

О расстоянии Сасаки между направлениями метрического пространства и решение проблемы А.Д. Александрова о синтетическом описании римановых многообразий

1 Полевое и метрическое определение риманова пространства

Обычно риманово многообразие, или как ещё говорят, риманово пространство, определяется как пара $\langle \mathfrak{M}, g \rangle$, состоящая из связного дифференцируемого многообразия \mathfrak{M} размерности ≥ 2 и два раза ковариантного симметрического положительно определённого тензорного поля g на многообразии \mathfrak{M} ; g называется *метрическим тензором*. С физической точки зрения, риманово многообразие можно представлять как некое искривлённое пространство, в котором вместо силового поля действует более сложно устроенное поле метрического тензора, которое определяет все объекты римановой геометрии. Такое определение риманова пространства, восходящее к самому Риману, естественно называть *полевым определением*.

Классическая риманова геометрия изучает римановы пространства с по крайней мере непрерывной кривизной. Напомним, что в локальной системе координат

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

на \mathfrak{R} с координатными базисными векторами

$$X_1, X_2, \dots, X_n,$$

параллельный перенос задаётся с помощью символов Кристоффеля $\{\Gamma_{ij}^k\}_{i,j,k=1,2,\dots,n}$:

$$\begin{aligned} \nabla_{X_i} X_j &= \Gamma_{ij}^k X_k; \\ \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right), \end{aligned}$$

и, в свою очередь, тензор римановой кривизны вычисляется по символам Кристоффеля следующим образом:

$$R_{irq}^j = \frac{\partial \Gamma_{iq}^j}{\partial x^r} - \frac{\partial \Gamma_{ir}^j}{\partial x^q} + \Gamma_{iq}^k \Gamma_{kr}^j - \Gamma_{ir}^k \Gamma_{kq}^j.$$

Таким образом, требуется чтобы компоненты $\{g_{ij}\}$ метрического тензора g были по крайней мере дважды непрерывно дифференцируемы: $g \in C^2$. Следовательно, многообразие \mathfrak{R} должно быть по крайней мере трижды непрерывно дифференцируемым.

Определение 1 (Полевое определение риманова пространства) Пара $\langle \mathfrak{R}, g \rangle$, где \mathfrak{R} -- связное C^3 -дифференцируемое риманово многообразие размерности

$$\dim(\mathfrak{R}) \geq 2$$

и g -- C^2 -гладкий метрический тензор на нём, называется римановым многообразием.

Недостатком полевого определения является то, что приходится постулировать такие негеометрические условия как то, что \mathfrak{R} -- многообразие, а также интуитивно излишние требования гладкости, как для многообразия \mathfrak{R} , так и для метрического тензора g .

С другой стороны, на римановом пространстве естественным образом вводится специальное расстояние -- *риманова метрика*. В самом деле, если γ параметризованная кривая, или *путь*, в римановом пространстве $\langle \mathfrak{R}, g \rangle$, то её длина определяется интегралом

$$\ell_g(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt, \text{ где } |\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))}.$$

Тогда риманово расстояние задаётся следующим образом:

$$\rho_g(P, Q) = \inf_{\text{путь } \gamma \text{ соединяет } P \text{ и } Q} \{\ell_g(\gamma)\}.$$

Нетрудно доказать, что ρ_g -- метрика на \mathfrak{R} .

Начиная с работ К. Менгера и его учеников, и позже, благодаря работам А.Д. Александрова и его школы, было осознано, что на самом деле риманово пространство следует представлять в виде абстрактного искривлённого пространства, кривизна которого непрерывна в некотором чисто метрическом смысле. Задача метрического описания римановых пространств состоит в том, чтобы найти такие условия на функцию расстояния, при выполнении которых, а также некоторых простых топологических условий, данное метрическое пространство оказывается изометричным классическому (т.е., C^2 -гладкому) риманову многообразию.

