$ она не нужна, а именно справедлив следующий результат:

Пусть либо $m = n = 2$ и $1 < p < 2$, либо $m = 2$, $n = 3$ и $3/2 < p < 2$. Если для любого $q \in (0,1)$ существуют такие положительные ε и $h_0 \leqslant 1$, что для любого открытого куба $Q \subset F$ с $l_Q \leqslant h_0$ выполняется неравенство $\mu((0, \varepsilon l_Q) \times Q) \leqslant q\mu((0, l_Q) \times Q)$, то существует тройка (T, N_1, N_2) со свойствами (T_0), (T_1) и (T_2).

Доказательство этого факта сложнее предыдущего и существенно использует гладкость куска $\{0\} \times F$ границы ∂E_+. Если T с упомянутыми свойствами существует, то гёльдеровость W_p^m-функций и рассмотрение итерации $T^s\varphi$ для большого s и пробной функции φ позволяют получить некоторое необходимое условие (существования T) в терминах $\mu\big|_{E_+}$, близкое к условию $\mu((0, \varepsilon l_Q) \times Q) \leqslant q\mu((0, l_Q) \times Q)$. Изучение случая $mp \leqslant n$ связано с ограничением $W \subset H_0$ на μ, т. е. с возможностью определить оператор вложения $R \in L(W, H_0)$. Возможно сформулировать (грубое) условие с помощью обратного неравенства Гёльдера для плотности $g = d\mu/dx$, достаточное для выполнения $W \subset H_0$ и существования (T, N_1, N_2) со свойствами (T_0), (T_1) и (T_2).

Список литературы

[1] *Парфёнов А. И.* Об одном критерии вложения интерполяционных пространств и его приложении к индефинитным спектральным задачам // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44. С. 810–819.

[2] *Парфёнов А. И.* Об условии Чургуса в индефинитных задачах Штурма — Лиувилля // Мат. труды. 2004. Т. 7. С. 153–188.

[3] *Решетняк Ю. Г.* Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. Новосибирск: Изд-во Ин-та матем., 1996.

[4] *Yomdin Y.* The set of zeroes of an “almost polynomial” function // Proc. Amer. Math. Soc. 1984. V. 90. P. 538–542.

[5] *Gajda Z.* Local stability of the functional equation characterizing polynomial functions // Ann. Pol. Math. 1990. V. 52. P. 119–137.

Gamma-Convergence Through Young Measure

Pablo Pedregal [1]

Universidad de Castilla-La Mancha

We will describe how Young measures can be used to define and find the Gamma-limit of a sequence of functionals when oscillations are involved in the process and such functionals are defined through an oscillating sequence of functions. As a preliminary step, we will look at the case when no gradients are considered and examine various examples. Then, we will move to the more interesting situation when functionals depend on gradients. In this case, a general meaningful result requires a main structural assumption of the sequence of functions defining the functionals. They need to verify the average gradient property (AGP) which essentially means that taking averages of gradients over levels sets of the sequence gives back a gradient. We will explore two typical situations: a first-order laminate and homogenization.

[1] Departamento de Matematicas, ETSI Industriales, Universidad de Castilla-La Mancha, 13071 Ciudad Real, Spain.
E-mail: pablo.pedregal@uclm.es

Gradient Young Measures and Applications to Optimal Design

Pablo Pedregal [1]

Universidad de Castilla-La Mancha

There will be two parts for this lecture. The first one will focused on some of the fundamental concepts of non-convex, vector variational problems including weak lower semicontinuity, gradient Young measures, polyconvexity, quasiconvexity, laminates, convex hulls, relaxation, etc. We will try to emphasize the main concepts and ideas as well as the principal results and facts. In the second part, we will try to show how these ideas and tools can be used in problems of optimal design to understand optimal microstructures. We will dwell on a typical two-dimensional situation in conductivity. In the quadratic case, even explicit computations of these convex hulls are possible and these, in turn, can be utilized to perform robust numerical approximation of optimal (micro)structures.

[1] Departamento de Matematicas, ETSI Industriales, Universidad de Castilla-La Mancha, 13071 Ciudad Real, Spain.

E-mail: pablo.pedregal@uclm.es

Матричная форма производной Шварца и вторая кривизна

Ю. А. Пешкичев [1]

Бердск

Пусть функция двух переменных трижды дифференцируема в области определения. Её первой матричной кривизной назовём отношение евклидовой нормы матрицы Гессе и нормы градиента, второй — при замене матрицы Гессе самой функции на матрицу Гессе её градиентного отображения.

Теорема. *Вторая кривизна линии уровня не превосходит суммы второй матричной кривизны с коэффициентом* $2\sqrt{2}$ *и квадрата результата умножения первой матричной кривизны на тот же коэффициент.*

Замечание 1. Оценка второй кривизны напоминает производную Шварца. Сама производная Шварца проявляется в случае гармоничности функции [1].

Замечание 2. Норма логарифмического градиента определителя матрицы Гессе не превосходит отношения второй и первой матричных кривизн, умноженного на число обусловленности [2, с. 144] матрицы Гессе.

Список литературы

[1] *Пешкичев Ю. А.* Инвариант Шварца и кривизна // Тез. докл. Междунар. конф.-школа по геометрии и анализу, посвященная памяти А. Д. Александрова (1912–1999). Новосибирск, 2002. С. 61–62.

[2] *Годунов С. К.* Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 1997.

[1] Бердск, Россия.
E-mail: yuri@sibinco.ru

Частные производные второго порядка и квазиконформность

Ю. А. Пешкичев [1]

Бердск

Изучаются нерегулярные функции комплексного переменного с дважды дифференцируемыми координатными функциями как квазиконформные отображения с числом обусловленности [1, с. 144] их матрицы Якоби в качестве локальной дилатации.

1. Аналог неравенства Крейнеса: квадрат частного от деления нормы градиента якобиана на евклидову норму матрицы Гессе не превосходит абсолютной величины якобиана, умноженной на число обусловленности.

2. Аналог неравенства Годунова: норма логарифмического градиента якобиана не превосходит числа обусловленности, умноженного на частное от деления евклидовых норм матриц Гессе и Якоби. Это неравенство распространяется на случай дважды дифференцируемых отображений в многомерном пространстве. В форме конечных разностей оно установлено в монографии [1, с. 150].

Список литературы

[1] *Годунов С. К.* Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 1997.

[1] Бердск, Россия.
E-mail: yuri@sibinco.ru

Removable Singularities for p-Harmonic Functions

A. V. Pokrovskii [1]

Institute of Mathematics of
the National Academy of Sciences of Ukraine

The talk deals with removable singularities for solutions to the quasilinear equation $\operatorname{div}(|\nabla f|^{p-2}\nabla f) = 0$, $1 < p < \infty$. By a solution to this equation on a nonempty open set $G \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ we mean, as usual, a function f from the local Sobolev class $W^{1,p}(G)_{\mathrm{loc}}$ such that for any function $\varphi \in W_0^{1,p}(G)$ the following equality holds

$$(\Delta_p f, \varphi) := -\int\limits_G |\nabla f|^{p-2}\nabla f \cdot \nabla\varphi \, dx = 0.$$

The set of all such f is denoted by $A_p(G)$ and their elements are called p-harmonic functions.

For an arbitrary open Euclidean ball $B(x,r)$ centered at $x \in \mathbb{R}^n$ and of radius $r > 0$ and for a function $f \in W^{1,p}(B(x,r))$ we define $f_{x,r}$ as the unique function from $W^{1,p}(B(x,r)) \cap A_p(B(x,r))$ satisfying the condition $f_{x,r} - f \in W_0^{1,p}(B(x,r))$.

Let G be a bounded domain in $\mathbb{R}^n$ and $\gamma > 0$. Define the class $A_p^\gamma(G)$ as the set of all $f \in W^{1,\max\{2,p\}}(G)_{\mathrm{loc}}$ such that the inequality

$$\left(r^{-n} \int\limits_{B(x,r/2)} |\nabla f - \nabla f_{x,r}|^2 \, dy \right)^{1/2} \leqslant C r^\gamma$$

holds for any ball $B(x,r) \Subset G$, where $C \geqslant 0$ does not depend on x and r. It is clear that $A_p(G) \subset A_p^\gamma(G)$.

Let E be a relatively closed set in G, $E \neq G$, and let $H(G)$ be the class $A_p^\gamma(G)_{\mathrm{loc}}$, $\gamma \in (0,1]$, or the class $C^{1,\gamma}(G)_{\mathrm{loc}}$, $\gamma \in (0,1)$. We say that E is removable for p-harmonic functions in the class $H(G)$, if for any function $f \in H(G) \cap A_p(G \setminus E)$ there exists such a function $g \in H(G) \cap A_p(G)$ that $f \equiv g$ on $G \setminus E$.

[1] Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Tereshchenkovskaya str. 3, Kiev 01601, Ukraine.

E-mail: pokrovsk@imath.kiev.ua

Theorem 1. *Let $p \in (1,\infty)$ and $\gamma \in (0,1]$. Then E is removable for p-harmonic functions in the class $A_p^\gamma(G)_{loc}$ iff it has zero Hausdorff measure of order $n-1+\gamma$: $\operatorname{mes}^{n-1+\gamma} E = 0$.*

For $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ and $f \in L_2(B(x,r))$, define

$$m(f,x,r) := \frac{1}{\sigma_n r^n} \int\limits_{B(x,r)} f(y)\,dy, \qquad \sigma_n := \int\limits_{B(0,1)} dy,$$

$$\operatorname{osc}_2(f,x,r) := \left(\frac{1}{\sigma_n r^n} \int\limits_{B(x,r)} |f(y) - m(f,x,r)|^2\,dy \right)^{1/2}.$$

It is well known, that there exist such $\alpha \in (0,1]$ and $\nu > 0$ depending on n and p only, that for arbitrary balls $B(x,r) \Subset B(x,R) \Subset B(x,R+\varepsilon) \subset \mathbb{R}^n$, $\varepsilon, r > 0$, and for a function $f \in A_p(B(x,R+\varepsilon))$ the following inequality holds

$$\operatorname{osc}_2(\nabla f,x,r) \leqslant \nu \left(\frac{r}{R}\right)^\alpha \operatorname{osc}_2(\nabla f,x,R). \tag{1}$$

Denote by $\gamma(n,p) > 0$ the supremum taken over all those α, for which there is such $\nu > 0$ depending only on n, p and α, that for arbitrary balls $B(x,r) \Subset B(x,R) \Subset B(x,R+\varepsilon) \subset \mathbb{R}^n$, $\varepsilon, r > 0$, and for a function $f \in A_p(B(x,R+\varepsilon))$ the inequality (1) holds.

Theorem 2. *The following statements are true*:

1) $A_p^\gamma(G)_{\mathrm{loc}} \subset A_p(G)$ *for* $1 < p < \infty$ *and* $\gamma > 1$;

2) $C^{1,\gamma}(G)_{\mathrm{loc}} \subset A_p^\gamma(G)_{\mathrm{loc}}$ *for* $p \geqslant 2$ *and* $\gamma \in (0,1)$;

3) *If* $1 < p < 2$, $\gamma \in (0,1)$ *and* $f \in C^{1,\gamma}(G)_{\mathrm{loc}}$ *is such, that* $\nabla f \neq 0$ *everywhere in* G, *then* $f \in A_p^\gamma(G)_{\mathrm{loc}}$;

4) $A_p^\gamma(G)_{loc} \subset C^{1,\gamma}(G)_{loc}$ *for* $p \in (1,\infty)$ *and* $\gamma < \gamma(n,p)$.

Theorem 3. *Let $p \in (1,\infty)$ and $\gamma \in (0,1)$. If $\operatorname{mes}^{n-1+\gamma} E = 0$ then E is removable for p-harmonic functions in the class $C^{1,\gamma}(G)_{\mathrm{loc}}$, but if $\gamma < \gamma(n,p)$ and $\operatorname{mes}^{n-1+\gamma} E > 0$ then E is not removable for p-harmonic functions in this class.*

Топологические пределы многозначных отображений

И. В. Поликанова [1]

Барнаульский государственный педагогический университет

Понятия нижних и верхних пределов семейств несчётных множеств использовались автором при изучении сильно выпуклых поверхностей и оказались полезным инструментом при исследовании более широкого класса поверхностей [1, 2].

Дальнейшее расширение данных понятий относится к многозначным отображениям одного топологического пространства в другое без каких-либо ограничений на топологии пространств.

Установлены свойства этих пределов, обобщающие известные ранее для последовательностей множеств [3]. Например, их локальная определённость, замкнутость нижнего предела, свойства, связанные с применением теоретико-множественных операций. Имеются и отличия. Так, верхний предел может не быть замкнутым множеством. Однако, если оба пространства удовлетворяют первой аксиоме счётности, то различия стираются.

Список литературы

[1] *Поликанова И. В.* Выпуклые m-мерные поверхности в E^n // Сиб. мат. журн. 1985. Т. 26, № 6. С. 90–100.

[2] *Поликанова И. В.* Внешнегеометрические свойства кратчайших в окрестности точки сильной прикасаемости // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 1. С. 125–139.

[3] *Куратовский К.* Топология. Т. 1. М.: Мир, 1966.

[1] Кафедра геометрии, Барнаульский государственный педагогический университет, ул. Молодежная, 55, Барнаул 656031, Россия.

E-mail: wells@uni-altai.ru

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 02–01–01071).

Полугруппы логарифмов преобразований Лапласа безгранично делимых распределений

А. А. Полковников [1]

Волжский гуманитарный институт (филиал)
Волгоградского государственного университета

Пусть $\varphi(z) = \int\limits_{\mathbb{R}^+} e^{-zu}\, d\mu(u)$ — преобразование Лапласа безгранично делимой вероятностной меры μ, сосредоточенной на неотрицательной вещественной полуоси $\mathbb{R}^+$. Как известно $[1, 2]$, φ представляет собой аналитическую в правой полуплоскости $\mathbb{H}$ функцию, не обращающуюся в нуль и принимающую значения из единичного круга. Эти свойства позволяют выделить однозначную ветвь $\ln\varphi(z)$ в $\mathbb{H}$. Функция $f(z) = -\ln\varphi(z)$ отображает $\mathbb{H}$ в себя. Кроме того, совокупность всех таких функций f образует непрерывную полугруппу $\mathfrak{L}$ относительно операции композиции и топологии локально равномерной сходимости. Эта полугруппа естественно возникает при изучении ветвящихся процессов с непрерывным пространством состояний. Динамика однородного марковского ветвящегося процесса с непрерывным пространством состояний аналитически описывается в терминах однопараметрических полугрупп в $\mathfrak{L}$.

В работе изучены динамические свойства отображений из полугруппы $\mathfrak{L}$. Получено инфинитезимальное описание однопараметрических полугрупп в $\mathfrak{L}$, выделены условия существования дробных итераций.

Список литературы

[1] *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984.

[2] *Коваленко И. Н., Гнеденко Б. В.* Теория вероятностей. К.: Выша школа, 1990.

[1] Волжский гуманитарный институт (филиал) Волгоградского государственного университета, ул. 40 лет Победы, 11, г. Волжский, Волгоградской обл. 404133, Россия.
E-mail: polkovnikov@vgi.volsu.ru

Weighted Hardy's Inequalities for Negative Indices of Summation

Dmitry V. Prokhorov [1]

Computing Centre FEB RAS

Let $(a,\, b) \in \mathbb{R}$. Denote by $\mathfrak{M}^+(a,b)$ the class of all measurable functions $f\colon (a,\, b) \to [0, +\infty]$ and put $(I^\times f)(x) := \int\limits_a^x f(y)\,dy$, $(I_\times f)(x) := \int\limits_x^b f(y)\,dy$ for $x \in (a,b)$. The Hardy inequality with weights $u, v \in \mathfrak{M}^+(a,b)$

$$\left(\int\limits_a^b u(x)[I(fv)(x)]^q\,dx\right)^{1/q} \leqslant C\left(\int\limits_a^b f(x)^p\,dx\right)^{1/p} \quad \text{for all } f \in \mathfrak{M}^+(a,b),$$

where $I = I^\times$ or $I = I_\times$, has been completely characterized for $p, q > 0$ by G. Talenti, B. Muckenhoupt, J. Bradley, V. Maz'ya and A. Rozin, G. Sinnamon, G. Sinnamon and V. D. Stepanov and some other authors (see the monographs [1, 2] for details). An analogous problem for $p, q < 1$ was studied by P. Beesack and H. Heinig [3], where sufficient conditions and necessary conditions under some restrictions on the weight functions were given for the inequality

$$\left(\int\limits_a^b f(x)^p\,dx\right)^{1/p} \leqslant C\left(\int\limits_a^b u(x)[(I(fv))(x)]^q\,dx\right)^{1/q} \quad \text{for all } f \in \mathfrak{M}^+(a,b). \tag{1}$$

The following theorem gives a precise characterization of (1) for $p, q < 0$.

Theorem. *Let $-\infty < p, q < 0$, $1/r := 1/q - 1/p$, the weight functions $u, v \in \mathfrak{M}^+(a,b)$ and $I = I^\times$ or $I = I_\times$. Then for existing a constant $C > 0$ such that* (1) *holds, it is necessary and sufficiently, that $\mathcal{A} < +\infty$, where*

$$\mathcal{A} := \begin{cases} \sup\limits_{a<t<b} [(Iu)(t)]^{-1/q}\left[\left(Iv^{p'}\right)(t)\right]^{-1/p'}, & q \leqslant p, \\ \left(\int\limits_a^b [(Iu)(x)]^{r/p}\left[\left(Iv^{p'}\right)(x)\right]^{r/p'} u(x)\,dx\right)^{-1/r}, & p < q. \end{cases}$$

Moreover, $\mathcal{A} \approx C$ for the least possible constant C in (1).

[1]Computing Centre FEB RAS, Tikhookeanskaya st., 153, Khabarovsk 680042, Russia.
E-mail: prohorov@as.khb.ru

The research was partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (Project 03–01–00017) and by the Russian Academy of Science (Project 04–3–Г–01–049).

References

[1] *Opic B., Kufner A.* Hardy-type inequalities. Harlow: Longman Scientific & Technical, 1990.

[2] *Kufner A., Persson L.-E.* Weighted inequalities of Hardy type. London: World Scientific, 2003.

[3] *Beesack P., Heinig H.* Hardy's inequalities with indices less than 1 // Proc. Amer. Math. Soc. 1981. V. 83. P. 532–536.

Spline Approximation on Arbitrary Trees

A. Radyna [1]

Belarusian State University

Let (X, ρ) be an ultrametric locally compact space. We consider a ball $B[a, r_0] = \{x \in X : \rho(x, a) \leqslant r_0\}$ and a set of points $\{x_1^1, x_2^1, \ldots, x_{N_1}^1, x_1^2, x_2^2, \ldots, x_{N_2}^2, \ldots\}$ belonging to the ball, and $\lim\limits_{k\to+\infty} N_k = +\infty$. Let f be a continuous real-valued function on $B[a, r_0]$. We construct a spline $L(f, N_k) = \sum\limits_{i=1}^{N_k} \lambda_i \rho(x, x_i^k)$, $x \in B[a, r_0]$, which interpolates f at points x_i^k, $i = 1, 2, \ldots, N_k$, $k \in \mathbb{N}$. Here coefficients λ_i can be found from interpolation conditions $\sum\limits_{i=1}^{N_k} \lambda_i \rho(x_i^k, x_j^k) = f(x_j^k)$, $j = 1, 2, \ldots, N_k$. To find λ_i we are going to invert a matrix of distances $R_k = \big(\rho(x_i^k, x_j^k)\big)_{i,j=1}^{N_k}$, and then to apply the inverse R_k to the vector $\big(f(x_1^k), f(x_2^k), \ldots, f(x_{N_k}^k)\big)$. Furthermore, we are going to show a uniform convergence $L(f, N_k)$ to f when k tends to infinity. First of all, we associate $B[a, r_0]$ with a tree, then we shall be able to forget about an ultrametric space X and shall only deal with the tree. Secondly, we associate the matrix R_k with an algebra of matrices, and find the inverse R_k^{-1} for any k. We shall also find a criterion of invertibility for the matrices R_k. We note, that R_k is a replica Parisi matrix in its most general form (see [2]). At last, we are going to prove

Theorem. *Constructed splines approximate a given function f uniformly.*

To do that we refer to results (see in $[1, \mathrm{Th.}\, 1.4.28, \mathrm{Th.}\, 1.4.29]$) that is any continuous function being given on a compact ultrametric space could be uniformly approximated by linear combinations of indicators of balls. Moreover, since an indicator of a ball in ultrametric space is a continuous function, then it remained only approximate the indicator of a ball. That result might be applied to sociology, psychology, neural network theory.

References

[1] *Leonov N. N.* Mathematical sociology: structurally approximational approach. Minsk, 2002. (Russian).

[2] *Mézard M., Parisi G., Virasoro M. A.* Spin glass theory and beyond. Teaneck, NJ: World Scientific, 1987.

[1] Mechanical adn Mathematical Faculty, Belarusian State University, 4 F. Skaryna av., Minsk 220050, Belarus.

E-mail: Radyna@bsu.by

Potential Theory and the p-Adic Numbers

Yauhen Radyna [1]

Belarusian State University

Historically, potential theory was developed using only the field of real numbers. The real numbers are nothing else but a completion of the rationals $\mathbb{Q}$ with respect to the usual absolute value. The latter satisfies three well-known axioms of a *valuation*: 1) $|a| \geqslant 0$, $|a| = 0$ iff $a = 0$; 2) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$; 3) $|a+b| \leqslant |a| + |b|$ — *triangle inequality*. The absolute value is not a unique valuation on $\mathbb{Q}$. Let p be some prime. Any rational $x \neq 0$ can be represented as $p^{\gamma(x)} n/m$ with the integers n, m not divisible by p; integer $\gamma(x)$ is the *order* of p in x. Let's define

$$|x|_p := \begin{cases} p^{-\gamma(x)}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Function $|x|_p$ is easily checked to satisfy the axioms above, it is called the *p-adic* valuation. The following famous theorem by Ostrowski lists all valuations on $\mathbb{Q}$.

Theorem 1 (Ostrowski). *Any valuation on $\mathbb{Q}$ is equivalent either to the usual absolute value or to p-adic one for some p.*

There is a funny *adelic formula* connecting all the valuations: $|x| \prod_p |x|_p = 1$, $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

The field $\mathbb{Q}_p$ of p-adic numbers is a completion of rationals with respect to the p-adic valuation, it arises on equal footing with $\mathbb{R}$. In addition the p-adic valuation satisfies *strong triangle inequality*: 3′) $|a+b| \leqslant \max\{|a|, |b|\}$. This leads to some unexpected properties: two larger sides in a triangle have the same length, any two balls of the same radius either coincide or do not intersect, and so on, [1]. $\mathbb{Q}_p$ is a locally compact group with respect to addition. Thus there is the unique shift-invariant Haar measure on it. Thus we can integrate real-valued functions of the p-adic argument, and all the constructions of abstract harmonic analysis, including Fourier transform and distributions, are applicable, [2, 3]. Group $\mathbb{Q}_p$ is totally disconnected. So it is quite a surprise that general notions of potential theory have p-adic counterparts. The theory was developed in a relatively recent paper [4] by Haran; so called *homogenous distributions* in this theory have a connection to the theory of the Riemann zeta function through Tate's thesis in

[1] Mechanical adn Mathematical Faculty, Belarusian State University, 4 F. Skaryna av., Minsk 220050, Belarus.
E-mail: yauhen_radyna@tut.by

its Weil's formulation. Function $|x|^\alpha$ is negative definite for all $\alpha \in (0, +\infty)$ (in contrast with the real case) and generates a semi-group of probability measures which can be given explicitly by the p-adic analogue of Feller's formula for α-symmetric stable distributions on $\mathbb{R}$: $\mu_\alpha^t(dx) = \sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(-t)^n}{n!} \frac{\zeta_p(1+n\alpha)}{\zeta_p(-n\alpha)} |x|^{-1-n\alpha}\, dx$, where $\zeta_p(s) = (1-p^{-s})^{-1}$ is a local p-adic zeta function. Measure μ_α^t describes p-adic *brownian motion*. We can introduce p-adic Riesz potentials and they will satisfy p-adic Riesz Reproduction formula. Moreover, various potential theoretic principles can be deduced for the potentials built: the principles of Descent, Dichotomy, Maximum, Regularization, Uniqueness. It should be noted that the p-adic case is often more simple than the real one. There is an α-capacity characteristics of subsets $K \subset \mathbb{Q}_p$, it can be expressed via the α-diameter as $\mathrm{cap}_\alpha(K) = \frac{\zeta_p(\alpha)}{\zeta_p(1-\alpha)} \lim_{N\to\infty} \left\{ \min\limits_{x_1,\dots,x_n \in K} \frac{1}{n(n-1)} \sum\limits_{i<j} |x_i - x_j|^{\alpha-1} \right\}^{-1}$ and satisfies the usual properties; α-capacity can be used to build an explicit solution of p-adic Dirichlet problems. p-Adic potential theory have applications both in Mathematical physics and in Number theory.

References

[1] *Schikhov W.* Ultrametric Calculus. Cambridge: Univ. Press, 1984.

[2] *Weil A.* Basic Number Theory. New York: Springer, 1974.

[3] *Vladimirov V. S., Volovich I. V., Zelenov E. I.* p-Adic Analysis and Mathematical Physics. Singapore: World Scientific, 1994.

[4] *Haran S.* Analytic potential theory over the p-adics // Ann. Inst. Fourier. 1993. V. 43, № 4. P. 905–944.

Конформные деформации псевдоримановых пространств

Е. Д. Родионов [1], *В. В. Славский* [2], *Л. В. Чибрикова* [3]

Барнаульский государственный педагогический университет,
Югорский государственный университет

1. Локально конформно однородные пространства. Пусть $ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j$ — псевдориманова метрика на многообразии M^n, ∇ — линейная связность Леви — Чивита, R_{ijks} — тензор кривизны, R_{ij} — тензор Риччи, $\mathrm{Ric}(\xi) = R_{ij}\xi^i\xi^j$ — кривизна Риччи в направлении единичного вектора ξ, R — скалярная кривизна, W_{ijkl} — тензор Вейля метрики ds^2.

Определение. Векторное поле v определяет инфинитезимальное изометричное преобразование псевдориманова пространства и называется *киллинговым*, если

$$v_{i,j} + v_{j,i} = 0. \tag{1}$$

Соответственно, векторное поле v определяет инфинитезимальное конформное преобразование псевдориманова пространства и называется *конформно-киллинговым*, если

$$v_{i,k} + v_{k,i} = 2wg_{ik}. \tag{2}$$

Определение. Пусть $\{M^n, ds^2\}$ — связное псевдориманово многообразие, для любой точки x_0 которого и любого касательного вектора $\vec{v}_0 \in T_{x_0}M$ существует векторное поле $v(x)$ в окрестности точки $x_0 \in M$, удовлетворяющее системе (1) такое, что $v(x_0) = \vec{v}_0$. Многообразие в этом случае назовём *локально однородным пространством* [1]. Соответственно, если векторное поле $v(x)$ удовлетворяет системе уравнений (2), то многообразие назовём *локально конформно однородным пространством.*

---

[1]Барнаульский государственный педагогический университет, ул. Молодежная, 55, Барнаул 656031, Россия.

E-mail: red@uni-altai.ru

[2]Югорский государственный университет, ул. Мира, 13, Ханты-Мансийск 628007, Россия.

E-mail: slavsky@uriit.ru

[3]Барнаульский государственный педагогический университет, ул. Молодежная, 55, Барнаул 656031, Россия.

E-mail: chibr@mail.ru

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 02–01–01071), совета по ведущим научным школам РФ (НШ 311.2003.1), а также грантового центра при Санкт-Петербургском университете (грант Е 02–1.0–120).

Система уравнений (2) изучалась в работах [2, 3]. В данной работе, следуя [4], находится линейная система уравнений, эквивалентная (2). С помощью этой системы можно более детально исследовать конформно-киллинговы векторные поля.

Теорема. *Система уравнений* (2) *на векторное поле* $v(x)$ *эквивалентна линейной системе на тензорные поля* v_j, η_{ij}, w, ζ_p:

$$v_{j,p} = \eta_{jp} + g_{jp} w, \tag{3}$$
$$\eta_{ij,p} = v_a R^a{}_{pij} + g_{ip}\zeta_j - g_{jp}\zeta_i, \tag{4}$$
$$w_{,p} = \zeta_p, \tag{5}$$
$$\varsigma_{j,p} = \eta_{pa} A^a_j + \eta_{ja} A^a_p - A_{jp,b} v^b - 2w A_{jp}, \tag{6}$$

где $A_{jp} = \frac{1}{n-2}\left(R_{jp} - \frac{R g_{jp}}{2(n-1)}\right)$ *— тензор одномерной секционной кривизны,* v_j *— ковариантные компоненты векторного поля* $v(x)$, η_{ij} *— кососимметричный ковариантный тензор,* w *— функция,* ζ_p *— ковекторное поле. При этом условия интегрируемости системы* (*на решение*) *имеют вид*:

$$\begin{gathered} v^a W_{ijsk,a} + 2w W_{ijsk} - \eta_i^{\cdot a} W_{ajsk} - \eta_j^{\cdot a} W_{iask} - \eta_s^{\cdot a} W_{ijak} - \eta_k^{\cdot a} W_{ijsa} = 0, \\ \zeta_a W^a_{jps} - 3w S_{jps} - v^t S_{jps,t} + \eta_j^{\cdot a} S_{aps} + \eta_p^{\cdot a} S_{jas} + \eta_s^{\cdot a} S_{jpa} = 0, \end{gathered} \tag{7}$$

где $S_{jps} = A_{jp,s} - A_{js,p}$ *— тензор Схоутена — Вейля.*

Замечание. Аналогичным образом можно рассмотреть уравнения Киллинга (1).

Замечание. Примером киллингова (конформно-киллингова) векторного поля служит правоинвариантное векторное поле на группе Ли с левоинвариантной метрикой.

Замечание. Условие интегрируемости можно записать в более компактной форме [2], используя производную Ли:

$$L_v W_{ijks} = 2w W_{ijks}, \qquad L_v S_{ijk} = W^a_{.ijk} w_{,a}.$$

Исследуем строение локально конформно однородных пространств.

Замечание. Конформная деформация локально однородного пространства есть локально конформно однородное пространство.

Теорема. *Пусть* $\{M^n, ds^2\}$ *— локально конформно однородное связное пространство и хотя бы в одной точке* $|W|^2 \neq 0$ ($|S|^2 \neq 0$, $\dim M = 3$).

Тогда $\{M^n, ds^2\}$ конформно эквивалентно локально однородному пространству.

Замечание. Существуют примеры левоинвариантных лоренцевых метрик на трёхмерных унимодулярных группах Ли, для которых тензор Схоутена — Вейля $S \neq 0$, а $|S|^2 = 0$, а также примеры левоинвариантных лоренцевых метрик на специальной шестимерной группе Гейзенберга, для которых тензор Вейля $W \neq 0$, а $|W|^2 = 0$.

Замечание. В случае локально конформно однородного связного риманова пространства, если хотя бы в одной точке $|W|^2 = 0$ ($|S|^2 = 0$ при $\dim M = 3$), то пространство будет конформно плоским [5].

2. Левоинвариантные лоренцевы метрики на трёхмерных унимодулярных группах Ли. Пусть G — трёхмерная группа Ли, g — алгебра Ли группы G. Структурные уравнения алгебры Ли g можно записать в виде

$$[E_i, E_j] = \varepsilon_{ijk} C^{ks} E_s, \tag{8}$$

где ε_{ijk} — обобщённый символ Кронекера, $\varepsilon_{ijk} = \{(-1)^\sigma : \sigma$ чётность подстановки $(ijk)\}$, $C = \|C^{ks}\|$ — некоторая матрица. Тождество Якоби в терминах матрицы C означает условие

$$\widetilde{C}_{ks} = \widetilde{C}_{sk}, \tag{9}$$

где $\|\widetilde{C}_{ks}\|$ — присоединенная матрица, составленная из алгебраических дополнений.

Определение. Алгебра Ли называется *унимодулярной*, если все внутренние автоморфизмы $\mathrm{ad}(U)$ имеют след равный нулю.

Лемма. *Трёхмерная алгебра Ли унимодулярна в том и только в том случае, когда матрица $C = \|C^{ks}\|$ симметричная.*

Замечание. Если матрица C симметричная, то условие (9) выполнено автоматически. В случае трёхмерной простой группы ($[g, g] = g$, $\det C \neq 0$), из (9) следует симметричность исходной матрицы $C^{ks} = C^{sk}$.

При переходе к другому базису структурные константы $\|C^{ks}\|$ преобразуются как 2-контрвариантный псевдотензор. Скалярное произведение на g задано метрическим 2-ковариантным тензором T_{ij}.

Теорема. *Пусть группа G — унимодулярная трёхмерная группа Ли, $\|T_{ij}\|$ — произвольный метрический тензор лоренцевой сигнатуры. Тогда характеристическое уравнение* $\det(T_{ik}C^{kj} - \lambda\delta_i^j) = 0$ *инвариантно относительно преобразований A базиса алгебры Ли g таких, что* $\det A = 1$. *Если* *все корни этого уравнения вещественны и различны, то существует базис в котором коэффициенты $\|C^{ks}\|$ и $\|T_{ij}\|$ составляют диагональные матрицы*

$$C = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Если характеристическое уравнение имеет комплексно сопряженные корни $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ и вещественный корень λ_3, тогда существует базис в котором матрицы C и T имеют вид

$$C = \begin{bmatrix} -\alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим случай вещественных корней характеристического уравнения. Пусть (e_1, e_2, e_3) — базис, удовлетворяющий теореме, тогда, применяя формулы (1)–(7) для вычисления тензора кривизны левоинвариантной метрики в построенном базисе, квадрат длины тензора Схоутена — Вейля $|SW|^2 = SW_{ijk}SW^{ijk}$ равен

$$|SW|^2 = -3\left[\frac{1}{2}\lambda_2^2\lambda_3 - \frac{1}{2}\lambda_2\lambda_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_3^2\lambda_2 - \frac{1}{2}\lambda_2^3 - \frac{1}{2}\lambda_3^3 + \lambda_1^3 - \frac{1}{2}\lambda_1^2\lambda_3\right]^2 - \frac{1}{4}\left[(3\lambda_3^2 + 2\lambda_3\lambda_2 + 3\lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_3 - 2\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1^2)(\lambda_2 - \lambda_3)\right]^2.$$

Из равенства $|SW|^2 = 0$ следует, что $SW_{ijk} = 0$. Рассмотрим левоинвариантную лоренцеву метрику на 3-мерной унимодулярной группе Ли в случае комплексно сопряженных корней характеристического уравнения. Квадрат длины тензора Схоутена — Вейля $|SW|^2 = SW_{ijk}SW^{ijk}$ равен

$$|SW|^2 = \beta^2\left[\lambda_3^2 + 4\lambda_3\alpha + 4\beta^2 - 8\alpha^2\right]^2 - 3\left[\lambda_3^3 - \alpha\lambda_3^2 + 4\beta^2\alpha\right]^2.$$

Выясним, при каких значениях чисел α, β, λ_3 компоненты тензора Схоутена — Вейля отличны от нуля, а $|SW|^2 = 0$. Эти значения будут соответствовать левоинвариантным лоренцевым метрикам, для которых квадрат длины тензора Схоутена — Вейля равен нулю, а сам тензор не тривиален. Заметим, что число β отлично от нуля (т. к. β — коэффициент при мнимой части комплексного корня характеристического многочлена $\det(T_{ik}C^{kj} - \lambda\delta_i^j) = 0$). Рассмотрим следующие возможные случаи.

1. Пусть $\lambda_3 = 0$, тогда квадрат длины тензора Схоутена — Вейля будет равен $|SW|^2 = 16\beta^2(4\alpha^4 + \beta^4 - 7\alpha^2\beta^2)$. При $\beta \neq 0$ и $\alpha = \pm\frac{\sqrt{11}\pm\sqrt{3}}{4}\beta$ квадрат длины тензора Схоутена — Вейля обращается в нуль, а сам тензор ненулевой. Таким образом, существует бесконечно много левоинвариантных лоренцевых метрик с заданным свойством. Нетрудно видеть, вычисляя производную алгебры g, что в данном случае алгебра g имеет тип $e(1,1)$.

2. Пусть $\alpha = 0$. Тогда квадрат длины тензора Схоутена — Вейля будет равен $|SW|^2 = -3\lambda_3^6 + 8\beta^4\lambda_3^2 + \beta^2\lambda_3^4 + 16\beta^6$. Нетрудно проверить, что при $\left(\frac{\lambda_3}{\beta}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{73+[2053+216\sqrt{82}]^{2/3}}{9[2053+216\sqrt{82}]^{1/3}}$ квадрат длины тензора Схоутена — Вейля обращается в нуль, а сам тензор ненулевой. Таким образом, в этом случае существует бесконечно много левоинвариантных лоренцевых метрик с заданным свойством. Аналогично, нетрудно видеть, вычисляя производную алгебры g, что в данном случае алгебра g имеет тип $e(1,1)$, если производная имеет размерность 2, и тип $sl(2,R)$, если размерность производной равна 3.

3. Пусть $\lambda_3 \neq 0$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. Тогда только при $\lambda_3 = 2\beta/\sqrt{3} = -2\alpha$ все компоненты тензора Схоутена — Вейля одновременно обращаются в нуль, в противном случае существует бесконечно много таких троек чисел λ_3, α, β, при которых компоненты тензора Схоутена — Вейля одновременно в нуль не обращаются, а квадрат его длины равен нулю. Рассуждая аналогично видим, что алгебра g имеет тип $sl(2,R)$.

Теорема. *Пусть G — связная трёхмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой имеющей нетривиальный тензор Схоутена — Вейля со свойством $\|SW\|^2 = 0$. Тогда алгебра Ли g группы Ли G изоморфна либо $e(1,1)$, либо $sl(2,R)$.*

3. Левоинвариантные лоренцевы метрики на трёхмерных неунимодулярных группах Ли. Для неунимодулярной алгебры Ли матрица $\|C^{ij}\|$ структурных констант обязательно вырожденная, не симметричная, присоединённая к ней матрица $\|\widetilde{C}_{ks}\|$ симметричная (тождество Якоби).

Лемма. *Существует базис v_1, v_2, v_3 алгебры Ли g, в котором матрица $\|C^{ij}\|$ имеет вид*:

$$C = \begin{bmatrix} C^{11} & C^{12} & 0 \\ C^{21} & C^{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где $C^{12} \neq C^{21}$.