2 Метрическое описание двумерных римановых пространств

В 1935 году, Абрахам Вальд получил первое метрическое описание двумерных римановых многообразий с непрерывной кривизной. Одно из основных условий, накладываемых Вальдом на функцию расстояния метрического пространства состояло в том, что данное метрическое пространство, в каждой его точке, имеет кривизну K_W , называемая кривизной Вальда. Кривизна K_W определяется с помощью так называемых *кривизн погружения* четвёрок различных точек.

Четвёрка точек имеет кривизну погружения K если она погружается изометрически на поверхность постоянной кривизны K . Метрическое пространство (M, ρ) имеет кривизну Вальда $K_W(P)$ в его точке P , если для произвольного положительного ε найдётся $\sigma > 0$, такое что каждая четвёрка различных точек из шара $B_M(P, \sigma)$ и которая содержит линейную тройку точек (т.е., тройку, изометричную некоторой тройке на прямой линии) обладает кривизной погружения K , такой что $|K_W(P) - K| < \varepsilon$.

В 1948 году, описывая работы А. Вальда, К. Менгер так оценил теорему Вальда о метрическом описании двумерных римановых пространств:

"... Я осмелюсь предположить, что только что сформулированная теорема (т.е., теорема Вальда) станет краеугольным камнем геометрии будущего... Этот результат должен убедить геометров осознать, что (вопреки традиционной точке зрения) фундаментальное понятие кривизны не зависит от координат, уравнений, параметризаций или условий дифференцируемости..."

В 1948 году, А.Д. Александров использовал существенно иной подход для того, чтобы получить метрическое описание двумерных римановых многообразий с непрерывной кривизной. Определение кривизны двумерного метрического пространства по А.Д. Александрову основано на теореме Гаусса-Боннэ. Оно получается рассмотрением отношений $\delta(T) / S(T)$, где T -- геодезический треугольник, $\delta(T)$ -- его избыток, т.е., сумма его углов в вершинах минус π , а $S(T)$ -- площадь евклидова треугольника с теми же длинами сторон. Теорема Александрова, вместе с классическими результатами Ю.Г. Решетняка, даёт полное решение проблемы метрического описания двумерных римановых пространств.

Отметим, что в серии работ, Ю.Ф. Борисов получил метрическое описание римановых многообразий как пространств, метрика которых является приближённо локально евклидовой.

3 Проблема А.Д. Александрова

В 1982 году, А.Д. Александров поместил задачу о метрическом описании многомерных римановых многообразий в список нерешённых проблем синтетической геометрии. Следует отметить, что двумерный случай сильно отличается от многомерного; в двумерном случае кривизна есть функция точки, в то время как в многомерном случае секционная кривизна является функцией определённой на Грассмановом многообразии $G(\mathbb{R}, 2, n)$.

Заметим, что кривизна Вальда может быть определена и в многомерном случае.

- Четвёрка точек имеет кривизну погружения K если она погружается изометрически в пространство постоянной кривизны K .
- Метрическое пространство (M, ρ) имеет кривизну Вальда $K_W(P)$ в его точке P , если для произвольного положительного ε найдётся $\sigma > 0$, такое что каждая четвёрка различных точек из шара $B_M(P, \sigma)$ обладает кривизной погружения K , такой что

$$|K_W(P) - K| < \varepsilon.$$

В 1995 году, автором доказана следующая теорема.

Теорема 2 Пусть (M, ρ) -- локально компактное геодезически полное метрическое пространство с внутренней метрикой и такое что размерность Урысона-Менгера пространства (M, ρ) больше двух. Предположим, что кривизна Вальда $K_W(P)$ существует в каждой точке $P \in M$. Тогда (M, ρ) изометрично бесконечно-гладкому риманову пространству постоянной кривизны.

Таким образом, прямое обобщение метрического описания А. Вальда двумерных римановых пространств на многомерный случай не имеет места. Подход А.Д. Александрова оказывается более плодотворным. В следующем параграфе, мы перейдём к описанию основных понятий метрической геометрии.

4 Основные понятия метрической геометрии

Напомним, что метрическое пространство определяется как пара (M, ρ) , состоящая из множества M и функции $\rho : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+$, где \mathbb{R}_+ -- множество неотрицательных чисел, которая положительно определена ($\rho(X, Y) \geq 0$ и $\rho(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$), симметрична ($\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$) и удовлетворяет неравенству треугольника:

$$\rho(X, Y) \leq \rho(X, Z) + \rho(Z, Y).$$

Напомним, что путь в (M, ρ) есть непрерывное отображение $\gamma : [a, b] \rightarrow M$.

Длина пути γ вводится стандартным образом:

$$\ell\rho(\gamma) = \sup_{a=t_0 < \dots < t_{n-1} < t_n=b} \sum_{j=0}^{n-1} \rho(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})) \leq +\infty.$$

- Для дальнейшего заметим, что длина кривой γ также может быть вычислена по формуле:

$$\ell\rho(\gamma) = \lim_{\max_j \rho(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})) \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} \rho(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1}))$$

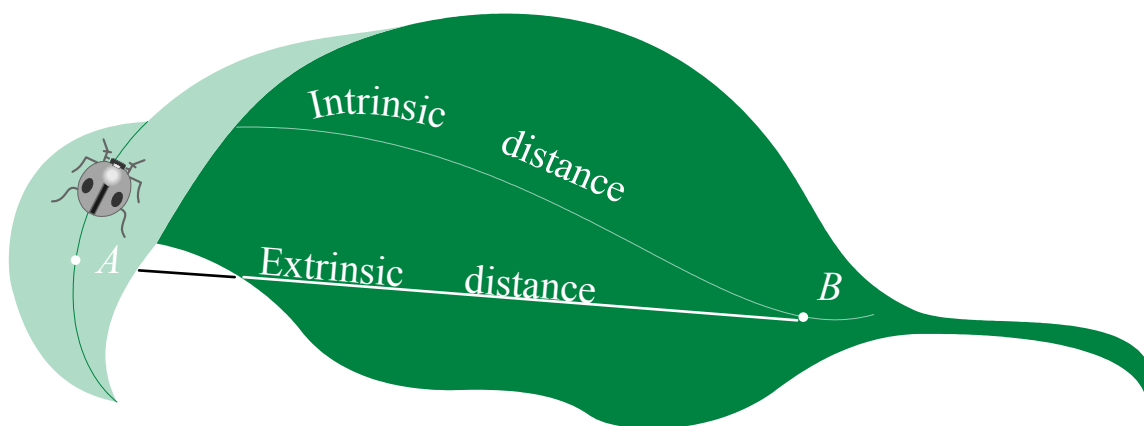
Индукцированное расстояние на M вводится следующим образом:

$$\rho_{ind}(X, Y) = \begin{cases} \inf_{\gamma \text{ соединяет } X \text{ и } Y} \ell\rho(\gamma), \\ \text{если } X \text{ и } Y \text{ соединимы путём.} \\ +\infty, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Метрическое пространство (M, ρ) называется *метрически связным*, если $\rho_{ind} \neq +\infty$; иными словами, (M, ρ) метрически связно, если любые две его точки соединимы путём конечной длины. Нетрудно доказать, что для метрически связного пространства, ρ_{ind} является (вообще говоря, новой) метрикой на M .