Замечание. Плоскость векторов $\pi = v_1 \wedge v_2$ пересекает изотропный конус либо по вершине, либо касается конуса по прямой, либо пересекает по паре прямых. В зависимости от этого сужение скалярного произведения на плоскость π: А) положительно определено, Б) неотрицательно определено, В) знако-неопределено и невырождено.

В итоге получается:

Теорема. *Пусть G — связная трёхмерная неунимодулярная группа Ли. В случаях* А) *и* Б) *из равенства $\|SW\|^2 = 0$ следует, что все компоненты тензора Схоутена — Вейля равны нулю. В случае* С) *существует бесконечно много левоинвариантных лоренцевых метрик на группе Ли G, для которых $\|SW\|^2 = 0$, а тензор Схоутена — Вейля ненулевой.*

4. Левоинвариантные лоренцевы метрики на шестимерной группе Гейзенберга. Пусть G — группа Гейзенберга размерности 6, т. е. матричная группа вида

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & 1 & 0 & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & 1 & 0 \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & 1 \end{bmatrix} : a_{i,j} \in R \right\}.$$

Алгебра Ли g группы G есть матричная алгебра Ли вида

$$g = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_{2,1} & 0 & 0 & 0 \\ h_{3,1} & h_{3,2} & 0 & 0 \\ h_{4,1} & h_{4,2} & h_{4,3} & 0 \end{bmatrix} : h_{i,j} \in R \right\}.$$

Выберем базис g следующим образом

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ E_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ E_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Известно, что центр этой алгебры порождается вектором E_1, т. е.

$$Z(g) = \{h \in g : \forall r \in g \ \ [h, g] = 0\} = \{E_1\}.$$

Пусть на алгебре g задана лоренцева метрика, т. е. скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ сигнатуры 1. Множество времяподобных векторов (направленных в будущее) образует открытый выпуклый конус $C^+ \subset g$.

Определение. Будем говорить, что левоинвариантная лоренцева метрика на нильпотентной группе принадлежит классу C^+, если центр соответствующей алгебры Ли строго лежит в изотропном конусе метрики.

Теорема. *Пусть на группе Гейзенберга G задана левоинвариантная лоренцева метрика класса C^+. Тогда существует ортонормированный базис V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6 такой, что*

$$\langle V_1, V_1\rangle = -1,\ \langle V_2, V_2\rangle = \langle V_3, V_3\rangle = \ldots = \langle V_6, V_6\rangle = 1,\ \langle V_i, V_j\rangle = 0,\ i \neq j,$$

причем $V_i \in \{E_1, \ldots, E_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, 6$, и справедливы равенства:

$$\begin{array}{rcl} [V_1, V_i] & = & 0,\ i \in \{1, \ldots, 6\}, \\ [V_2, V_6] & = & \mu_1 V_1,\ [V_2, V_i] = 0,\ i \in \{3, \ldots, 6\}, \\ [V_3, V_4] & = & \mu_2 V_1,\ [V_3, V_5] = \mu_3 V_1,\ [V_3, V_6] = \mu_4 V_1, \\ [V_4, V_5] & = & \mu_5 V_1 + \mu_6 V_2,\ [V_4, V_6] = \mu_7 V_1 + \mu_8 V_2, \\ [V_5, V_6] & = & \mu_9 V_1 + \mu_{10} V_2 + \mu_{11} V_3, \end{array} \tag{10}$$

где $\mu_i \in R$, $i = 1, \ldots, 11$, — структурные константы алгебры Ли. Обратно, если дано векторное пространство размерности 6 и для базисных векторов определена скобка Ли с помощью указанных формул, то при условии

$$\mu_1\mu_6 + \mu_2\mu_{11} = 0,\ \mu_1 \neq 0,\ \mu_2 \neq 0,\ \mu_6 \neq 0, \tag{11}$$

эта алгебра изоморфна алгебре Гейзенберга.

Замечание. Для любых констант μ_i, $i = 1, \ldots, 11$, формулы (10) определяют 6-мерную алгебру Ли в том и только в том случае, если выполняется требование (тождество Якоби)

$$\mu_1\mu_6 + \mu_2\mu_{11} = 0. \tag{12}$$

Алгебры Ли, заданные формулами (10), без требования $\mu_1 \neq 0$, $\mu_2 \neq 0$, $\mu_6 \neq 0$ будем называть *специальными 6-мерными алгебрами Гейзенберга.* В дальнейшем всегда предполагается выполнение равенства (12).

Замечание. В условиях теоремы 1 множество левоинвариантных лоренцевых метрик на 6-мерной группе Гейзенберга представляет собой 10-параметрическое семейство метрик.

Применяя формулы Милнора [6] для вычисления тензора кривизны левоинвариантной лоренцевой метрики в построенном базисе (при этом должно выполняться (12)), получим компоненты тензора кривизны.

Скалярная кривизна метрики будет равна

$$Rs = \frac{1}{2}{\mu_5}^2 + \frac{1}{2}{\mu_7}^2 + \frac{1}{2}{\mu_1}^2 - \frac{1}{2}{\mu_6}^2 - \frac{1}{2}{\mu_8}^2 - \frac{1}{2}{\mu_{11}}^2 - \frac{1}{2}{\mu_{10}}^2 + \frac{1}{2}{\mu_9}^2 + \frac{1}{2}{\mu_2}^2 + \frac{1}{2}{\mu_3}^2 + \frac{1}{2}{\mu_4}^2.$$

В случае $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0$, $\mu_5 = 1$, $\mu_6 = \pm 1$, $\mu_7 = \mu_8 = \mu_9 = \mu_{10} = \mu_{11} = 0$ имеем $|W|^2 = 0$. Тензор Вейля при этом не равен нулю, например, $W_{6262} = -1/8$.

Замечание. Данному выбору структурных констант соответствует алгебра Ли, изоморфная прямому произведению трёхмерной алгебры Гейзенберга и трёхмерной коммутативной алгебры.

Список литературы

[1] *Tricerri F., Vanhecke L.* Homogeneous structures on Riemannian manifolds. Cambridge etc.: Cambridge University Press, 1983. (London Mathematical Society Lecture Note Series; 83).

[2] *Yano K.* The theory of Lie derivatives and its applications. Amsterdam: North-Holland Publishing; Groningen: P. Noordhoff; New York: Interscience Publishers, 1957.

[3] *Collinson C. D.* A comment on the integrability conditions of the conformal Killing equation // Gen. Relativity Gravitation. 1989. V. 21, № 9. P. 979–980.

[4] *Reshetnyak Yu. G.* Stability theorems in geometry and analysis. Novosibirsk: Rossiiskaya Akademiya Nauk Sibirskoe Otdelenie, Institut Matematiki, 1996.

[5] *Rodionov E. D., Slavskii V. V.* Conformal deformations of the Riemannian metrics and homogeneous Riemannian spaces // Comment. Math. Univ. Carol. 2002. V. 43, № 2. P. 271–282.

[6] *Milnor J.* Curvature of left invariant metric on Lie groups // Adv. Math. 1976. V. 21. P. 293–329.

Локально конформно однородные псевдоримановы пространства

Е. Д. Родионов [1], *В. В. Славский* [2], *Л. Н. Чибрикова* [3]

Барнаульский государственный педагогический университет,
Югорский государственный университет

В работах [1, 2] изучались локально конформно однородные римановы пространства. Была доказана теорема о том, что любое такое пространство будет либо конформно плоским, либо конформно эквивалентным локально однородному риманову пространству.

В данной работе исследуются локально конформно однородные псевдоримановы пространства, доказывается теорема об их строении. С помощью трёхмерных групп Ли и трёхмерной группы Гейзенберга строятся примеры, показывающие различие между римановым и псевдоримановым случаями для таких пространств.

Список литературы

[1] *Родионов Е. Д., Славский В. В.* // Докл. РАН. 2002. Т. 387, № 3. С. 314–317.

[2] *Rodionov E. D., Slavskii V. V.* // Comment. Math. Univ. Carol. 2002. V. 43, № 2. P. 271–282.

[1]Барнаульский государственный педагогический университет, ул. Молодежная, 55, Барнаул 656031, Россия.

E-mail: rodionov@uni-altai.ru

[2]Югорский государственный университет, ул. Мира, 13, Ханты-Мансийск 628007, Россия.

E-mail: slavsky@uriit.ru

[3]Барнаульский государственный педагогический университет, ул. Молодежная, 55, Барнаул 656031, Россия.

E-mail: chibr@mail.ru

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 02–01–01071), Совета по ведущим научным школам РФ (НШ 311.2003.1), а также грантового центра при Санкт-Петербургском университете (грант Е 02–1.0–120).

Отображения пространства-времени и уровни причинности

А. Н. Романов[1]

Омский государственный университет

В лоренцевой геометрии рассматриваются различные уровни причинности пространства-времени, а также условия, которые должны выполняться для того, чтобы тот или иной уровень причинности конкретного пространства имел бы место. Здесь мы рассмотрим различные виды отображений пространств, а так же связи между видом отображения и причинной структурой пространства-времени. Гомеоморфизм двух многообразий $f\colon M \to M'$ будем называть *хронологическим*, если для любой точки $x \in M$ выполняется равенство $f(I^+_x) = I^+_{f(x)}$. Гомеоморфизм будем называть *причинным*, если для любой точки $x \in M$ выполняется равенство $f(J^+_x) = J^+_{f(x)}$. Здесь I^+_x и J^+_x — хронологическое и причинное будущее точки x соответственно. Имеет место следующее утверждение:

Пусть (M,g), (M',g') — два пространства-времени а $f\colon M \to M'$ — некоторое отображение. Тогда для того чтобы отображение f являлось гладким конформным преобразованием, достаточно выполнения одного из следующих условий.

1) *Пространства (M,g), (M',g') являются различающими, а f является хронологическим гомеоморфизмом.*

2) *Пространства (M,g) и (M',g') являются причинными, не допускают одновременное выполнение явления захвата и явления конечной недостижимости, удовлетворяют условию конечности лоренцева расстояния для всего конформного класса метрик, а f является хронологическим гомеоморфизмом.*

3) *$f\colon M \to M'$ — гомеоморфизм такой, что отображения f и f^{-1} сохраняют направленные в будущее изотропные геодезические.*

4) *Множества J^+_p, J^-_p замкнуты для всех точек $p \in M$ и $p \in M'$, а f является времениподобным гомеоморфизмом.*

5) *Пространства (M,g) и (M',g') не допускают одновременное выполнение явления захвата и явления конечной недостижимости, удовлетворяют условию конечности лоренцева расстояния для всего конформного класса метрик, а f является времениподобнымм гомеоморфизмом.*

---

[1]Омский государственный университет, пр. Мира, 55а, Омск 644077, Россия.
E-mail: romanow@univer.omsk.su

О классах Соболева в областях с гёльдеровыми особенностями

А. С. Романов [1]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Для функций классов Соболева $W_p^1(G)$ полное описание следов на границе нерегулярной области $G \subset R^n$ является весьма сложной задачей.

Однако для областей с гёльдеровыми особенностями на границе некоторые свойства пространства следов, в частности вложения в соответствующие пространства Лебега, удаётся довольно просто получить, используя взаимосвязь между соболевскими классами и введёнными П. Халашем [1] пространствами функций, допускающих описание «липшицевого» типа.

Точки евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ будем записывать в виде $z = (x, y)$, где $x \in \mathbb{R}$ и $y \in \mathbb{R}^{n-1}$. Для произвольного числа $\alpha \in (1, \infty)$ «нулевой» пик порядка α определим условием: $G_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \mid 0 < x < 1,\ |y| < x^\alpha\}$. Число $d = \alpha(n-1)+1$ характеризует асимптотику меры пересечения шара $B(0, r)$ с множеством G_α при $r \to 0$ и в теоремах вложения для нулевых пиков играет роль размерности.

Несложно показать, что при $p > d/n$ для принадлежности функции f пространству $W_p^1(G_\alpha)$ необходимо и достаточно, чтобы при почти всех точек $z_1, z_2 \in G_\alpha$ выполнялась оценка

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leqslant |z_1 - z_2|(g(z_1) + g(z_2)), \tag{1}$$

где функция $g \in L_p(G_\alpha)$.

При меньших показателях p получить липшицеву оценку относительно стандартной евклидовой метрики не удается. Однако при $p > \frac{d}{d-\alpha+1}$ для произвольной функции $f \in W_p^1(G_\alpha)$ при почти всех $z_1, z_2 \in G_\alpha$ выполняется оценка

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leqslant \rho(z_1, z_2)(h(z_1) + h(z_2)), \tag{2}$$

где $\rho(z_1, z_2) = \sqrt{|x_1 - x_2|^{2\alpha} + |y_1 - y_2|^2}$, а функция $h \in L_s(G_\alpha)$ при $\frac{1}{s} > \frac{1}{p} + \frac{\alpha-1}{d}$.

Обозначим через σ сужение $(n-1)$-мерной меры Лебега на ∂G_α.

---

[1]Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск 630090, Россия.

E-mail: asrom@math.nsc.ru

Работа поддержана грантами РФФИ 02–01–01009 и НШ–311.2003.1.

Из неравенств (1), (2) и теоремы 3 работы [2] непосредственно следует, что следы функций пространства Соболева $W_p^1(G_\alpha)$ лежат в пространстве Лебега $L_q(\partial G_\alpha, \sigma)$, где

1) $q = \infty$ при $p > d$;

2) $q < \infty$ при $p = d$;

3) $q < p\frac{d-\alpha}{d-p}$ при $\frac{d}{d-\alpha+1} < p < d$.

При этом оператор, сопоставляющий функции её след на границе области, будет компактным, как оператор, действующий из пространства Соболева $W_p^1(G_\alpha)$ в пространство Лебега $L_q(\partial G_\alpha, \sigma)$.

При показателях $p < \frac{d}{d-\alpha+1}$ следы функций классов Соболева $W_p^1(G_\alpha)$ лежат в весовых лебеговских пространствах на границе области.

Список литературы

[1] *Hajlasz P.* Sobolev spaces on an arbitrary metric space // Potential Anal. 1996. V. 5, № 4. P. 403–415.

[2] *Романов А. С.* О теоремах вложения для обобщённых пространств Соболева // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4. С. 931–937.

Системы дифференциальной геометрии и теории упругости

Н. Н. Романовский [1]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Пусть Q — однородный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, с конечномерным ядром, порядка k, действующий на m-вектор-функции.

В работе выведено интегральное представление типа Соболева, см. [1, 2] через оператор Q:

$$u(x) = P_{Q,\varphi}u(x) + \int\limits_{\Omega} K_{Q,\varphi}(x,y)Qu(y)\,dy, \tag{1}$$

где $u \in W_p^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$, область Ω звёздна относительно шара B, $1 < p < \infty$, $P_{Q,\varphi}$ — ограниченный проекционный оператор на ядро Q, ядро $K_{Q,\varphi}(x,y)$ удовлетворяет тем же свойствам что ядро в интегральном представлении Соболева через производные порядка k.

Примерами таких операторов являются

$$Q_1 u = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T), \quad u \in W_p^1(\Omega, \mathbb{R}^n),$$

$$Q_2 u = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T) - \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(\nabla u), \quad u \in W_p^1(\Omega, \mathbb{R}^n).$$

С помощью формулы (1) в настоящей работе исследованы свойства решений ряда систем квазилинейных и нелинейных уравнений в частных производных, в том числе системы

$$\sqrt{\nabla u(x)(\nabla u)^T(x)} = R(x), \quad u \in W_p^1(\Omega, \mathbb{R}^n), \tag{2}$$

определяющей деформацию по тензору деформации, возникающей в теории упругости и дифференциальной геометрии, см. [3, 4]. А также системы

$$\frac{\sqrt{\nabla u(x)(\nabla u)^T(x)}}{|\det(\nabla u(x))|^{\frac{1}{n}}} = R(x), \quad u \in W_p^1(\Omega, \mathbb{R}^n), \tag{3}$$

[1]Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск 630090, Россия.

E-mail: nnrom@math.nsc.ru

При частичной поддержке РФФИ и гранта Президента РФ.

возникающей в теории квазиконформных отображений.

Определим норму

$$\|u\|_{L_{(1)}(\Omega)} = \frac{\|u\|_{L_2(\Omega)}}{2!} + \frac{\|u\|_{L_3(\Omega)}}{3!} + \ldots + \frac{\|u\|_{L_k(\Omega)}}{k!} + \ldots .$$

Теорема. *Пусть область Ω звёздна относительно шара и ограничена. Пусть правая часть $R(x)$ системы (2) принадлежит пополнению множества $\{u \in C^\infty(\Omega) \mid \|u\|_{L_{(1)}(\Omega)} < \infty\}$ по норме $\|u\|_{L_{(1)}(\Omega)}$, причём $\|R - E\|_{L_{(1)}(\Omega)} < \epsilon$. Предположим, что $R(x)$ также удовлетворяет условию совместности, см.* [1]. *Пусть $P_{Q_1,\varphi}(\mathrm{Id}) = 0$. Тогда для любого отображения $h \in \ker Q_1$ такого, что $\|h\| < \delta$, существует единственное решение $u \in W_2^1(\Omega)$ системы (2), удовлетворяющее условию $P_{Q_1,\varphi}u = h$. Причём выполняется неравенство*

$$\|\nabla u - E\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C\|R - E\|_{L_{(1)}(\Omega)}. \tag{4}$$

Аналогичное утверждение доказано для системы (3).

Неравенство (4) даёт новые оценки устойчивости класса изометрий, см. [2, 3].

Список литературы

[1] *Romanovskiy N.* Systems of elasticity theory. Potsdam, 2004. (Preprint/ Potsdam Univ.).

[2] *Решетняк Ю. Г.* Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. Новосибирск: Изд-во Ин-та матем. СО РАН, 1996.

[3] *John F.* Rotation and strain // Comm. Pure Appl. Math. 1961. V. 14, № 3. P. 391–413.

[4] *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости. М.: ОГИЗ Гостехиздат, 1948.

Нормальные семейства пространственных отображений

В. Рязанов [1], *Е. Севостьянов* [2]

Институт прикладной математики и механики

Работа посвящена исследованию так называемых Q-гомеоморфизмов, введённых недавно профессором Олли Мартио. Теория Q-гомеоморфизмов играет важную роль при изучении современных классов отображений, в частности, отображений с конечным искажением, которые интенсивно исследуются в работах ведущих специалистов по теории отображений, таких как Фредерик Геринг, Карри Астала, Тадеуш Иванец, Пекка Коскела, Гавен Мартин, Юха Хейнонен и многих других.

Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и $Q\colon D \to [1,\infty]$ — измеримая по Лебегу функция. Говорят, что гомеоморфизм $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является ***Q-гомеоморфизмом***, если $M(f\Gamma) \leqslant \int\limits_D Q(x)\rho^n(x)\,dm(x)$ для любого семейства Γ путей γ в D и для каждой допустимой функции $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$.

Следуя работе Игнатьева — Рязанова (2002), мы говорим, что функция $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание* в точке $x_0 \in D$, $\varphi \in FMO(x_0)$, если $\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}}\, \dfrac{1}{|B(x_0,\varepsilon)|} \int\limits_{B(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \overline{\varphi}_\varepsilon|\,dm(x) < \infty$, где $\overline{\varphi}_\varepsilon$ обозначает среднее интегральное значение φ над шаром $B(x_0,\varepsilon)$. Мы также говорим, что функция $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$ *конечного среднего колебания в области* D, $\varphi \in FMO(D)$, или просто $\varphi \in FMO$, если φ имеет конечное среднее колебание в каждой точке $x_0 \in D$. FMO является естественным обобщением BMO, класса функций ограниченного среднего колебания по Джону — Ниренбергу.