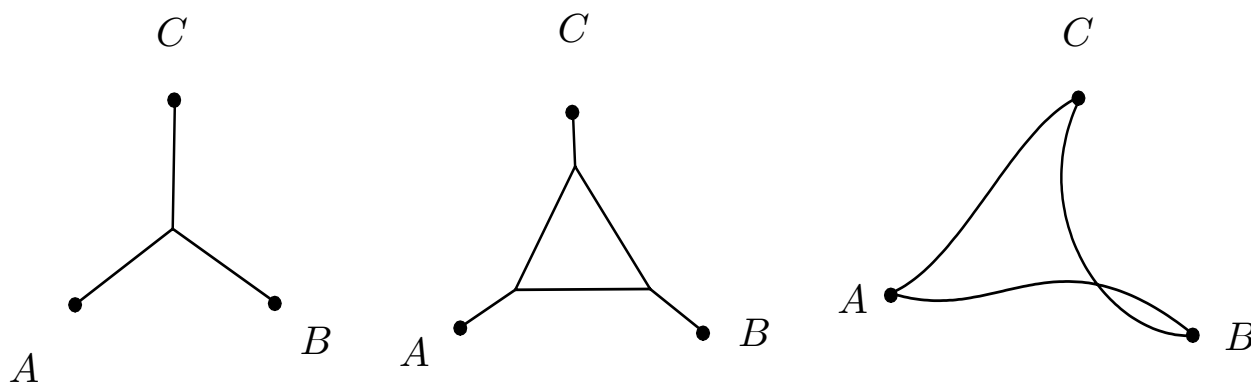
Определение 3 *Метрически связное метрическое пространство* (M, ρ) называется метрическим пространством с внутренней метрикой, если $\rho = \rho_{ind}$.

Следующий рисунок иллюстрирует понятие внутренней метрики.



Метрическое пространство (M, ρ) называется (локально) геодезически связным, если любые две её (достаточно близкие) точки соединимы по крайней мере одной кратчайшей.

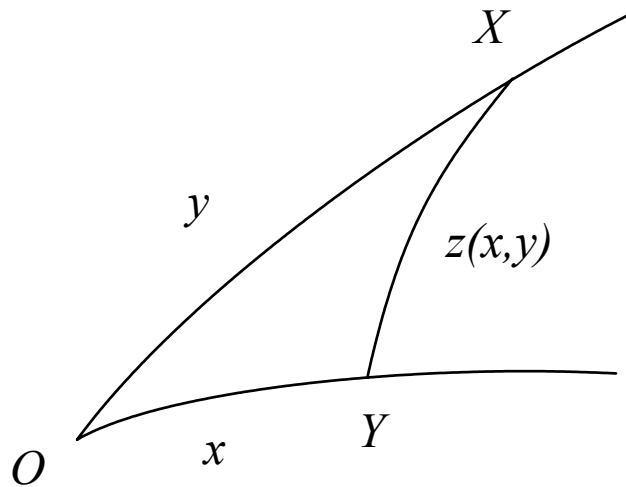
Треугольник в метрическом пространстве (M, ρ) есть множество в M , состоящее из точек кратчайших, соединяющих попарно три различные точки A, B, C , называемые вершинами. Кратчайшие AB, BC и AC называются сторонами треугольника $T = ABC$.



Между двумя любыми кривыми, исходящими из общей точки O определён *верхний угол* Александрова:

$$\cos \gamma = \lim_{x,y \rightarrow 0} \frac{x^2 + y^2 - z^2(x,y)}{2xy};$$

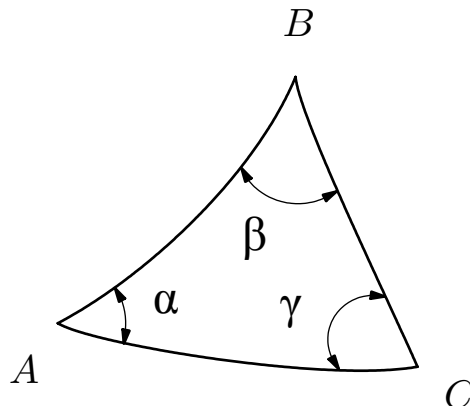
обозначения объяснены на рисунке:



Если \mathcal{T} -- треугольник в метрическом пространстве (M, ρ) , то его *избыток* есть величина

$$\delta(\mathcal{T}) = \alpha + \beta + \gamma - \pi,$$

где α, β и γ -- верхние углы при вершинах \mathcal{T} .



Площадь треугольника \mathcal{T} , $S(\mathcal{T})$, определяется как площадь изометрического треугольника на евклидовой плоскости.

Если \mathcal{T} -- треугольник на сфере кривизны K , то по известной формуле Луилиера (L'Huilier),

$$\begin{aligned} & \tan^2 \frac{\delta(\mathcal{T})}{4} \\ &= \tan \sqrt{K} \frac{s}{2} \tan \sqrt{K} \frac{s-a}{2} \tan \sqrt{K} \frac{s-b}{2} \tan \sqrt{K} \frac{s-c}{2}, \end{aligned}$$

где a, b, c -- длины сторон треугольника \mathcal{T} и

$$s = (a + b + c) / 2.$$

Отсюда легко получить, что кривизна сферы в точке P может быть вычислена по формуле

$$K = \lim_{\mathcal{T} \rightarrow P, \mathcal{T} \text{ -- невырожденный}} \frac{\delta(\mathcal{T})}{S(\mathcal{T})}.$$

Это наблюдение мотивирует следующее условие на кривизну метрического пространства. Пусть (M, ρ) -- локально геодезически связное метрическое пространство с внутренней метрикой и пусть \mathcal{T} -- треугольник в M . Верхняя кривизна треугольника \mathcal{T} в M есть

$$\overline{K}(\mathcal{T}) = \begin{cases} \delta(\mathcal{T})/S(\mathcal{T}), & \text{если } S(\mathcal{T}) \neq 0 \\ +\infty, & \text{если } \delta(\mathcal{T}) > 0 \text{ и } S(\mathcal{T}) = 0 \\ -\infty, & \text{если } \delta(\mathcal{T}) \leq 0 \text{ и } S(\mathcal{T}) = 0 \end{cases}.$$

Аналогично определяется *нижняя кривизна треугольника* \mathcal{T} :

$$\underline{K}(\mathcal{T}) = \begin{cases} \delta(\mathcal{T})/S(\mathcal{T}), & \text{если } S(\mathcal{T}) \neq 0 \\ +\infty, & \text{если } \delta(\mathcal{T}) \geq 0 \text{ и } S(\mathcal{T}) = 0 \\ -\infty, & \text{если } \delta(\mathcal{T}) < 0 \text{ и } S(\mathcal{T}) = 0 \end{cases} .$$

Верхняя и нижняя кривизны метрического пространства (\mathcal{M}, ρ) в точке $P \in \mathcal{M}$ есть величины:

$$\overline{K}_{\mathcal{M}}(P) = \overline{\lim}_{\mathcal{T} \rightarrow P} \overline{K}(\mathcal{T}); \underline{K}_{\mathcal{M}}(P) = \underline{\lim}_{\mathcal{T} \rightarrow P} \underline{K}(\mathcal{T}).$$

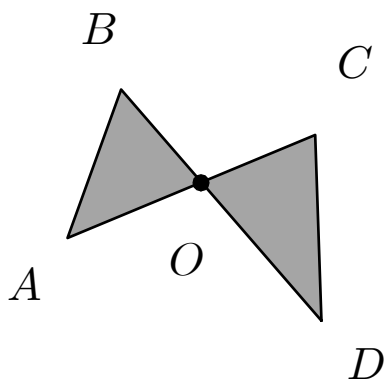
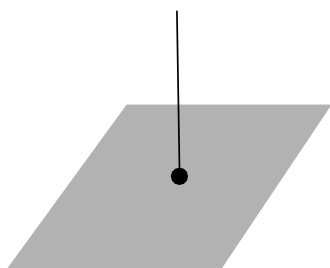
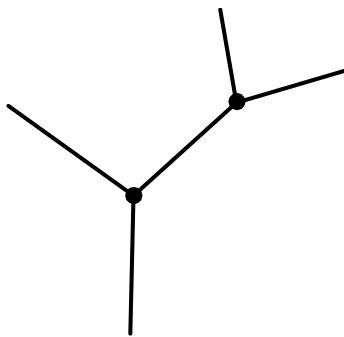
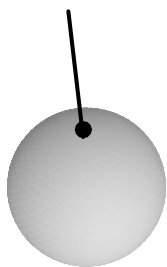
- Например, если $M = \mathbb{R}$, то, как легко видеть, для каждой точки $P \in \mathcal{M}$,