Пусть $F_{Q,\delta}$ — класс всех Q-гомеоморфизмов $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, таких, что $h(\mathbb{R}^n \backslash f(D)) \geqslant \delta > 0$, где h обозначает сферическое (хордальное) расстояние в $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \bigcup \{\infty\}$.

Теорема 1. *Если $Q \in FMO$, то класс $F_{Q,\delta}$ образует нормальное семейство отображений.*

---

[1]Институт прикладной математики и механики, Розы Люксембург, 74, Донецк 83114, Украина.
E-mail: ryaz@iamm.ac.donetsk.ua

[2]Институт прикладной математики и механики, Розы Люксембург, 74, Донецк 83114, Украина.
E-mail: sevostyanov@skif.net

Следствие 1. *Класс* $F_{Q,\delta}$ *нормален, если условие*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\frac{1}{|B(x_0,\varepsilon)|}\int\limits_{B(x_0,\varepsilon)} Q(x)\,dm(x)<\infty$$

имеет место для любого $x_0\in D$, *где* $B(x_0,\varepsilon)=\{x\in\mathbb{R}^n:|x-x_0|<\varepsilon\}$.

Теорема 2. *Класс* $F_{Q,\delta}$ *нормален, если условие расходимости интеграла* $\int\limits_0^{\delta(x_0)}\dfrac{dr}{rq_{x_0}^{\beta}(r)}=\infty$ *при некотором* $\beta\geqslant 1/(n-1)$ *и, в частности, при* $\beta=1$ *выполнено в каждой точке* $x_0\in D$, *где* $q_{x_0}(r)$ — *среднее значение* $Q(x)$ *на сфере* $|x-x_0|=r$.

Следствие 2. *Класс* $F_{Q,\delta}$ *нормален, если* $Q(x)$ *имеет во всех точках области* D *логарифмические особенности порядка не выше* $n-1$, *т. е., если* $Q(x)=O\left(\left[\log\frac{1}{|x-x_0|}\right]^{n-1}\right)$ *при* $x\to x_0$ *для любого* $x_0\in D$.

Замечание. В работе формулируется целый ряд других условий нормальности классов отображений. В частности, сформулированные результаты имеют место для гомеоморфизмов класса Соболева $W^{1,n}_{\rm loc}$ с $f^{-1}\in W^{1,n}_{\rm loc}$ при условии, что почти всюду $K_I(x,f)\leqslant Q(x)$, где $K_I(x,f)$ — внутренняя дилатация отображения f в точке $x_0\in D$. Известно, что $f^{-1}\in W^{1,n}_{\rm loc}$ для гомеоморфизмов класса $W^{1,n}_{\rm loc}$ при $K_I(x,f)\in L^1_{\rm loc}$.

Вокруг доказательства леммы Лежандра — Коши о выпуклых многоугольниках

И. Х. Сабитов [1]

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Во всех известных доказательствах леммы Лежандра — Коши о сравнении расстояний между концевыми вершинами двух выпуклых изометричных ломаных (при условии, что внутренние углы в одной ломаной не меньше соответствующих углов в другой ломаной) отдельно рассматривается случай, когда традиционно вводимая попытка увеличения угла в одной ломаной до значения соответствующего угла в другой ломаной приводит к потере выпуклости. Мы вводим в рассмотрение функцию, равную квадрату расстояния между концевыми вершинами ломаных, и зависящую от внутренних углов ломаной (при известных и фиксированных значениях длин сторон ломаной) и изучаем возможность перехода от одной ломаной к другой с монотонным изменением этой функции. Оказывается, если требовать, чтобы углы ломаных продолжали удовлетворять начальным неравенствам, то в общем случае такой переход в классе выпуклых ломаных невозможен, что и объясняет неизбежность потери выпуклости в традиционных рассмотрениях. Мы показываем, что при условии отказа от выполнения каких бы то ни было условий на углы любые две выпуклые изометричные и одинаково ориентированные ломаные наложимы друг на друга (т. е. переводятся друг в друга изгибанием) в классе выпуклых ломаных.

[1]Механико-математический фак-т МГУ им. М. В. Ломоносова, Ленинские Горы, Москва 119992 ГСП-2, Россия.

E-mail: isabitov@mail.ru

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке по гранту РФФИ 02–01–00101 и по гранту Минобразования Е 02–1.0–43.

Теоремы вложения на двуступенчатых группах Карно

Е. А. Саженкова [1]

Новосибирский государственный университет

Исследуется проблема вложения функциональных пространств Соболева, заданных на областях двуступенчатых групп Карно. Двуступенчатые группы Карно — это связные односвязные нильпотентные группы Ли, алгебры Ли V которых градуированы, т. е. $V = V_1 \oplus V_2$, где $\dim V_1 = n_1 \geqslant 2$, $[V_1, V_1] = V_2$, $[V_1, V_2] = 0$. Метрика задается следующим образом: $\rho(x, y) = |x^{-1} \cdot y|$, где $|(x', x'')| = (|x'|^4 + |x''|^2)^{1/4}$ ($|\cdot|$ — евклидова норма). Пространство Соболева $W_p^k(\Omega)$ состоит из суммируемых на Ω функций, имеющих обобщённые производные вдоль горизонтальных векторных полей и конечную норму $\|f\|_{W_p^k(\Omega)} = \|f\|_{L_p(\Omega)} + \sum\limits_{|\alpha|_h = k} \|X^\alpha f\|_{L_p(\Omega)}$. Будем говорить, что область $\Omega \subset \mathbb{G}^{n+m}$ удовлетворяет *условию конуса* с постоянной $R > 0$, если для каждой точки $x \in \Omega$ найдется шар $B_x \subset \Omega$ такой, что конус $\{x \cdot \delta_t(x^{-1} \cdot y) \mid y \in \overline{B}_x,\ 0 < t \leqslant 1\}$ содержится в области Ω, причём радиусы шаров B_x ограничены в совокупности снизу положительной постоянной R. Любая область с границей класса C^2 удовлетворяет условию конуса. Мы выводим интегральные представления функций и применяем их для доказательства теорем вложения: *пусть $p > 1$, тогда имеют место следующие вложения функциональных пространств*: $W_p^k(\Omega) \subset L_{\frac{\nu p}{\nu - kp}}(\Omega)$, если $p < \nu/k$, $W_p^k(\Omega) \subset L_M(\Omega)$, если $p = \nu/k$, $W_p^k(\Omega) \subset C(\Omega)$, если $p > \nu/k$, при условии, что $\Omega \subset \mathbb{G}^{n+m}$ — ограниченная область, удовлетворяющая условию конуса; μ есть некоторая мера на $\mathbb{G}^{n+m}$, причём $\mu(B(R)) \leqslant CR^s$, где $B(R)$ — шар во введённой метрике радиуса R. В случае $\mathbb{G}^{n+m} = \mathbb{R}^n$ (группы Гейзенберга) полученные результаты совпадают с теоремами вложения Соболева [1] (Н. Н. Романовским [2]).

Список литературы

[1] *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

[2] *Романовский Н. Н.* Интегральные представления и теоремы вложения для функций, заданных на группах Гейзенберга // Докл. РАН. 2002. Т. 382, № 4. С. 456–459.

[1] Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090, Россия.

Работа выполнена при частичной поддержке программы Университеты России, грант У–02–1.0–27, и Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых российский ученых и ведущих научных школ РФ (грант НШ 311.2003.1).

Изопериметрическая монотонность L^p-нормы функции напряжения плоской конечносвязной области

Р. Г. Салахудинов [1]

Казанский государственный университет,
Научно-исследовательский институт математики и механики
им. Н. Г. Чеботарева

Пусть G — $(n+1)$-связная область на плоскости, причем внутренние компоненты границы $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ ограничивают области ненулевой площади. Через Γ_0 обозначим внешнюю компоненту ∂G. Функцией напряжения $u(x,G)$ области G называют решение следующей краевой задачи:

$$\triangle u = -1 \text{ в } G; \quad u = 0 \text{ на } \Gamma_0; \quad u = c_i \text{ на } \Gamma_i, \quad i = \overline{1,n},$$

где константы c_i определяются из условий $\oint\limits_{\Gamma_i} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = a_i$, $i = \overline{1,n}$. Здесь a_i — площадь области, ограниченной Γ_i, $x \in G$.

Функция напряжения и различные функционалы области, построенные при помощи функции напряжения, — классические объекты математической физики. Наиболее важными физическими функционалами являются жесткость кручения $P(G) := 4 \iint\limits_G u(x,G)\, dA + 4 \sum\limits_{i=1}^{n} c_i a_i$ и максимум функции напряжения $u(G) := \sup\limits_{x \in G} u(x,G)$. Классические изопериметрические неравенства были получены Г. Полия, А. Ванштейном, Л. Е. Пейном и др. (см. [1, 2]). Одним из основных результатов работы является доказательство того, что ряд классических неравенств является следствием изопериметрической монотонности L^p-норм функции напряжения. Приведём одно из утверждений.

Теорема. а) *Пусть* $\|u(x,G)\|_p < \infty$, *тогда* $\dfrac{\|u(x,G)\|_{p'}}{\|u(x,G)\|_{p''}} < \dfrac{\|u(x,R_1)\|_{p'}}{\|u(x,R_1)\|_{p''}}$, *где* $p' \geqslant p \geqslant p'' \geqslant 0$ $(p' > p'')$, R_1 — *круговое кольцо, такое, что площадь внутреннего круга равна* $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, *а радиус внешнего круга однозначно определяется из условия* $\|u(x,R_1)\|_p = \|u(x,G)\|_p$.

[1] Казанский государственный университет, ул. Кремлевская, 18, Казань 420008, Россия.

E-mail: Rustem.Salahudinov@ksu.ru

Работа поддержана РФФИ (проект № 02–01–00168) и программой «Университеты России».

b) *Пусть* $\|u^{-1}(x,G)\|_p < \infty$, *тогда* $\dfrac{\|u^{-1}(x,G)\|_{p'}}{\|u^{-1}(x,G)\|_{p''}} < \dfrac{\|u^{-1}(x,R_2)\|_{p'}}{\|u^{-1}(x,R_2)\|_{p''}}$, *где* $0 \leqslant p' \leqslant p \leqslant p'' < 1$ $(p' < p'')$, R_2 — *круговое кольцо, такое, что площадь внутреннего круга равна* $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, *а радиус внешнего круга однозначно определяется из условия* $\|u^{-1}(x,R_2)\|_p = \|u^{-1}(x,G)\|_p$.

Получены также новые изопериметрические неравенства для L^p-норм функции напряжения, содержащие два числовых параметра.

Список литературы

[1] *Полиа Г., Сегё Г.* Изопериметрические неравенства математической физики. М.: Физматгиз, 1962.

[2] *Bandle C.* Isoperimetric inequalities and applications. Boston: Pitman (Advanced Publishing Program), 1980. (Monographs and Studies in Mathematics; 7).

Discreteness Criteria for the Spectra of the Elliptic Operators on Quasimodel Manifolds

A. V. Svetlov [1]
Volgograd State University

We investigate the dependence of the spectrum of the elliptic partial differential operator on the metric of a manifold. We consider a complete noncompact Riemannian manifold M without boundary which is representable as $B \cup D$, where B is a closed set and D is isometric to the product $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_2 \times \ldots \times \mathbb{S}_k$ (where $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ and $\mathbb{S}_i$ are compact Riemannian manifolds without boundary) with metric $ds^2 = dr^2 + q_1^2(r)\, d\theta_1^2 + \ldots + q_k^2(r)\, d\theta_k^2$, where $d\theta_i^2$ is the metric on $\mathbb{S}_i$ and $q_i(r)$ is a smooth positive function on $\mathbb{R}_+$. We assume $\dim \mathbb{S}_i = n_i$ and denote $s(r) = q_1^{n_1}(r) \ldots q_k^{n_k}(r)$. The manifold M is called a manifold with end. Since its end D is a simple warped product, M is the simplest case of a quasimodel manifold. On the manifold M we study the Laplace–Beltrami operator

$$-\Delta = -\mathrm{div}\nabla \tag{1}$$

and the Schrödinger operator

$$-\Delta = -\mathrm{div}\nabla + c(r), \tag{2}$$

where function $c(r)$ is bounded from below by some constant.

Theorem 1. *The spectrum of the Laplace–Beltrami operator* (1) *on the manifold M is discrete if and only if one of the following conditions is satisfied*:

$$V(D) < \infty \quad \textit{and} \quad \lim_{r\to\infty} \frac{V(D \setminus B(r))}{S(B(r))} = 0, \qquad \textit{or}$$
$$V(D) = \infty \quad \textit{and} \quad \lim_{r\to\infty} \frac{V(B(r))}{S(B(r))} = 0.$$

Now we denote $F(r) = c(r) + \left(\frac{s'(r)}{2s(r)}\right)' + \left(\frac{s'(r)}{2s(r)}\right)^2$.

Theorem 2. *If $F(r) > -K$ ($K = \mathrm{const}$), the spectrum of the Schrödinger operator* (2) *on the manifold M is discrete if and only if* $\lim\limits_{r\to\infty} \int\limits_r^{r+\omega} F(r)dr = +\infty$ *for all $\omega > 0$.*

---

[1] Volgograd State University, pr. Universitetskiy, 30, Volgograd 400062, Russia.
E-mail: andrew.svetlov@volsu.ru
The research was supported by RFBR grant No 03–01–00304.

Obstructions to Geometrization of Generalized Graph Manifolds

P. V. Svetlov [1]

Steklov Institute of Mathematics at S.-Petersburg

An n-dimensional manifold M ($n \geqslant 3$) is called *generalized graph manifold* if it is glued of blocks that are trivial bundles of $(n-2)$-tori over compact surfaces (of negative Euler characteristic) with boundary (see [1]). Each block $M_i \simeq T^{n-2} \times S_i$ admits a geometric structure modelled on $\mathbb{E}^{n-2} \times H^2$. We say that M *admits a geometrization* if we can choose the geometric structures on its blocks in a such way that all gluing maps were isometries.

In [2] B. Leeb proved that each 3-dimensional graph manifold with boundary admits a geometrization.

In my talk I will present a 5-dimensional graph manifold with boundary which admits no geometrization. The 4-dimensional case will be discussed as well.

References

[1] *Buyalo S., Kobel'skii V.* Generalized graphmanifolds of nonpositive curvature // St. Petersburg Math. J. 2000. V. 11, n 2. P. 251–268.

[2] *Leeb B.* 3-manifolds with(out) metrics of nonpositive curvature // Invent. Math. 1995. V. 122. P. 277–289.

[1] Steklov Institute of Mathematics at S.-Petersburg, Fontanka, 27, S.-Petersburg 191023, Russia.

E-mail: svetlov@pdmi.ras.ru

Подмногообразия в пространстве Шоттки и Тейхмюллера, связанные с двупорождёнными группами конформных автоморфизмов

О. А. Сергеева [1]

Кемеровский государственный университет

Фиксируем произвольную отмеченную компактную риманову поверхность $\left[F_0, \{a_k, b_k\}_{k=1}^h\right]$ рода $h \geqslant 2$, где $\{a_k, b_k\}_{k=1}^h$ — каноническое рассечение на F_0 такое, что $a_k \cap b_k = O_0 \in F_0$, $k = 1, \ldots, h$. Будем обозначать через N_σ наименьшую нормальную подгруппу в фундаментальной группе $\pi_1(F_0, O_0) = \left\langle a_1, b_1, \ldots, a_h, b_h : \prod\limits_{j=1}^{h} [a_j, b_j] = 1 \right\rangle$, содержащую гомотопические классы путей b_1, b_2, $\ldots$, b_g, $[a_{g+1}, b_{g+1}]$, $[a_{g+2}, b_{g+2}]$, $\ldots$, $[a_{g+s}, b_{g+s}]$, $\prod\limits_{j=1}^{i_1} [a_{g+s+j}, b_{g+s+j}]$, $\ldots$, $\prod\limits_{j=1}^{i_p} [a_{h-i_p+j}, b_{h-i_p+j}]$, где $[a_j, b_j] = a_j b_j a_j^{-1} b_j^{-1}$, а $\sigma = (g, s, i_1, \ldots, i_p)$ — фиксированный упорядоченный набор неотрицательных целых чисел, удовлетворяющих условиям: $i_k \neq 1$, $k = 1, \ldots, p$, и $g + s + i_1 + \ldots + i_p = |\sigma| = h$. Клейнова группа $G_\sigma \cong \pi_1(F_0, O_0)/N_\sigma$, соответствующая подгруппе N_σ и имеющая алгебраическое представление $G_\sigma = \left\langle T_1, \ldots, T_g, U_1, V_1, \ldots, U_{h-g}, V_{h-g} : [U_1, V_1] = \ldots = [U_s, V_s] = \prod\limits_{j=1}^{i_1} [U_{s+j}, V_{s+j}] = \prod\limits_{j=1}^{i_2} [U_{s+i_1+j}, V_{s+i_1+j}] = \ldots = \prod\limits_{j=1}^{i_p} \left[U_{s+\sum\limits_{n=1}^{p-1} i_n + j}, V_{s+\sum\limits_{n=1}^{p-1} i_n + j} \right] = \mathbf{1} \right\rangle$, где $[U_k, V_k] = U_k V_k U_k^{-1} V_k^{-1}$, а $\mathbf{1}$ — тождественное преобразование $\overline{\mathbb{C}}$, будет отмеченной группой Кёбе сигнатуры σ. Эта группа является свободным произведением отмеченной EST-группы типа (g, s) и p отмеченных фуксовых групп $G_\sigma = G_{g,s} * G_{i_1} * G_{i_2} * \ldots * G_{i_p}$.

Через Θ_σ будем обозначать группу гомеоморфизмов ψ поверхности F_0 на себя таких, что:

1) $\psi(O_0) = O_0$,

2) автоморфизм $\pi_1(F_0, O_0)$, индуцированный ψ, является автоморфизмом N_σ,

---

[1] Математический факультет, Кемеровский государственный университет, ул. Красная, 6, Кемерово 650043, Россия.
E-mail: Okoin@yandex.ru

3) группы Кёбе G_σ и $G_{\sigma,\psi}$, униформизирующие поверхность F_0, совпадают как отмеченные группы, т. е. $T_{j,\psi} = T_j$, $U_{i,\psi} = U_i$, $V_{i,\psi} = V_i$, $j = 1, \ldots, g$, $i = 1, \ldots, h - g$, где $G_{\sigma,\psi}$ получается с помощью группы $\psi(N_\sigma)$, как G_σ по N_σ.

Пространство Q_σ представляет собой множество упорядоченных наборов комплексных чисел (модулей), с которыми отождествляются нормированные упорядоченные наборы образующих отмеченных групп Кёбе сигнатуры σ. По классификации Маскита униформизация римановых поверхностей, связанная с неразветвленными плоскими регулярными накрытиями с определяющей подгруппой N_σ, исчерпывается группами Кёбе. Для упрощения технической стороны работы и возможности выписать явные координаты в пространстве групп, униформизирующих отмеченные компактные римановы поверхности, в качестве последних рассматриваются отмеченные EST-группы, как частный случай групп Кёбе сигнатуры σ (когда $p = 0$).

Пусть F — компактная риманова поверхность рода $h \geqslant 2$, допускающая два конформных автоморфизма (и группу ими порожденную):

— W простого порядка $N \geqslant 2$, не имеющий неподвижных точек на F,

— M порядка 2 с $2k$, $k \geqslant 2$, неподвижными точками на F, причём $WM = MW$ и $N|k$.