$$\overline{K}_{\mathcal{M}}(P) = -\infty \text{ и } \underline{K}_{\mathcal{M}}(P) = +\infty.$$

- Метрическое пространство (\mathcal{M}, ρ) называется пространством кривизны $\leq K$ в смысле Александрова, если, для каждой точки $P \in \mathcal{M}$, выполнено:

$$\overline{K}_{\mathcal{M}}(P) \leq K.$$

Ниже на рисунке даны примеры пространства кривизны ≤ 1 и пространств кривизны ≤ 0 .



5 Пространства с ограниченной кривизной

В 50-х годах, А.Д. Александров ввёл понятие метрического пространства с двусторонне ограниченной кривизной. Мы приводим слегка изменённую версию определения Александрова.

Определение 4 *Локально геодезически связное метрическое пространство (M, ρ) с внутренней метрикой называется пространством с ограниченной кривизной, если выполнены следующие условия:*

(а) *(Условие локальной продолжаемости геодезических)*

Для каждой точки $P \in M$, некоторый открытый шар $B_M(P, r)$ обладает тем свойством, что каждая геодезическая $XU \subseteq B_M(P, r)$ может быть продолжена за конец U .

(б) *(M, ρ) -- локально компактно.*

(в) *(Ограниченность кривизны) Для каждой точки $P \in M$, $\overline{K}_M(P) < +\infty$, $\underline{K}_M(P) > -\infty$.*

В 1975 году, В.Н. Берестовский доказал, что пространство с ограниченной кривизной изометрично риманову многообразию $\langle M, g \rangle$, где M -- C^1 -гладкое многообразие, а g -- непрерывный метрический тензор на M .

В 1979 году, автор доказал, что на самом деле, метрическое пространство с ограниченной кривизной изометрично риманову многообразию $\langle M, g \rangle$, где M -- $C^{4,\alpha}$ -гладкое многообразие и g -- метрический тензор класса

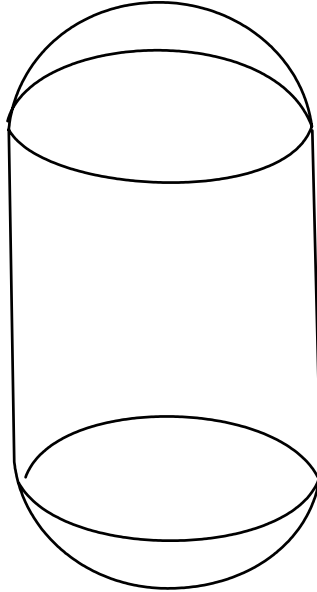
$$W_p^2 \cap C^{1,\alpha},$$

где p -- произвольное число, не меньшее единицы и где α произвольное число между нулём и единицей. $C^{4,\alpha}$ -структура на M задаётся так называемыми гармоническими координатами. Мы будем ссылаться на этот результат как на *теорему гладкости* для пространств с ограниченной кривизной. Согласно теореме гладкости, в почти всех точках M (в смысле n -мерной меры Хаусдорфа) пространства с ограниченной кривизной определена (формальная) секционная кривизна

$$K_\sigma^f(P).$$

В общем случае, функция кривизны не является всюду определённой и непрерывной, как показывает следующий пример.

Пример 5 Пусть M -- круговой цилиндр радиуса 1, завершённый двумя сферическими шапочками радиуса 1, как показано на рисунке.

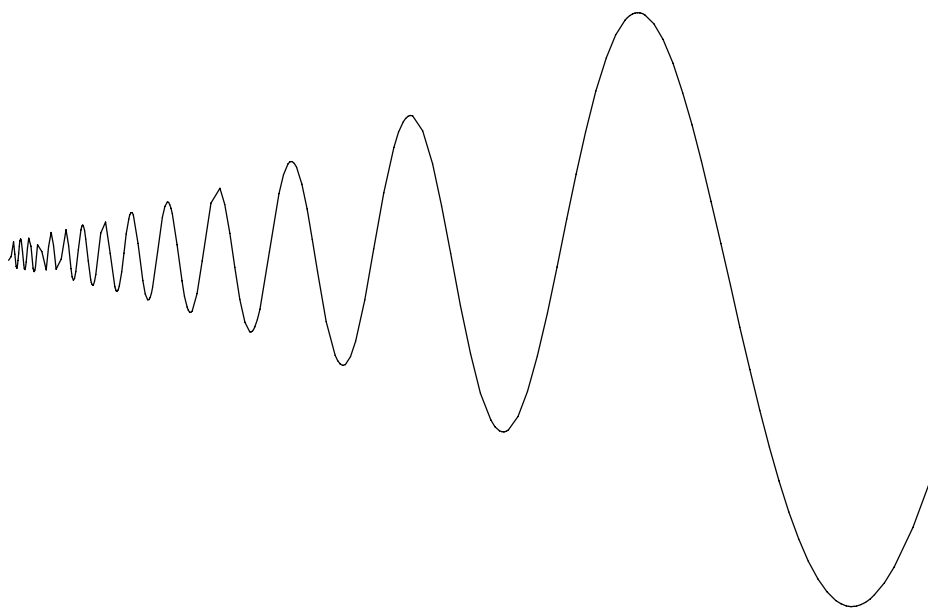


Ясно, что кривизна боковой поверхности цилиндра равна нулю, в то время как кривизна верхней и нижней сферической шапочки равна единице. Легко проверяется, что M -- пространство с ограниченной кривизной; кривизна является разрывной функцией, кривизна не определена на линиях пересечения цилиндра и сферических шапочек.

Теорему гладкости можно рассматривать как частичное решение проблемы Александрова о метрическом описании многомерных римановых пространств; такое описание получается только для “почти римановых” пространств, у которых кривизна, вообще говоря, разрывна и определена только для почти всех точек многообразия.

6 Пространство направлений

Определение 6 Кривая \mathcal{L} , исходящая из точки P метрического пространства (M, ρ) имеет в этой точке определённое направление, если верхний угол, который она образует сама с собой в P равен нулю: $\angle(\mathcal{L}, \mathcal{L}) = 0$.



- Для кривой в евклидовом пространстве, существование направления эквивалентно существованию поперекательной в соответствующей точке.

Пусть $\Lambda_P(M)$ обозначает множество всех кривых, исходящих из точки P , которые имеют определённое направление в точке P . Введём отношение эквивалентности на $\Lambda_P(M)$. Положим:

$$\mathcal{L}_1 \sim \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow \angle(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = 0.$$

Известно, что верхние углы удовлетворяют неравенству треугольника. Поэтому нетрудно доказать, что “ \sim ” действительно является отношением эквивалентности на $\Lambda_P(M)$.

Определение 7 (Пространство направлений) Пусть (M, ρ) -- метрическое пространство. Тогда

$$\Omega_P(M) = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } \Lambda_P(M) = \emptyset \\ \Lambda_P(M) / \sim, & \text{если } \Lambda_P(M) \neq \emptyset \end{cases}$$

называется пространством направлений в точке P ; элементы множества $\Omega_P(M)$ называются направлениями в точке P . Далее, $\Pi : \Lambda_P(M) \rightarrow \Omega_P(M)$ обозначает каноническую проекцию.