Множество компактных римановых поверхностей F рода $h \geqslant 2$, допускающих только два таких конформных автоморфизма W и M, будем обозначать через $M^*_{\widetilde{h},2k}$, а через $M_{\widetilde{h},2k}$ — соответствующее ему подмножество в пространстве Тейхмюллера $\mathbb{T}_h = \mathbb{T}_h(F_0)$. Здесь $\widetilde{h}$ — род фактор-поверхности $F/\langle W, M\rangle$, а $\langle W, M\rangle$ — группа, порождённая автоморфизмами W и M. Значение $\widetilde{h}$ можно определить из соотношения Римана — Гурвица.

Определение. Две отмеченные поверхности (поверхности Тейхмюллера) $[F, \alpha]$ и $[F^*, \alpha^*]$ рода h называются (W, M)-эквивалентными, если $F, F^* \in M^*_{\widetilde{h},2k}$ и гомеоморфизм $f\colon [F, \alpha] \to [F^*, \alpha^*]$ гомотопен двум композициям $W^* f W^{-1}$ и $M^* f M^{-1}$, где $f \in \alpha^* \alpha^{-1}$, α и α^* — гомотопические классы гомеоморфизмов (отмечания) из F_0 на F и F^* соответственно.

В [1] доказано, что существует непрерывное отображение $\Phi_\sigma\colon \mathbb{T}_h \to Q_\sigma$, где $h = |\sigma|$.

Теорема 1. 1) *Множество $M_{\widetilde{h},2k}$ является замкнутым комплексно-аналитическим подмногообразием в $\mathbb{T}_h$ комплексной размерности $3\widetilde{h} - 3 + 2m$, ($m = k/N$), состоящим из счётного числа изолированных попарно гомеоморфных компонент.*

2) *Множество* $Q^{2k}_{\widetilde{h}} = \Phi_\sigma(M_{\widetilde{h},2k})$ *является замкнутым комплексно-аналитическим многообразием комплексной размерности* $3\widetilde{h} - 3 + 2m$, *состоящим из счётного числа изолированных попарно гомеоморфных компонент.*

Теорема 2. *Многообразие* $Q^{2k}_{\widetilde{h}}$ *является комплексно-аналитическим подмногообразием комплексной размерности* $3\widetilde{h} - 3 + 2m$ *в многообразии* $Q_\sigma \subset \mathbb{C}^{3h-3}$, *где* $\sigma = (N(2g+m)+1, 2Ns, 0, \ldots, 0)$, $h = |\sigma|$.

Пусть теперь F — компактная риманова поверхность рода $h \geqslant 2$, допускающая следующие два конформных автоморфизма:

— P порядка $N_1 \geqslant 2$ с двумя неподвижными точками на F,

— M порядка 2 с $2k$, $k \geqslant 2$, неподвижными точками на F, две из которых являются неподвижными точками для P, причём $P^l = M$ и, следовательно, $N_1 = 2l$, $l \in \mathbb{N}$.

Аналогично будем обозначать через $M^1_{\widetilde{h},2k}$ подмножество в пространстве Тейхмюллера $\mathbb{T}_h$, состоящее из отмеченных компактных римановых поверхностей рода $h \geqslant 2$, допускающих группу конформных автоморфизмов, порождённую автоморфизмами P и M.

Теорема 3. 1) *Множество* $M^1_{\widetilde{h},2k}$ *является замкнутым комплексно-аналитическим подмногообразием в* $\mathbb{T}_h$ *комплексной размерности* $3\widetilde{h}+2m-1 = 3\widetilde{h} - 3 + (2m+2)$, $m = (k-1)/l$, *состоящим из счётного числа изолированных попарно гомеоморфных компонент.*

2) *Множество* $Q^{2k}_{\widetilde{h},1} = \Phi_\sigma(M^1_{\widetilde{h},2k}) \subset Q_\sigma$ *является замкнутым комплексно-аналитическим подмногообразием комплексной размерности* $3\widetilde{h} + 2m - 1$, *состоящим из счётного числа изолированных попарно гомеоморфных компонент.*

Список литературы

[1] *Чуешев В. В.* Пространства компактных римановых поверхностей и групп Кёбе // Сиб. мат. журн. 1981. Т. 22, № 5. С. 190–205.

Геометрия солитонных уравнений спиновых систем и мембраны

Н. С. Серикбаев [1], *Ф. К. Рахимов* [2], *Р. Мырзакулов* [3]

Физико-технический институт, Алматы, Казахстан

Существует глубокая связь между геометрией кривых, поверхностей, многообразии и интегрируемыми дифференциальными уравнениями в частных производных. Последние известны также под названием солитонные уравнения. Важным с точки зрения математики и физики подклассом солитонных уравнений являются спиновые системы, которые задаются различными уравнениями типа Ландау — Лифшица [1–5]. В данной работе нами построены интегрируемые классы кривых и поверхностей, заданные уравнениями Френе, уравнениями Гаусса — Вейнгартена и Майнарди — Кодацци. Они индуцированы различными интегрируемыми обобщёнными уравнениями Ландау — Лифшица, в том числе с самосогласованными потенциалами. Установлена связь полученных результатов с уравнениями движения мембраны на $AdS_p \times S^q$.

Список литературы

[1] *Мырзакулов Р., Рахимов Ф. К.* Солитонная теория магнетизма и дифференциальная геометрия. Алматы: Наука, 2003.

[2] *Мырзакулов Р.* Спиновые системы и солитонная геометрия. Алматы: Наука, 2001.

[3] *Serikbaev N. S., Myrzakul Kur., Rahimov F. K., Myrzakulov R.* In: Nonlinear waves: Classical and Quantum Aspects. Eds. F. Kh. Abdullaev, V. V. Konotop. London: Kluwer, 2004. P. 535–542.

[4] *Rahimov F. K., Myrzakul Kur., Serikbaev N. S., Myrzakulov R.* In: Nonlinear waves: Classical and Quantum Aspects. Eds. F. Kh. Abdullaev, V. V. Konotop. London: Kluwer, 2004. P. 543–547.

[5] *Серикбаев Н. С., Мырзакулов Р. и др.* О некоторых нелинейных моделях магнетиков. Дубна, 2003. (Препринт/ОИЯИ, Р17–2003–171).

[1] Физико-технический институт, ул. Ибрагимова, 11, Алматы 480082, Казахстан. E-mail: cnlpmyra@satsun.sci.kz

[2] Физико-технический институт, ул. Ибрагимова, 11, Алматы 480082, Казахстан. E-mail: cnlpmyra@satsun.sci.kz

[3] Физико-технический институт, ул. Ибрагимова, 11, Алматы 480082, Казахстан. E-mail: cnlpmyra@satsun.sci.kz

Convex Integration for Elliptic Systems

Laszlo Szekelyhidi [1]

Max-Planck-Institute for Mathematics in the Sciences

Recently Gromov's method of convex integration has been adapted and intensely studied as a method for finding weak solutions to differential inclusions. These solutions usually have very low regularity properties, and in particular convex integration led to surprising counterexamples to regularity in elliptic systems, namely the existence of Lipschitz but nowhere C^1 solutions to certain strongly elliptic systems. Whether such solutions can be constructed depends on algebraic and combinatorial properties of a certain set of matrices naturally associated with the equation, and ultimately one needs to consider generalized notions of convexity, in particular rank-one convexity in the space of matrices.

[1] Max-Planck-Institute for Mathematics in the Sciences, Inselstrasse 22, D–04103 Leipzig, Germany.

E-mail: szekelyhidi@gawab.com

О функциях с заданными интегральными средними по гиперболическим прямоугольникам

В. Е. Силенко [1]

Донецкий государственный университет экономики и торговли

Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $G = \mathbf{Aut}(D)$ — группа конформных автоморфизмов D. Разложение Ивасавы группы G имеет вид $G = KAN$, где $K = \mathbf{SO}(2)$, $A = \left\{a_t = \left(\begin{smallmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{smallmatrix}\right) : t \in \mathbb{R}\right\}$, $N = \left\{n_s = \left(\begin{smallmatrix} 1+is & -is \\ is & 1-is \end{smallmatrix}\right) : s \in \mathbb{R}\right\}$ (см., например, [3, с. 92]).

Рассмотрим следующую задачу. Пусть $f \in C(D)$ и для некоторой кусочно-гладкой замкнутой кривой $\gamma \subset D$

$$\int\limits_{g\gamma} f(z)\,dz = 0, \quad g \in G. \tag{1}$$

Следует ли отсюда, что f голоморфна в D? В общем случае ответ отрицательный (см., например, [2]), но при некоторых дополнительных предположениях голоморфность f имеет место. Одним из таких предположений является условие $f \in L^2(D)$, полученное М. Л. Аграновским в [1, теорема 1]. Это условие, являясь весьма общим, неточно для некоторых конкретных контуров. Например в случае, когда γ — окружность, неулучшаемые условия получены В. В. Волчковым в [2, теорема 1].

В данной работе в качестве контура γ рассматривается граница гиперболического прямоугольника $Q_\alpha = \{z = n_s a_t \cdot 0 : 0 \leqslant s \leqslant \alpha,\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ ($\alpha > 0$). Условие (1) ослабляется: оно предполагается выполненным лишь для g из подгруппы NA. При этом показано, что условие $f \in L^2(D)$ из [1], накладывающее ограничения на поведение функции вблизи всей границы круга D, можно заменить ограничениями на рост функции лишь в одной точке границы ∂D (см. также [4]).

Обозначим $\Lambda_\kappa = \{n_s a_t \cdot 0 : \kappa \leqslant s \leqslant \kappa + 1,\ t \geqslant 0\}$; $\Theta_\tau = \{n_s a_t \cdot 0 : s \in \mathbb{R},\ \tau \leqslant t \leqslant \tau + 1\}$.

Теорема. *Пусть $f(z) \in C(D)$, и для некоторого $\alpha > 0$ и всех $g \in NA$*

$$\int\limits_{\partial(gQ_\alpha)} f(z)\,dz = 0.$$

[1] А/я 7886, Донецк 83064, Украина.
E-mail: V.Silenko@bk.ru

Тогда если

1) $f(z) = o\left(\frac{1}{1-|z|}\right)$, $z \to 1$ *по гиперболическим прямым*;

2) $f(z) = o\left(\frac{1}{1-|z|}\right)$, $z \to 1$ *по орициклам*;

3) $\forall \kappa \in \mathbb{R}$ $f(z) = O\left(\frac{1}{1-|z|}\right)$, $z \to 1$, $z \in \Lambda_\kappa$;

4) $\forall \tau \in \mathbb{R}$ $f(z) = O\left(\frac{1}{1-|z|}\right)$, $z \to 1$, $z \in \Theta_\tau$

то $f(z)$ *голоморфна в* D.

Список литературы

[1] *Аграновский М. Л.* Преобразование Фурье на $SL_2(\mathbb{R})$ и теоремы типа Морера // Докл. АН СССР. 1978. Т. 243, № 6. С. 1353–1356.

[2] *Волчков В. В.* Об одной проблеме Зальцмана и её обобщениях // Мат. заметки. 1993. Т. 53, вып. 2. С. 30–36.

[3] *Хелгасон С.* Группы и геометрический анализ. М.: Мир, 1987.

[4] *Силенко В. Е.* Новая теорема типа Мореры // Укр. мат. журн. 2001. Т. 53, № 2. С. 278–281.

Интегральный оператор связанный с интегрально-геометрическими соотношениями для выпуклых поверхностей

В. В. Славский [1]

Югорский государственный университет

Определим интегральный оператор, который сопоставляет функции $\chi(k)$, одного аргумента $k > 0$, функцию $Q[\chi](k_1, k_2)$ от двух аргументов по формуле

$$Q[\chi](k_1, k_2) = \int_0^{2\pi} \chi(k_\varphi)(k_1 \cos^2(\varphi) + k_2 \sin^2(\varphi))\, d\varphi,$$

где $k_\varphi = \frac{k_1 k_2}{k_1 \cos^2(\varphi) + k_2 \sin^2(\varphi)}$, $k_1 > 0$, $k_2 > 0$. Данный оператор возникает при выводе интегрально-геометрических соотношений с ортогональным проектированием для выпуклых поверхностей.

В работе исследуются свойства данного интегрального оператора.

[1] Югорский государственный университет, ул. Мира, 13, Ханты-Мансийск 628007, Россия.

E-mail: slavsky@uriit.ru

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 02–01–01071), советом по ведущим научным школам РФ (ВШ 311.2003.1), а также грантовым центром при Санкт-Петербургском университете (грант Е 02–1.0–120).

Применение теорем вложения пространств Соболева числовых последовательностей в гармоническом анализе

Е. С. Смаилов [1]

Институт прикладной математики
Министерства образования и науки Республики Казахстан

Пусть $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant +\infty$; $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=0}^{+\infty}$ — заданная последовательность неотрицательных чисел, для которой $\sup\{\alpha_k : k \in \mathbb{Z}^+\} = +\infty$. Здесь $\mathbb{Z}^+$ — множество неотрицательных целых чисел. Пусть $f \in L_p^*[0, 2\pi]$, где $*$ означает периодичность элементов класса с периодам 2π; $E_n(f)_p$ — её тригонометрическое наилучшее приближение в $L_p[0, 2\pi]$. Будем говорить, что $f \in B_{p\theta}(\alpha)$, если $\|f; B_{p\theta}(\alpha)\| = \|f\|_p + \left(\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \alpha_k^\theta E_{2^k}^\theta(f)_p\right)^{1/\theta} < +\infty$. Если $r > 0$ и $\alpha_k = 2^{kr}$, $k \in \mathbb{N}$, то $B_{p\theta}(\alpha) = B_{p\theta}^r$ — классическое пространство О. В. Бесова [1]. С помощью теорем вложения для пространства числовых последовательностей [2] устанавливаются необходимые и достаточные условия для того чтобы:

1) $B_{p\theta}(\alpha) \hookrightarrow L_{q\theta}[0, 2\pi]$, $1 \leqslant p \leqslant q < +\infty$;

2) для всех $f \in B_{p\theta}(\alpha)$ существовали производные Вейля $f^{(r)} \in L_p[0, 2\pi]$, $r > 0$;

3) $B_{p\theta}(\alpha) \hookrightarrow B_{qs}(\beta)$, $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant +\infty$;

4) для всех $f \in B_{p\theta}(\alpha)$ последовательность тригонометрических коэффициентов Фурье удовлетворяла соотношению $\{c_n(f)\}_{n=-\infty}^{+\infty} \in l_q$;

5) $B_{p\theta}(\alpha) \hookrightarrow \mathbb{M}_r$, где $1 < r < 2$, $p = \frac{2r}{2-r}$, $\mathbb{M}_r$ — пространство тригонометрических мультипликаторов Фурье.

Список литературы

[1] *Бесов О. В.* Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1961. Т. 60. С. 42–81.

[2] *Смаилов Е. С.* Теоремы вложения для пространств Соболева числовых последовательностей // Тр. по анализу и геометрии. Новосибирск: Изд-во Ин-та матем., 2000. С. 553–570.

[1] Институт прикладной математики Министерства образования и науки Республики Казахстан, ул. Университетская, 28, Караганда 470074, Казахстан.
E-mail: esmailov@kargu.krg.kz

О почти комплексных структурах на сфере S^6

Н. К. Смоленцев [1]

Кемеровский государственный университет

Как известно, среди четномерных сфер только S^2 и S^6 допускают почти комплексные структуры. Причем, на S^2 они все интегрируемы, а для S^6 есть основания полагать, что почти комплексные структуры неинтегрируемы. В работе [1] показана неинтегрируемость ортогональных почти комплексных структур J на стандартной сфере (S^6, g_0). В работе [2] показано, что неинтегрируемыми будут почти комплексные структуры J, ортогональные не только относительно стандартной метрики, но и для метрик, близких к стандартной. Среди ортогональных почти комплексных структур J на S^6 особое место занимает почти комплексная структура Кэли J_0, которая определяется при помощи умножения в октавах Кэли.

Найдены характеристики структуры Кэли J_0. А именно, найдено выражение фундаментальной формы ω_0, вычислен тензор Нейенхейса, показано, что фундаментальная форма ω_0 является собственной для оператора Лапласа.

Пока не известно примеров почти комплексных структур на S^6, отличных от структуры Кэли. Поэтому этот вопрос вызывает определенный интерес. Построено семейство ω_0-ассоциированных почти комплексных структур на сфере. Показано, что все структуры данного семейства неинтегрируемы.

Известно [3], что среди произведений четномерных сфер только $S^2 \times S^2$, $S^2 \times S^4$, $S^2 \times S^6$ и $S^6 \times S^6$ допускают почти комплексные структуры. Рассматривается почти комплексная структура на единственном нетривиальном случае произведения $S^2 \times S^4$.

Список литературы

[1] *LeBrun C.* Orthogonal complex structures on S^6 // Proc. Amer. Math. Soc. 1987. V. 101, № 1. P. 136–138.

[2] *Bor G., Hernandez-Lamoneda L.* The canonical bundle of hermitian manifold // Bol. Soc. Mat. Mexicana (3). 1999. V. 5. P. 187–198.

[3] *Datta B., Subramanian S.* Nonexistence of almost complex structures on products of even-dimensional spheres // Topology Appl. 1990. V. 36. P. 39–42.

[1] Кемеровский государственный университет, ул. Красная, 6, Кемерово 650043, Россия. E-mail: smolen@kemsu.ru

Трёхвесовое неравенство Харди для квазимонотонных функций

М. В. Сорокина [1], *М. Л. Гольдман* [2]

Российский университет дружбы народов

Неравенства типа Харди играют большую роль в математическом анализе и его приложениях. Они являются точными на множестве всех неотрицательных измеримых функций. В то же время в теории функциональных пространств часто возникает необходимость применения подобных неравенств на множестве функций с дополнительными условиями (квази)монотонности, причем в таких случаях классические неравенства Харди теряют свою точность. Примерами функций с двумя условиями монотонности являются вторые невозрастающие перестановки функций и модули непрерывности в теории функциональных пространств, а также K-функционалы Я. Петре в теории интерполяции. Точные двухвесовые неравенства типа Харди были получены сравнительно недавно в работах М. Ариньо, М. Карро, М. Л. Гольдмана, В. Д. Степанова и др.

Пусть β, γ, μ — неотрицательные борелевские меры на $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$; $p,q,r \in \mathbb{R}_+$; пусть $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$ — положительные борелевские функции такие, что $\psi(t) = \frac{\psi_1(t)}{\psi_0(t)} \uparrow$, $\psi(0) = 0$, $\psi(\infty) = \infty$, $\psi(1) = 1$; обозначим $\Omega_{(\psi_0,\psi_1)} = \left\{ f \geqslant 0 : \frac{f(t)}{\psi_1(t)} \downarrow, \frac{f(t)}{\psi_0(t)} \uparrow \right\}$ — конус функций с двумя условиями монотонности относительно заданных функций $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$. Рассмотрим величину

$$H(\mathbb{R}_+) \equiv H_{\Omega_{(\psi_0,\psi_1)}}(A,p,q,\beta,\gamma) = \sup_{f\in\Omega_{(\psi_0,\psi_1)}} \left(\int_0^\infty (Af)^q \, d\gamma \right)^{1/q} \Bigg/ \left(\int_0^\infty f^p \, d\beta \right)^{1/p},$$

где $A = \left(\int_0^t f^r \, d\mu \right)^{1/r}$ — обобщённый оператор Харди. Величину $H(\mathbb{R}_+)$ можно назвать нормой сужения оператора A на конус $\Omega_{(\psi_0,\psi_1)}$. Положим $h_\beta(t) = \left(\int_0^\infty \left[\frac{\psi_1(t)}{\psi_1(\tau)} + \frac{\psi_0(t)}{\psi_0(\tau)} \right]^{-p} d\beta(\tau) \right)^{1/p} \in \Omega_{(1/\psi_1,1/\psi_0)}$ — фундаментальная функция меры β на конусе $\Omega_{(\psi_0,\psi_1)}$. Последовательность $\mu = \{\mu_l\}_{l\in\mathbb{Z}}$ дискретизирует фундаментальную функцию $h_\beta(t)$ на $\mathbb{R}_+$, если а) $0 < \mu_l \upuparrows$,

[1] Российский университет дружбы народов, ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва 117198, Россия.

E-mail: msorokina@sci.pfu.edu.ru

[2] Российский университет дружбы народов, ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва 117198, Россия.

$\mu_0=1$; b) $h_\beta(\mu_l)\psi_1(\mu_l)\upuparrows$, $h_\beta(\mu_l)\psi_0(\mu_l)\downdownarrows$; c) $\mathbb{Z}=\mathbb{Z}_1\cup\mathbb{Z}_2$: $\mathbb{Z}_1\cap\mathbb{Z}_2=\varnothing$ и для $t\in[\mu_l,\mu_{l+1}]$: $h_\beta(t)\psi_1(t)\approx h_\beta(\mu_l)\psi_1(\mu_l)$, $l\in\mathbb{Z}_1$; $h_\beta(t)\psi_0(t)\approx h_\beta(\mu_l)\psi_0(\mu_l)$, $l\in\mathbb{Z}_2$. Обозначим

$$E=\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\int\limits_{\mu_n}^{\mu_{n+1}}\left(\int\limits_{\mu_n}^{t}\frac{d\mu}{h_\beta(\tau)^r}\right)^{q/r}d\gamma\right)^{\varkappa/q}\right)^{1/\varkappa};\quad \varkappa=\begin{cases}\frac{pq}{p-q}, & p>q,\\ \infty, & p\leqslant q;\end{cases}$$

$$g_n=\left(\int\limits_{\mu_n}^{\infty}d\gamma\right)^{1/q};\ \Phi_n=\left(\sum_{s\leqslant n-1}\left(\int\limits_{\mu_s}^{\mu_{s+1}}\frac{d\mu}{h_\beta(\tau)^r}\right)^{\sigma/r}\right)^{1/\sigma};\ \sigma=\begin{cases}\frac{pr}{p-r}, & p>r,\\ \infty, & p\leqslant r;\end{cases}$$

$$F=\begin{cases}\sup\limits_{n\in\mathbb{Z}}\Phi_n g_n, & p\leqslant q,\\ \left(\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\Phi_n^{\varkappa}[g_n^{\varkappa}-g_{n+1}^{\varkappa}]\right)^{1/\varkappa}, & p>q;\end{cases}$$

$$c_p(\psi_0,\psi_1,\beta)=\left(\int\limits_0^\infty\left[\frac{1}{\psi_1(t)}+\frac{1}{\psi_0(t)}\right]^{-p}d\beta(t)\right)^{1/p};$$

$$d_p(\psi_0,\beta)=\left(\int\limits_0^1\psi_0(t)^p\,d\beta(t)\right)^{1/p};\quad e_p(\psi_1,\beta)=\left(\int\limits_1^\infty\psi_1(t)^p\,d\beta(t)\right)^{1/p}.$$

Введём условие невырожденности меры β: $\beta\in N_{(\psi_0,\psi_1)}(p)\Leftrightarrow c_p(\psi_0,\psi_1,\beta)=1$, $d_p(\psi_0,\beta)=e_p(\psi_1,\beta)=\infty$.

Теорема. *Пусть $\beta\in N_{(\psi_0,\psi_1)}(p)$; последовательность μ дискретизирует фундаментальную функцию $h_\beta(t)$ на $\mathbb{R}_+$. Тогда $H(\mathbb{R}_+)\approx E+F$.*

Замечание 1. Ответы получены также и в случае нарушения условий невырожденности меры β.

Замечание 2. Оценки величины $H(\mathbb{R}_+)$ для оператора $B=\left(\int\limits_t^\infty f^r\,d\mu\right)^{1/r}$ получаются из оценок для оператора A с помощью соответствующей замены переменных.

Определение компактных подмножеств по функционалам от них

В. Н. Степанов [1]

Омский государственный технический университет

Пусть S^{n-1} — единичная сфера в R^n; u, v — точки на S^{n-1}. Рассмотрим уравнение первого рода

$$f(u) = \int\limits_{S^{n-1}} K(\langle u, v\rangle)\, \mu(dv) \tag{1}$$

относительно меры μ на S^{n-1}, $K(\langle u, v\rangle)$ — заданная функция (ядро).

Теорема 1. *Если ядро $K(\langle u, v\rangle) \in L_1[-1, 1]$ и линейная оболочка системы его собственных функций плотна в $L_1(S^{n-1})$, то уравнение* (1) *имеет не более одного решения в банаховом пространстве мер на S^{n-1}.*

Частными случаями уравнения (1) являются нижеследующие уравнения [1]. Сферическое преобразование Радона чётной функции $f(u)$:

$$(Rf)(u) \equiv \bar{f}(u) = \frac{1}{\omega_{n-2}} \int\limits_{S_u^{n-1}} f(v)\, d\lambda_u(v). \tag{2}$$

Здесь $S_u^{n-2} = \{v \in S^{n-1} | \langle v, u\rangle = 0\} = S^{n-1} \cap u^{\perp}$ — подсфера с полюсом в u; $\lambda_u(\cdot)$ — $(n-2)$-мерная сферическая мера Лебега на большой подсфере S_u^{n-2}; ω_{n-2} — мера площади S^{n-2}. Косинус-преобразование чётной функции:

$$(Tf)(u) = \int\limits_{S^{n-1}} |\langle u, v\rangle|\, f(v)\, \lambda(dv). \tag{3}$$

Полусферическое преобразование нечётной функции:

$$(Hf)(u) \equiv \hat{f}(u) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int\limits_{S^{n-1}} \chi(\langle u, v\rangle) f(v)\, \lambda(dv), \tag{4}$$

где $\lambda(\cdot)$ — сферическая мера Лебега на S^{n-1}, χ — функция Хевисайда.

[1] Омский государственный технический университет, пр. Мира, 11, Омск 634050, Россия.
E-mail: stpnv@rol.ru

Эти преобразования находят широкое применение в геометрии выпуклых тел (зоноиды, проекционные функции и связанные вопросы, см. [1]). Поэтому важны формулы обращения для этих интегральных преобразований. Формула обращения уравнения (2) может быть получена из общей формулы обращения Хелгасона [2]. Из формулы обращения для уравнения (2) следуют формулы обращения для преобразований (3) и (4).

Пусть B — замкнутая выпуклая гиперповерхность в n-мерном евклидовом пространстве R^n. Рассмотрим, связанные с поверхностью B, интегралы:

$$V_m(u) = \frac{1}{2} \int\limits_{S^{n-1}} |\langle u, v\rangle| \, \sigma_m(d\,v), \quad W_m(u) = \int\limits_{S^{n-1}} \chi(\langle u, v\rangle) \, \sigma_m(dv),$$

где $\sigma_m(\cdot)$ — m-я функция кривизны гиперповерхности B, $1 \leqslant m \leqslant n-1$.

В геометрической томографии интерес представляют вопросы определения компактных подмножеств по функционалам от них. Применяя теорему 1 для ядер $K(\langle u, v\rangle) = |\langle u, v\rangle|$ и $K(\langle u, v\rangle) = \chi(\langle u, v\rangle)$, получаем следующий результат:

Теорема 2. *Замкнутая выпуклая гиперповерхность B однозначно с точностью до параллельного переноса определяется m-ми интегралами кривизны $V_m(u)$ и $W_m(u)$, $1 \leqslant m \leqslant n-1$.*

Если гиперповерхность B гладкая, то, используя формулы обращения, можно получить в явном виде формулу для произведения главных радиусов кривизны B.

В качестве примеров определения невыпуклых многообразий можно привести следующие теоремы.

Теорема 3. *Связное компактное аналитическое m-мерное многообразие $\mathcal{M}$, $1 \leqslant m \leqslant n-1$, без края, вложенное в R^n, $n \geqslant 2$, однозначно определяется своими проекциями на k-мерные подпространства, $1 \leqslant k \leqslant n-1$.*

Теорема 4. *Связное компактное аналитическое m-мерное, $1 \leqslant m \leqslant n-1$, центрированное многообразие $\mathcal{M}$ без края, вложенное в R^n, $n \geqslant 2$, однозначно определяется по λ_i-мерам всех сечений его поляры $\mathcal{M}^0$ i-мерными подпространствами для двух различных значений i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$.*

Список литературы

[1] *Gardner R. J.* Geometric tomography. Cambridge–New York: Univ. Press, 1995.

[2] *Helgason S.* The totally-geodesic Radon transform on constant curvature spaces // Contemp. Math. 1990. V. 113. P. 141–149.

On Divergent Number Sequences

A. M. Sukhotin [1]

Tomsk Polytechnic University

An explanation of G. Galilei's paradox [1, p. 140–146] can be obtained by means of some conditions, which make it possible to divide all injective mappings $\varphi\colon N \to N$ into five classes: finitely surjective, potentially surjective, potentially antisurjective, finitely antisurjective and total antisurjective mappings. In particular, the following statements are proved:

Theorem 1. *Any injection of the latter 3 classes can't belong to the surjective mappings set.*

Theorem 2. *Necessary criterion of surjectivity of the injective mappings* $\varphi\colon N \to N$ *is of an asymptotic nature:* $\lim(\varphi(n) : n) = 1$.

Definition 1. A pair (m, n) of variables $m, n \in N$, is named an exact pair at $n \to \infty$, if

$$\exists (p, n(p) \in N)\ \forall n > n(p) : m = n + p.$$

The concept of the exact pair of natural variables allows to prove the following equivalence:

$$(r_n \to 0) \Leftrightarrow (a_n \to 0)$$

for every number series.

The following important concept has been introduced in [2, p. 214].

Definition 2. We name a numerical sequence (a) as *a divergent sequence*, if there are two infinite subsequences $\xi_1, \xi_2 \subset N$, $\xi_1 \bigcap \xi_2 = \varnothing$, such that the following condition is satisfied:

$$\exists (\delta > 0,\ n^* \in N) : \forall (m, k) \in (\xi_1, \xi_2),\ m, k > n^*\ |a_m - a_k| \geqslant \delta. \tag{1}$$

Definition 3. Numerical sequence (a) is termed as *a properly convergent sequence*, if the following condition is fulfilled:

$$(\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N) : (\forall n \geqslant n(\varepsilon)\ |a_{n+1} - a_n| < \varepsilon). \tag{2}$$

Theorem 3. *Every numerical sequence satisfies to one and only to one of two conditions:* (1) *or* (2).

[1] Tomsk Polytechnic University, Russia.

It is easy to prove the following statement by condition (1):

Statement 1. *The sequence* (a), *determined for all* $n \in N$ *by formula* $a_n = \sin(n)$, *is a convergent and limited ones. But for this sequence there is not any subsequence* $\xi \subset N$ *and a number* $a \in R$ *such that* $\lim a_k = a, k \in \xi$.

The new introduced concepts substantiate the existence of infinity hyperreal numbers. For example, both sequences (a) and (b) defined as $a_n = n^{1-\alpha}$, and $b_n = a_n(lnn)^{1-\alpha}$, $\alpha > 0$, correspondingly satisfy condition (2).

Statement 2. *So* (a_n) *with* $a_n = \sum\limits_{p=1}^{n} p^{-1}$, $n \in N$, *satisfies condition* (2), *then a solution of an asymptotic equation* $a_\infty = \mathrm{Arcsin}(x_\infty)$ *exists.*

References

[1] *Galilei G.* Selected Works. V. 1. M.: Nauka, 1964. (Russian).

[2] *Sukhotin A. M.* About a properly convergence of number sequences // Current methods of boundary-value problems. Materials of Voronezh Spring Mathematical School «Pontrjagin's readings-XV». Voronezh: VSU, 2004. P. 214–215. (Russian).

Линейчатые поверхности в E^4

О. А. Тихонова [1]

Физико-технический институт низких температур
им. Б. И. Веркина НАН Украины

Теория линейчатых поверхностей в E^3 является хорошо развитой областью в дифференциальной геометрии евклидового пространства. Имеются подробные обзоры этой теории в книгах В. Ф. Кагана [1], В. И. Шуликовского [2] и др. В докладе будут рассмотрены некоторые локальные и глобальные свойства линейчатых поверхностей в E^4.

Пусть γ — некоторая кривая в E^4 с радиус-вектором $\rho(t)$, где t — длина дуги и ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 — её натуральный базис Френе. Возьмем единичное векторное поле $a(t)$ вдоль кривой γ, такое что $a(t)$ есть линейная комбинация векторов ξ_2, ξ_3, ξ_4 в соответствующей точке кривой. Рассматривается линейчатая поверхность в E^4, заданная радиус-вектором $r(t,u) = \rho(t) + ua(t)$. На случай таких линейчатых поверхностей в четырехмерном пространстве естественным образом переносятся некоторые известные понятия и утверждения, связанные, например, со стрикционной линией, гауссовой кривизной и т. д. В частности, проанализировано поведение гауссовой кривизны на полных линейчатых поверхностях. Доказана

Теорема 1. *Модуль интеграла от гауссовой кривизны регулярной линейчатой поверхности F^2 в E^4 гомеоморфной цилиндру, равен удвоенной длине λ сферической кривой, описываемой концом вектора направления $a(t)$ прямолинейных образующих*: $\left|\iint K\,ds\right| = 2\lambda$.

Также рассмотрено поведение гауссова кручения $\varkappa_\Gamma$, которое является инвариантом нормальной связности поверхности.

Теорема 2. *Полная регулярная линейчатая поверхность в E^4 с нулевым гауссовым кручением либо лежит в E^3, либо имеет направляющую кривую γ, лежащую в E^3, и прямолинейную образующую, параллельную постоянному вектору e_4.*

Список литературы

[1] *Каган В. Ф.* Основы теории поверхностей в тензорном изложении. М.-Л.: ОГИЗ, 1947.

[2] *Шуликовский В. И.* Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении. М.: Физматгиз, 1963.

[1] Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, пр. Ленина, 47, Харьков 61103, Украина.
E-mail: tihonova@ilt.kharkov.ua

Продолжимость квазисимметрических функций и верхние множества

Д. А. Троценко [1]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Отображение f метрических пространств называется (M,α)-*квазисимметрией* с константами $M \geqslant 1$, $0 < \alpha \leqslant 1$, если

$$M^{-1}\left(\frac{|x-y|}{|x-z|}\right)^{1/\alpha} \leqslant \frac{|f(x)-f(y)|}{|f(x)-f(z)|} \leqslant M\left(\frac{|x-y|}{|x-z|}\right)^{\alpha}$$

для всех троек x, y, z таких, что $|x-y|/|x-z| \leqslant 1$. Отображение называется степенной квазисимметрией, если оно является (M,α)-квазисимметрией с некоторыми константами $M \geqslant 1$, $0 < \alpha \leqslant 1$. Отображение f метрического пространства (Γ, ϱ) в (Γ_1, ϱ_1) назовём (P,Q)-*ниалипшицевым*, если

$$\varrho_1(f(x), f(y)) \leqslant P\varrho(x,y) + Q$$

для всех $x, y \in \Gamma$.

Это определение естественно обобщается на *неоднозначные* функции. Пусть X, Y — подмножества R, $\varrho_1(X,Y) = \sup\{\varrho(a,b) : a \in X,\ b \in Y\}$. Неоднозначную функцию $f\colon \Gamma \to R$ назовём (P,Q)-*ниалипшицевой*, если

$$\varrho_1(f(x), f(y)) \leqslant P\varrho(x,y) + Q$$

для всех $x, y \in \Gamma$. Видно, что $\operatorname{diam} f(x) \leqslant Q$.

Лемма. *Неоднозначная (P,Q)-ниалипшицева функция продолжается с произвольного подмножества метрического пространства на всё пространство с сохранением констант.*

Пусть A — произвольное метрическое пространство с расстоянием $|x-y|$. В [1] множество $A \times R_+ = \widetilde{A}$ наделялось метрикой, эквивалентной гиперболической в случае $R^n \times R_+ = R_+^{n+1}$. Его подмножества были названы *верхними множествами* A. Здесь мы будем отождествлять точку $(x,r) \in \widetilde{A}$ со сферой в A.

---

[1]Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Коптюга, 4, Новосибирск 630090, Россия.

E-mail: trotsenk@math.nsc.ru

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ 02–01–00255 и НШ–1172.2003.1.

Инъективное отображение $F\colon A \to A'$ каждой паре (x,y) различных точек из A ставит в соответствие коэффициент искажения $k(x,y) = \ln|F(x) - F(y)|/|x-y|$. Таким образом, на $\widetilde{A}$ задана вещественная неоднозначная функция искажения $f(x,r) = \{k(x,y) : |x-y| = r\}$.

Теорема 1. *Отображение $F\colon A \to A'$ метрических пространств является степенной квазисимметрией тогда и только тогда, когда его (неоднозначная) функция искажения $f\colon \widetilde{A} \to R$ является ниалипшицевой.*

Эта теорема демонстрирует причину введения верхних множеств. Мультипликативным свойствам отображения метрических пространств соответствуют аддитивные свойства отображения верхних множеств. Используя ниалипшицево продолжение функции искажения, получаем основной результат:

Теорема 2. *Любая монотонная (M,α)-квазисимметрическая функция, определённая на произвольном подмножестве вещественной прямой, продолжается до (M',α')-квазисимметрии всей прямой. Константы M' и α' зависят от M и α и не зависят от подмножества прямой. Никакая не монотонная или не степенная квазисимметрия не продолжается до квазисимметрии всей прямой.*

Список литературы

[1] *Trotsenko D. A., Väisälä J.* Upper sets and quasisymmetric maps // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 1999. V. 24. P. 465–488.

Анализ нелинейных факторов интенсивного сейсмического воздействия на грунтовую толщу

Ж. Д. Туаева [1]

Институт прикладной математики и информатики

Исследования нелинейных явлений в грунтах, начатые в России почти 40 лет назад, явились своеобразным стимулом для современной концепции создания динамических моделей грунтовых оснований. Кроме чисто научных интересов большой интерес вызывает вопрос прогнозирования поведения грунтов и сооружений с точки зрения адекватности ожидаемому проявлению сейсмического воздействия. Настоящее исследование представляет собой разработку и использование математических методов для оценок нелинейности грунтовой толщи различных литологического состава и физического состояния грунтов для целей сейсмического микрорайонирования.

Представленная математическая модель учитывает структурные особенности, присущие конкретным реальным средам. Модель представляет собой сложное нелинейное дифференциальное уравнение колебаний грунтовой толщи с учётом сил диссипации при интенсивном сейсмическом воздействии на некоторой глубине. Для численного решения системы уравнений использован метод конечных разностей для расчета колебаний сред с границами раздела.

Данные расчётов позволяют исследовать грунт в условиях, максимально приближенных к реальным условиям, напряженно-деформированного состояния, обусловленного интенсивным сейсмическим воздействием. Эти исследования будут важным звеном в системе прогноза последствий сильных землетрясений на исследуемых территориях и, в частности, будут использованы при разработке рекомендаций для сейсмического микрорайонирования для учета возможной нелинейности отклика грунта на сильные воздействия.

Рассматривается слой почвы с нелинейными свойствами при $0 \leqslant z \leqslant h$, а $z > h$ — полупространство с упругими линейными свойствами. На слой почвы $z = h$ действует вертикальная преобладающая SH-волна с заданной частотой f_0. Поведение свойств грунта описывается нелинейной зависимостью по Хардин — Дрневичу, связывающей функции деформации $\gamma(z,t)$ и

[1] Институт прикладной математики и информатики, ул. Маркуса, 22, Владикавказ 326027, Russia.
E-mail: jannatuaeva@inbox.ru

касательного напряжения $\tau(z,t)$ (t — время):

$$\tau = G(\gamma)\gamma, \tag{1}$$

где $G(\gamma) = \frac{G_0}{1+\frac{|\gamma|}{\gamma_0}}$ — модуль упругости, G_0 — заданное максимальное значение модуля упругости для малых возмущений, γ_0 — заданное максимальное значение деформации. Данное представление модуля упругости учитывает конечность деформации (физическую нелинейность), т. е. предположение о малости деформаций, свойственное для линейной теории упругости здесь не выполняется.

Дополнительно к зависимости (1) вводится характеризующая нелинейное затухание функция $\beta(\gamma) = \beta_0 + [\beta_m - \beta_0]\frac{\alpha|\gamma|}{1+\alpha|\gamma|}$, где β_0 и β_m — заданные коэффициенты затухания, $\alpha = 1/\gamma_0$ — нелинейный параметр.

Уравнение, описывающее динамику грунтовой среды, выглядит следующим образом: $\frac{\partial\tau}{\partial z} = \rho a$, где ρ — плотность, a — ускорение.

Касательное напряжение представляется в виде $\tau = G(\gamma)\gamma + G_0\beta(\gamma)\frac{\partial\gamma}{\partial t}$, и далее задача сводится к нахождению функции смещения $u(z,t)$, принимая во внимание то обстоятельство, что $a = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\gamma = \frac{\partial u}{\partial z}$.

Вопрос постановки граничных и начальных условий решается следующим образом. На границе $z = h$ задаётся импульсная функция вида $u_0(t) = u_0\left(\left[\pi\frac{(t-t_0)}{t_0}\right]^2 - \frac{1}{2}\right)e^{-\left[\pi\frac{(t-t_0)}{t_0}\right]^2}$, где t_0 — время, при котором частота колебаний принимает наибольшее значение.

На свободной поверхности $z = 0$ принимаем, что $\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = 0$.

Начальные условия запишутся в виде: $u|_{t=0} = 0$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$.

Имеется аналитическое решение данной задачи, которое получено методами комплексного анализа и теории обобщённых функций [1] и по сути является тестовым. Ставится цель применить предложенную модель к реальными источникам возмущений для оценки сейсмического риска городской застройки, поэтому необходимость в численных дискретных решениях очевидна. Ранее [2] авторами было получено решение с помощью явной схемы, которое сильно зависело от шага дискретизации. Поэтому ставится цель усовершенствовать имеющуюся численную методику решения. Для данной модели проведено численное исследование с применением метода итераций и метода прогонки для нулевого приближения. Анализ полученных данных показывает, что при учёте нелинейных свойств грунтов в математической модели колебаний грунтовой толщи в условиях значительных деформации на графике спектральной кривой появляются пики на кратных частотах. Полученные данные сравнивались с данными экспериментальных исследований, сопоставление показало хорошее соответствие. Таким образом, компьютерный результат может быть использован для исследований сейсмических свойств грунтов на различных глубинах толщи.

Список литературы

[1] *Heitz J. F., Bonnet G.* 1-D Nonlinear seismic response of a soft soil layer by a Semi-Analytical Approach // Proc. 10-th European Conf. on Earthquake Engineering, Vienna. Abstracts. V. 2. 1994.

[2] *Заалишвили В. Б., Туаева Ж. Д.* Математическое моделирование колебаний грунтовой толщи на основе учета нелинейных свойств грунтов при интенсивных воздействиях // Тез. докл. Междунар. науч. конф. «Информационные технологии и системы: наука и практика». Владикавказ, 2002.

Integral Operators with Variable Domain of Integration

Elena P. Ushakova [1]

Computing Centre FEB RAS

For all $p, q \in (1, \infty)$ we characterize inequalities

$$\left(\int_0^\infty |Kf(x)|^q w^q(x)\, dx\right)^{1/q} \leqslant C \left(\int_0^\infty |f(x)|^p v^p(x)\, dx\right)^{1/p}$$

with integral operator $Kf(x) = \int\limits_{a(x)}^{b(x)} k(y, x) f(y)\, dy$, $x > 0$. Here a non-negative kernel $k(y, x)$ satisfies certain conditions of growth. Border functions $a(x)$ and $b(x)$ are continuous, strictly increasing and such that $a(0) = b(0) = 0$, $a(\infty) = b(\infty) = \infty$. Weight functions $w(x) \geqslant 0$, $v(x) \geqslant 0$ are locally integrable.

We apply our result for characterization of weighted L^p–L^q inequalities for the Hardy operator with a weight function $u \geqslant 0$ of the form $H_u f(x) = \int\limits_{a(x)}^{b(x)} f(y) u(y)\, dy$, $x > 0$, on the cones of monotone functions f.

[1]Computing Centre FEB RAS, Tikhookeanskaya 153, Khabarovsk 680042, Russia.
E-mail: ushakova@as.khb.ru
The research work was financially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project 03–01–00017) and by the Far Eastern Branch of RAS (project 04–3–Г–01–049).

О связи неголономной метрики на группе Гейзенберга с метрикой Грушина

Р. Р. Файзуллин [1]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Целью данной работы является вычисление геодезических на плоскости Грушина и изучение утверждения о связи сфер плоскости Грушина и сфер группы Гейзенберга. Выяснилось, что утверждение о получении сфер группы Гейзенберга непосредственным вращением сфер Грушина нуждается в корректировке. Найдена модифицированная метрика Грушина, для которой справедливо последнее утверждение, также доказано несколько имеющих самостоятельное значение теорем о связях плоскости Грушина и группы Гейзенберга. В работах [1, 2] рассматривался гипоэллиптический оператор $\partial^2/\partial x^2 + x^2\partial^2/\partial y^2$, естественно связанный с вырожденной римановой метрикой $ds^2 = dx^2+dy^2/x^2$ на $\mathbb{R}^2$, так называемой метрикой Грушина. В [3] упоминается 1-параметрическая группа подобий для плоскости Грушина, $(x, y) \to (\lambda x, \lambda^2 y)$. Без вычисления приведены формулы для геодезических и на плоскости Грушина $x(t) = \frac{a}{b}\sin(bt)$, $y(t) = \frac{a}{b}\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin(2bt)}{4b}\right)$, и на группе Гейзенберга. Отсюда можно было бы легко найти формулы сфер метрики Грушина и группы Гейзенберга (H, ρ), но этого в явном виде сделано не было. В статье [4] найдены точные формулы для сфер группы Гейзенберга. Там же было сказано, что сферы на группе Гейзенберга получаются вращением «сфер Грушина» вокруг оси z: $r(t) = \frac{2T}{t}\sin(t/2)$, $z(t) = \frac{T^2}{2t^2}(t - \sin(t))$, $0 < t \leqslant 2\pi$, с продолжением по непрерывности до $t = 0$: $z = 0$, $r = T$. В действительности это оказалось справедливым для сфер модифицированной метрики Грушина. В работе доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. *Параметризованные длиной дуги* (*максимальные*) *геодезические на полуплоскости* $(x \geqslant 0)$ *с метрикой* $ds_v^2 = dx^2 + \dfrac{dy^2}{v^2x^2}$ *имеют вид или* $x(t) = \frac{\sin(t\sqrt{c})}{\sqrt{c}}$, $y(t) = \pm v\left(\frac{t}{2\sqrt{c}} - \frac{\sin(2t\sqrt{c})}{4c}\right) + \mathrm{const}$, $t \in [0, \pi/\sqrt{c}]$, *при* $c > 0$, *или* $x(t) = t$, $y(t) = \mathrm{const}$, $t \in \mathbb{R}$. *При этом каждый отрезок этой геодезической является кратчайшей.*

Вращения (H, ρ) вокруг оси z в соответствующей системе координат первого рода на H являются изометриями (H, ρ) [4].

[1]Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, ул. Певцова, 13, Омск 644099, Россия.
E-mail: geltorn@rambler.ru

Теорема 2. *В цилиндрических координатах* (z, r, ϕ) *проекция* $p\colon (z, r, \phi) \to (z, r)$ *группы Гейзенберга* H *с левоинвариантной метрикой* ρ *на пространство орбит относительно группы вращений вокруг оси* z *является субметрией на плоскость* $(r \geqslant 0)$ *с метрикой Грушина* $ds^2 = dr^2 + 4\,dz^2/r^2$. *Кроме того, проекция* p *сохраняет длины всех спрямляемых кривых на группе* (H, ρ).

Заметим, что не всякая субметрия отображает геодезические на геодезические, примером тому может служить субметрия $H \to E^2$, рассматриваемая в работе [4]. Поэтому представляет интерес

Теорема 3. *Проекция* p *отображает геодезические группы* H *с началом на оси* z *на геодезические модифицированной плоскости Грушина с сохранением длин дуг.*

Следствие 4. *Сферы группы Гейзенберга* (H, ρ) *с центром в* E *получаются вращением сфер модифицированной метрики Грушина с центром в* 0 *вокруг оси* z.

Предложение 5. *Параметризованные длиной дуги* (*максимальные*) *геодезические на плоскости Грушина с метрикой* $ds_v^2 = dx^2 + \dfrac{dy^2}{v^2x^2}$ *имеют вид или* $x(t) = \pm\frac{\sin(t\sqrt{c})}{\sqrt{c}}$, $y(t) = \pm v\left(\frac{t}{2\sqrt{c}} - \frac{sin(2t\sqrt{c})}{4c}\right) + \mathrm{const}$, $t \in \mathbb{R}$, *при* $c > 0$, *или* $x(t) = \pm t$, $y(t) = \mathrm{const}$, $t \in \mathbb{R}$. *При этом каждый отрезок геодезической* (*первого вида*), *длина которого не превосходит* $\pi/\sqrt{c}$, *является кратчайшей. Каждый отрезок прямой* (3) *является кратчайшей.*

Модифицированная плоскость Грушина — двумерное пространство с метрикой G_v, $g_{11} = 1$, $g_{12} = 0$, $g_{21} = 0$, $g_{22} = \dfrac{1}{v^2x_1^2}$.

Список литературы

[1] *Грушин В. В.* Об одном классе гипоэллиптических операторов // Мат. сб. 1970. Т. 83, № 3. С. 456–473.

[2] *Грушин В. В.* Об одном классе эллиптических псевдодифференциальных операторов, вырождающихся на подмногообразии // Мат. сб. 1971. Т. 84, № 2. С. 163–195.

[3] *Bellaiche A.* The tangent space in Sub-Riemannian geometry // Sub-Riemannian Geometry (ed. Bellaiche A., Risler J.-J.). Basel–Boston–Berlin: Birkhauser, 1996. P. 1–78. (Progr. Math.; 144).

[4] *Берестовский В. Н., Зубарева И. А.* Формы сфер специальных неголономных левоинвариантных внутренних метрик на некоторых группах Ли // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 4. С. 731–748.

Оценка радиальных решений полулинейных эллиптических уравнений на модельных римановых многообразиях

Ю. С. Федоренко [1]

Волгоградский государственный университет

В работе рассматривается уравнение

$$\Delta u + K(x)|u(x)|^{p-2}u(x) = h(x), \quad p > 1, \tag{1}$$

на полном римановом многообразии D, изометричном прямому произведению $[r_0; +\infty) \times B$, с метрикой $ds^2 = dr^2 + g^2(r)\, d\theta^2$. Здесь B — компактное риманово многообразие без края, $d\theta^2$ — метрика на B, а $g(r)$ — гладкая положительная на $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ функция. Функция $K(x)$ неотрицательна.

Радиальные решения уравнения (1) в $\mathbb{R}^n$ ранее рассматривались С.И. Похожаевым [1]. Им были получены точные априорные оценки на поведение решений, а также выведены условия положительности радиальных решений и доказано существование континуума решений.

В работе ограничиваемся рассмотрением только радиальных решений, что приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$u''(r) + \frac{S'(r)}{S(r)}u'(r) + K(r)|u(r)|^{p-2}u(r) = h(r), \tag{2}$$

где $S(r) = w_n g^{n-1}(r)$ — площадь сечения многообразия D в точке r.

Теорема 1. *Пусть $K'(r) \leqslant 0$ для любого $r \geqslant r_0$. Если существует $\varepsilon > 0$ такое, что метрика многообразия D удовлетворяет условию $S'(r)/S(r) \geqslant \varepsilon/2$, то для любого радиального решения уравнения (2) выполнено*

$$K(r)|u(r)|^p \leqslant \frac{p}{2\varepsilon}\int\limits_{r_0}^{r} h^2(s)\, ds + c_1, \quad u'^2(r) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{r_0}^{r} h^2(s)\, ds + c_1,$$

где $c_1 > 0$.

Теорема 2. *Пусть функция $K(r)$ удовлетворяет условию*

$$S(r)K'(r) + S'(r)K(r) \leqslant 0 \tag{3}$$

[1] Волгоградский государственный университет, ул. 2-я Продольная, 30, Волгоград 400062, Россия.
E-mail: yuri.fedorenko@volsu.ru

Тогда на любом многообразии D таком, что $S'(r) > 0$ для любого радиального решения уравнения (2) выполнено

$$\frac{1}{p}S(r)K(r)|u(r)|^p \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{r_0}^{r} \frac{h^2(t)S^2(t)}{S'(t)}\,dt + c_2,\ \ S(r)u'^2(r) \leqslant \int\limits_{r_0}^{r} \frac{h^2(t)S^2(t)}{S'(t)}\,dt + 2c_2,$$

где $c_2 > 0$.

Далее рассматриваем многообразия с неубывающей функцией $g(r)$.

Теорема 3. *Предположим, что функция $K(r)$ удовлетворяет условию (3). При этом для функции $h(r) \in C^1([r_0;\infty))$ выполнено $h(r_0) > 0$ и $S(r)h'(r) + S'(r)h(r) > 0$ для всех $r > r_0$. Тогда радиальное решение уравнения (2), удовлетворяющее начальным данным $u(r_0) = 0$, $u'(r_0) = 0$, является положительным.*

Список литературы

[1] *Похожаев С. И.* О целых радиальных решениях некоторых квазилинейных эллиптических уравнений // Мат. сб. 1992. Т. 183, № 11. С. 3.

О бесконечно малой деформации риманова пространства, допускающего поле гравитации

А. Е. Фомина [1]

Казахский национальный университет им. аль-Фараби

Риманово пространство V_n можно рассматривать как гладкую n-мерную поверхность некоторого упругого тела в евклидовом пространстве E_{n+p}. Число p будем считать достаточно большим для того, чтобы погружение пространства V_n в E_{n+p} пространство принадлежало необходимому классу. Под влиянием приложенных сил упругие тела в той или иной степени деформируются, т. е. меняют свою форму и объём. Практически во всех случаях деформации оказываются малыми, т. е. изменение любого расстояния в теле оказывается малым по сравнению с самим расстоянием.

Рассмотрим бесконечно малую деформацию $\tilde{x}^i = x^i + u_i(x)\tau$, где u_i — компоненты вектора бесконечно малой деформации, который описывает смещение точки упругого тела, а τ — бесконечно малый параметр. Пусть некоторое пространство подвергается данной деформации, при этом $V_n \to \widetilde{V}_n$, причем $\tilde{g}_{ij} = g_{ij} + 2\tau\gamma_{ij}$, где γ_{ij} есть тензор бесконечно малой деформации, связанный с вектором бесконечно малой деформации следующими соотношениями

$$2\gamma_{ij} = \nabla_i u_j + \nabla_j u_i. \tag{1}$$

Символ ∇_i обозначает ковариантное дифференцирование по i-ой координате. Следовательно, задание вектора деформации как функции от координат полностью определяет бесконечно малую деформацию. Таким образом, мы приходим к обратной задаче Сен-Венана, суть которой состоит в отыскании вектора бесконечно малой деформации по известным компонентам тензора данной деформации.

Пусть пространство, определяемое метрикой

$$ds^2 = dt^2 - e^{-\lambda(t-t_0)^2}(dr^2 + r^2\,d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2), \tag{2}$$

подвергается бесконечно малой деформации. Рассмотрим для него поставленную задачу. (1) для метрики (2) даст систему дифференциальных уравнений в частных производных. И следовательно, описание произвольной

[1] Кафедра ГАМЛ, Казахский национальный университет им. аль-Фараби, ул. Масанчи, 39/47, Алматы 480012, Казахстан.
E-mail: fomina_al@mail.ru

бесконечно малой деформации данного пространства сводится к нахождению всех решений полученной системы. Тензор бесконечно малой деформации должен удовлетворять некоторым условиям совместности, которые можно интерпретировать как условия существования полных интегралов ω_i, $i = \overline{1,6}$, для шести уравнений Пфаффа. Данные интегралы позволяют найти решение указанной системы. Восстановив вектор произвольной деформации, можно на основе решения данной задачи получить решение для частных случаев бесконечно малых деформаций данного пространства: движения, конформной деформации и т. д.

Разложение обобщённой гипергеометрической функции ${}_3F_2(z)$ по одному обобщению функций Бесселя

М. Д. Хриптун [1]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

В докладе рассматривается доказательство разложения

$$\frac{(z/3)^d}{\Gamma(d+1)}\,{}_3F_2\left(a,b,c;\frac{d+1}{2},\frac{d+2}{2};\frac{(z/3)^3}{2^2abc}\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\,{}_4F_0\left(-\nu,a,b,c;\frac{1}{abc}\right)\left(\frac{z}{3}\right)^{2\nu}U^{(3)}_{d+2\nu}(z), \quad (1)$$

где ${}_3F_2(z)={}_3F_2(a,b,c;d,e;z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n(c)_n}{n!(d)_n(e)_n}z^n$ — обобщённая гипергеометрическая функция, ${}_4F_0(-\nu)={}_4F_0\left(-\nu,a,b,c;\frac{1}{abc}\right)=\sum\limits_{n=0}^{\nu}\frac{(-\nu)_n(a)_n(b)_n(c)_n}{n!}\left(\frac{1}{abc}\right)^n$ — обобщённый гипергеометрический полином, $U^{(3)}_d(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(z/3)^{d+3k}}{k!\left(\frac{d+1}{2}\right)_k\left(\frac{d+2}{2}\right)_k 2^{2k}}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(z/3)^{d+3k}}{k!\Gamma(2k+d+1)}$ — обобщённая функция Бесселя (см. [1], формула (3) при $d=-2p$), $(a)_n=a(a-1)\dots(a+n-1)=\Gamma(a+n)/\Gamma(a)$, $(a)_0=1$ — символ Похгаммера, $\Gamma(z)$ — гамма функция. Разложение (1) можно использовать для нахождения асимптотического поведения функции ${}_3F_2(z)$ при больших значениях параметров a, b, c.

Функция ${}_3F_2(z)$ широко применяется при решении сложных физических задач в теории плит и оболочек и др.

Список литературы

[1] *Хриптун М. Д.* Рекуррентные соотношения и теоремы умножения для решений обобщённого дифференциального уравнения Бесселя // Сиб. мат. журн. 1970. Т. 11, № 3. С. 713–714.

[1] Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск 630090, Россия.

О гомотетии

М. А. Чешкова [1]

Барнаул

Говорят, что отображение $f\colon M \to \overline{M}$ для двух римановых многообразий M, $\overline{M}$ *сильно сохраняющее кривизну*, если f отображает $\nabla^m R$ в $\overline{\nabla}^m \overline{R}$ для каждого $m = 0, 1, 2, \ldots$, где $\nabla^m R$, $\overline{\nabla}^m \overline{R}$ обозначает m-е ковариантные производные тензорных полей кривизны R на M и $\overline{R}$ на $\overline{M}$, соответственно ([1, с. 324]). Номидзу и Яно [1] доказали теорему: *сильно сохраняющий кривизну диффеоморфизм между неприводимыми аналитическими римановыми многообразиями M и $\overline{M}$ размерности, не меньшей 2, есть гомотетическое преобразование.*

Теорема 1. *Если $f\colon M \to \overline{M}$ диффеоморфизм пары невырожденных гиперповерхностей в евклидовом пространстве E^n, $n > 3$, сохраняющий тензоры кривизны, то первые фундаментальные формы g, $\bar{g}$ и вторые фундаментальные формы b, $\bar{b}$ гиперповерхностей M, $\overline{M}$ удовлетворяют равенствам $\bar{g} = t^2 g$, $\bar{b} = tb$, $t \in R$.*

Теорема 2. *Если $f\colon M \to \overline{M}$ диффеоморфизм пары невырожденных гиперповерхностей в евклидовом пространстве E^n, $n > 3$, сохраняющий тензоры кривизны, то гиперповерхность $\overline{M}$ получена из гиперповерхности M с помощью гомотетии и изометрии в E^n.*

В частности при изометрии f имеем $t^2 = 1$ и имеет место теорема о жесткости для гиперповерхности в E^n, $n > 3$ [1].

Список литературы

[1] Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 2. М., 1981.

[1] ул. Чкалова, 30, Барнаул 656038, Россия.
E-mail: cheshkov@ab.ru

Regularity of Ghosts in Tensor Tomography

Vladimir Sharafutdinov [1]

Sobolev Institute of Mathematics

We study on a compact Riemannian manifold with boundary the ray transform I which integrates symmetric tensor fields over geodesics. A tensor field is said to be a nontrivial ghost if it is in the kernel of I and is L^2-orthogonal to all potential fields. We prove that a nontrivial ghost is smooth in the case of a simple metric. This implies that the wave front set of the solenoidal part of a field f can be recovered from the ray transform If. We give an explicit procedure for recovering the wave front set.

[1] Sobolev Institute of Mathematics, pr. Acad. Koptyug, 4, Novosibirsk 630090, Russia.
E-mail: sharaf@math.nsc.ru

On Fixed Point Theorems in Fuzzy Metric Spaces

Sushil Sharma [1]

Department of Mathematics,
Madhav Science College,
Vikram University

We prove some common fixed point theorems in fuzzy metric spaces by removing the assumption of continuity, relaxing the condition of compatibility or compatibility of type(α) or compatibility of type(β) to weak compatibility and replacing the completeness of the space with a set of alternative conditions.

[1] Department of Mathematics, Madhav Science College, Vikram University, Ujjain 456010, India
E-mail: sksharma2005@yahoo.com

Разложение в пространствах Соболева с помощью касательной и нормальной составляющих сечения

А. А. Шлапунов [1]

Красноярский государственный университет

Пусть X — C^∞-многообразие размерности n и пусть $\{A_i, E_i\}$ — эллиптический дифференциальный комплекс на X, где E_i суть C-векторное расслоение над X ранга k_i, а A_i — дифференциальный оператор порядка $m_i \geqslant 1$ на X (см. [1]). Пусть D — относительно компактная область в X с границей $\partial D \in C^\infty$ и $H^s(D, E_i)$ обозначает пространство Соболева, состоящее из распределений сечений расслоения E_i, имеющих слабые производные в пространстве Лебега $L^2(X, E)$ до порядка $s \in \mathbb{N}$ включительно. Обозначим также через $H_0^s(D, E_i)$ замыкание в пространстве $H^s(D, E_i)$ гладких сечений с компактным носителем в D. Если пространство $\mathfrak{C}(D, E_i)$ содержится в $H^{m_i}(D, E_i)$, то говорят, что данные Коши $\tau_i(u)$ сечения $u \in \mathfrak{C}(D, E_i)$ относительно оператора A_i равны нулю на ∂D, если $\int\limits_{\partial D} G_{A_i}(v, u) = 0$ для всех $v \in C_0^\infty(X, E_{i+1}^*)$, где $G_{A_i}(\cdot, \cdot)$ — оператор Грина для A_i (см. [1]). Множество элементов пространства $\mathfrak{C}(D, E_i)$ с нулевыми данными Коши на ∂D относительно $\{A_i, E_i\}$ обозначим через $\mathfrak{F}(\mathfrak{C}(D, E_i), \tau)$. Элементы фактор-пространства $\mathcal{C}(\mathfrak{C}(D, E_i), \tau) = \frac{\mathfrak{C}(D, E_i)}{\mathfrak{F}(\mathfrak{C}(D, E_i), \tau)}$ естественно трактовать как данные Коши τ_i на Γ для A_i над пространством $\mathfrak{C}(D, E_i)$ (ср. [1]). Аналогичные обозначения и понятия введём и для комплекса $\{A_i^*, E_i)$, формально сопряженного комплексу $\{A_i, E_i\}$. При этом данные Коши $\tau_{i-1}^{(*)}(u)$ сечения $u \in \mathfrak{C}(D, E_i)$ относительно оператора A_{i-1}^* будем обозначать через $\nu_i(u)$. Составляющие $\tau(u)$ и $\nu(u)$ часто называют касательной и нормальной частью сечения $u \in \mathfrak{C}(D, E_i)$. Обозначим через Δ_i *лапласиан* комплекса $\{A_i, E_i\}$, т. е. $\Delta_i = A_i^* A_i + A_{i-1} A_{i-1}^*$, а через $S^{m_i}(\Delta_i, D)$ множество слабых решений оператора Δ_i в области D, принадлежащих пространству $H^{m_i}(D, E_i)$.

Теорема. *Пусть порядки операторов A_i и A_{i-1} совпадают и равны m. Если оператор Δ_i удовлетворяет условию единственности в малом в некоторой окрестности $\overline{D}$, то*

$$H^m(D, E_i) \cong H_0^m(D, E_i) \oplus \mathfrak{F}(S^m(\Delta_i, D), \tau) \oplus \mathfrak{F}(S^m(\Delta_i, D), \nu),$$

а соответствующие «проекторы» непрерывны.

[1] Факультет математики и информатики, Красноярский государственный университет, пр. Свободный, 79, Красноярск 660041, Россия.
E-mail: shlapuno@lan.krasu.ru

Доказательство проводится с использованием потенциалов двойного и простого слоев и основано на идеях из [1, § 13].

Список литературы

[1] *Тарханов Н. Н.* Метод параметрикса в теории дифференциальных комплексов. Новосибирск: Наука, 1990.

Counting Subgroups of Crystallographic Groups

Michael N. Shmatkov [1]

Sobolev Institute of Mathematics

Considering crystallographic group G defined by its representation

$$\Big\langle a_j, b_j, x_i \mid x_i^{m_i} = 1,\ \prod_{i=1}^{r} x_i \prod_{j=1}^{g} [a_j, b_j] = 1 \Big\rangle,$$

for *orientable* case, where g, r, m_1, $\dots$, m_r are integers with $g, r \geqslant 0$, $m_i > 0$, i runs over $1, \dots, r$, j runs over $1, \dots, g$, $[a, b]$ stands for $aba^{-1}b^{-1}$, and

$$\Big\langle a_j, x_i \mid x_i^{m_i} = 1,\ \prod_{i=1}^{r} x_i \prod_{j=1}^{g} a_j^2 = 1 \Big\rangle,$$

for *non-orientable* case, where g, r, m_1, $\dots$, m_r are integers with $g \geqslant 1$, $r \geqslant 0$, $m_i > 0$, i runs over $1, \dots, r$, j runs over $1, \dots, g$, we establish a method to count the number on subgroups of an arbitrary index n for the group G.

To establish main formulas we use well known interconnection between the number of subgroups of index n of a finitely generated group and the number of its transitive permutational representations of degree n, some results of A. Mednykh on enumeration of ramified coverings of Riemannian surfaces [1], several combinatorial techniques, and some results of G. Jones on solutions of some equations in finite groups [2].

Remark, that there is a well known correspondence between the number of subgroups of index n in the fundamental group of a manifold (orbifold) and the problem of counting n-sheeted coverings over the manifold (orbifold), initially stated by A. Hurwitz for branched coverings over Riemannian surfaces [3]. With a help of the general technique of A. Mednykh [4] for enumeration conjugacy classes of a finitely generated group our method can be used to count the number of coverings with given multiplicity over 2-dimensional orbifolds.

References

[1] *Mednykh A. D.* Nonequivalent coverings of Riemann surfaces with a prescribed ramification type // Siberian Math. J. 1984. V. 25. P. 606–625.

[1] Sobolev Institute of Mathematics, pr. Acad. Koptyug, 4, Novosibirsk 630090, Russia. E-mail: smn@math.nsc.ru

[2] *Jones G. A.* Counting subgroups of non-euclidean crystallographic groups // Math. Scand. 1999. V. 84. P. 23–39.

[3] *Hurwitz A.* Über Riemann'sche Elächen mit gegeben Verzweigungspunkten // Math. Ann. 1891. Bd. 39. P. 1–61.

[4] *Mednykh A. D.* Counting for conjugacy classes of subgroups in finitely generated group. (Preprint/arXiv:math, to appear).

Quasieuclidean Models of the Fomenko–Matveev–Weeks Manifold

Ruslan N. Shmatkov [1]

Sobolev Institute of Mathematics

In this paper two non-isomorphic Quasieuclidean models of the three-dimensional closed orientable hyperbolic manifold $\mathcal{M}_1$ are constructed. The manifold $\mathcal{M}_1$ was early constructed independently by S.V. Matveev, A.T. Fomenko [1] and J. Weeks [2]. The volume of this manifold is the least (known) of hyperbolic manifolds volumes.

A *three-dimensional hyperbolic manifold* is a factor space $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$, where Γ is a discrete isometry group acting without fixed points of the three-dimensional Lobachevskij space $\mathbb{H}^3$. The volume of the manifold M is defined by the natural way with a help of the volume in $\mathbb{H}^3$. We consider below only three-dimensional orientable hyperbolic manifolds with finite volumes.

Properties of hyperbolic manifolds are strongly different with properties of Euclidean and spherical manifolds.

The structure of the volume set for three-dimensional hyperbolic manifolds was described by W. Thurston and T. Jorgensen. According to Thurston–Jorgensen's Theorem [3], volumes of three-dimensional hyperbolic manifolds form the well-ordered non-discrete subset with the order type ω^ω on the real line. In particular, there is a closed manifold with the least volume.

In [2] J. Weeks calculated the volumes of hyperbolic manifolds, obtained by Dehn surgery on hyperbolic knots and links with a small order. It was performed with a help of his effective computer program SnapPea. In particular, during this calculation was found a closed hyperbolic manifold $\mathcal{M}_1$ with the least volume $(0.94\ldots)$.

At the same time S. V. Matveev and A. T. Fomenko constructed by another way a hyperbolic manifold, whose volume was equal numerically to the volume of Weeks manifold [1]. Since that time the manifold $\mathcal{M}_1$ is called as *Fomenko–Matveev–Weeks manifold*.

The isometry group of the manifold $\mathcal{M}_1$ was calculated by E. Molnar [4], and the orbifolds connected with the isometry group were completely described in the paper [5].

[1] Sobolev Institute of Mathematics, pr. Acad. Koptyug, 4, Novosibirsk 630090, Russia.
E-mail: ruslan@math.nsc.ru
This report is supported by RFBR (grant 03–01–00104a).

In particular, it was established in [5] that the manifold $\mathcal{M}_1$ can be obtained as a two-fold covering of the three-sphere branched over the knot 9_{49}, and as the regular three-fold covering of the three-sphere branched over the two-bridge knot 5_2.

In this paper Quasieuclidean models of the manifold $\mathcal{M}_1$ are constructed. The models arise as regular three-fold coverings over the two-bridge knot 5_2 with an isthmus (i.e. over knotted theta-graph).

Such a construction can be performed by two different ways giving two non-isomorphic Quasieuclidean structures on the manifold $\mathcal{M}_1$.

The main result of this paper is the following theorem.

Theorem. *There are two non-isomorphic Quasieuclidean models of the Fomenko–Matveev–Weeks manifold* $\mathcal{M}_1$.

References

[1] *Matveev S.V., Fomenko A.T.* Isoenergetic spaces of Hamiltonian systems, enumerating three-dimentional manifolds by increasing they complexity and volume calculating of closed hyperbolic manifolds // Usp. Mat. Nauk. 1988. V. 43, № 1. P. 5–22. (Russian).

[2] *Weeks J.* Hyperbolic structures on 3-manifolds. Ph.D. Thesis. Princeton: Princeton Univ., 1985.

[3] *Thurston W.* Three-dimentional Geometry and Topology. Princeton: Univ. Press, 1997.

[4] *Molnar E.* On isometries of space forms // Proc. Conf. on Differential Geometry and its Applications (Eger, 1989). Amsterdam: North-Holland, 1992, P. 509–534.

[5] *Mednykh A., Vesnin A.* Visualization of the isometry group action on the Fomenko-Matveev-Weeks manifold // J. Lie Theory. 1998. V. 8. P. 51–66.

Can You See the Fundamental Frequency of a Drum?

Mikhail Shubin [1]

Northeastern University

I will explain a joint result by V. Maz'ya and myself, which is based on the ideas of our paper [2]. An earlier result by V. Maz'ya and M. Otelbaev is described in [1]. Necessary definitions and results about the Wiener capacity can be found in [1, 3].

Let us consider an open set $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ and denote the bottom of the spectrum of its minus Dirichlet Laplacian $(-\Delta)_{\mathrm{Dir}}$ by $\lambda(\Omega)$. (We understand the minus Dirichlet Laplacian as the self-adjoint operator which is the Friedrichs extension of the operator $-\Delta$ defined on $C_0^\infty(\Omega)$.) In case when Ω is a bounded domain with a sufficiently regular boundary, $\lambda(\Omega)$ is the lowest eigenvalue of $-\Delta$ with the Dirichlet boundary condition on $\partial\Omega$. In the general case we can write

$$\lambda(\Omega) = \inf_{u \in C_0^\infty(\Omega)} \frac{\int\limits_\Omega |\nabla u|^2\, dx}{\int\limits_\Omega |u|^2\, dx}.$$

It follows that $\Omega' \subset \Omega$ implies $\lambda(\Omega) \leqslant \lambda(\Omega')$). In particular, if B_r is an open ball of radius r, such that $B_r \subset \Omega$, then $\lambda(\Omega) \leqslant \lambda(B_r) = C_n r^{-2}$ where $C_n = \lambda(B_1)$. It follows that for the interior radius of Ω, which is defined as

$$r_\Omega = \sup\{r \,|\, \exists B_r \subset \Omega\},$$

we have

$$\lambda(\Omega) \leqslant C_n r_\Omega^{-2}.$$

But this estimate is not good for unbounded domains or domains with complicated boundaries. In particular, a similar estimate from below does not hold in general.

The way to improve this estimate is to relax the requirement for B_r to be completely inside Ω by allowing some part of B_r, which has a "small" Wiener

[1] Department of Mathematics, Northeastern University, 360 Huntington Ave., Boston, MA 02115, USA.

E-mail: shubin@neu.edu

capacity, to stick out of Ω. Namely, let us take an *arbitrary* $\gamma \in (0,1)$ and call a compact set $F \subset \overline{B}_r$ negligible (or, more precisely, γ-negligible) if

$$\operatorname{cap}(F) \leqslant \gamma \operatorname{cap}(\overline{B}_r).$$

(Here $\operatorname{cap}(F)$ denotes the Wiener capacity of F, $\overline{B}_r$ is the closure of B_r.)

Now denote

$$r_{\Omega,\gamma} = \inf\{r \mid \exists B_r,\ \overline{B}_r \setminus \Omega \text{ is } \gamma-\text{negligible}\}.$$

This is the *interior capacitary radius.*

Theorem 1. *Let us fix $\gamma \in (0,1)$. Then there exist $c = c(\gamma, n) > 0$ and $C = C(\gamma, n) > 0$, such that for every open set $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*

$$c r_{\Omega,\gamma}^{-2} \leqslant \lambda(\Omega) \leqslant C r_{\Omega,\gamma}^{-2}.$$

Let us formulate some interesting corollaries of this theorem.

Corollary 1. $\lambda(\Omega) > 0$ *if and only if* $r_{\Omega,\gamma} < \infty$.

This corollary gives a necessary and sufficient condition of strict positivity of the operator $(-\Delta)_{\mathrm{Dir}}$ in Ω.

Since the condition $\lambda(\Omega) > 0$ does not contain γ, we immediately obtain

Corollary 2. *Conditions $r_{\Omega,\gamma} < \infty$, taken for different γ's, are equivalent.*

Denoting $F = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ (which can be an arbitrary closed subset in $\mathbb{R}^n$), we obtain from the previous corollary (comparing $\gamma = 0.01$ and $\gamma = 0.99$):

Corollary 3. *Let F be a closed subset in $\mathbb{R}^n$, which has the following property: there exists $r > 0$ such that*

$$\operatorname{cap}(\overline{B}_r \setminus \Omega) \geqslant 0.01 \operatorname{cap}(\overline{B}_r)$$

for all B_r. Then there exists $r_1 > 0$ such that

$$\operatorname{cap}(\overline{B}_{r_1} \setminus \Omega) \geqslant 0.99 \operatorname{cap}(\overline{B}_{r_1})$$

for all B_{r_1}.

This is a new property of capacity which is proved by spectral theory arguments.

Once upon a time Marc Kac formulated a fundamental and fascinating question: **"Can you hear the shape of a drum?"** The precise meaning of this question is as follows: is it possible to reconstruct the drum (a bounded domain in $\mathbb{R}^2$) up to an isometry by the spectrum of its Dirichlet Laplacian?

Theorem 1 suggest formulation of a question, which is roughly inverse to the question of Marc Kac: **"Can you see the fundamental frequency of a drum?"** More precisely, can you find a simple visual image related to a domain in $\mathbb{R}^2$ (or $\mathbb{R}^n$), such that it allows to recover the lowest eigenvalue of the Dirichlet Laplacian in this domain? Assuming that our eye can filter out the sets of small capacity, a partial answer to this question is given by Theorem 1.

References

[1] *Maz'ya V.* Sobolev spaces. Berlin: Springer, 1985.

[2] *Maz'ya V., Shubin M.* Discreteness of spectrum and positivity criteria for Schrödinger operators. 2003. (Preprint/arXiv:math.SP/0305278; `http://xxx.lanl.gov`, 19 May 2003).

[3] *Wermer J.* Potential theory. Berlin–New York: Springer, 1974. (Lecture Notes in Mathematics; 408).

Авторский указатель

Содержание