В пространстве направлений естественным образом вводится расстояние:

$$\angle(\xi, \zeta) = \angle(\Pi^{-1}(\xi), \Pi^{-1}(\zeta)), \xi, \zeta \in M.$$

Пусть $\Pi(\mathcal{L}) = \Pi(\mathcal{L}') = \xi$ и $\Pi(\mathcal{N}) = \Pi(\mathcal{N}') = \zeta$. По неравенству треугольника для верхних углов,

$$\angle(\mathcal{L}, \mathcal{N}) \leq \angle(\mathcal{L}, \mathcal{L}') + \angle(\mathcal{L}', \mathcal{N}') + \angle(\mathcal{N}, \mathcal{N}').$$

Вспоминая, что $\angle(\mathcal{L}, \mathcal{L}') = 0$ и $\angle(\mathcal{N}, \mathcal{N}') = 0$, получаем: $\angle(\mathcal{L}, \mathcal{N}) \leq \angle(\mathcal{L}', \mathcal{N}')$. Аналогично,

$$\angle(\mathcal{L}', \mathcal{N}') \leq \angle(\mathcal{L}, \mathcal{N}).$$

Таким образом, $\angle(\mathcal{L}', \mathcal{N}') = \angle(\mathcal{L}, \mathcal{N})$ и $\angle(\xi, \zeta)$ не зависит от кривых, задающих направления ξ и ζ . Ясно, что $(\Omega_P(M), \angle)$ является метрическим пространством.

7 Касательное пространство M_P

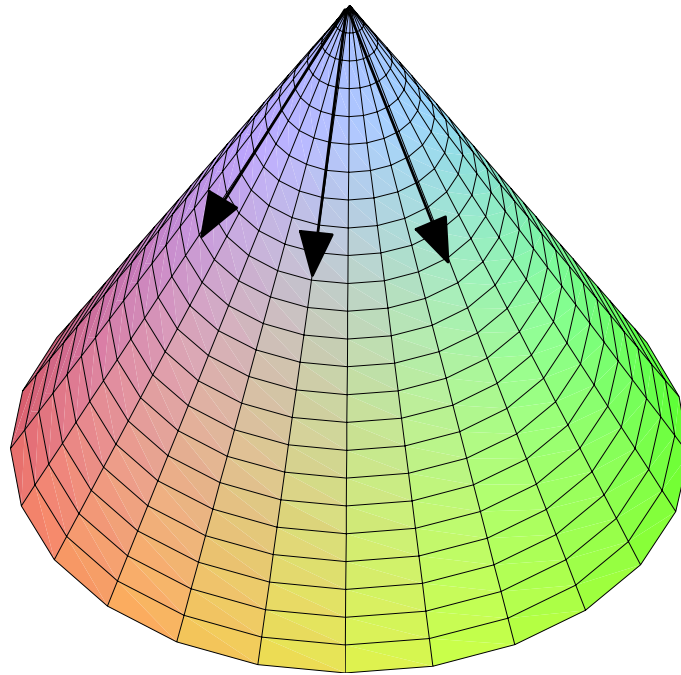
Предположим, что $\Omega_P(M) \neq \emptyset$. Касательный элемент, или касательный вектор определяется как пара $[\xi, x]$, где $\xi \in \Omega_P(M)$ и $x \geq 0$; при этом, все касательные элементы $[\xi, 0]$ отождествляются в одну точку, обозначаемую $\vec{0}_P = \{P\}$. Условимся использовать формальные векторные обозначения: $\vec{u} = [\xi, x]$ и $x = |\vec{u}|$ -- длина вектора \vec{u} . Если $|\vec{u}| \neq 0$, полагаем: $\xi = \vec{u} / |\vec{u}|$. Касательное пространство к M в точке P , M_P , есть множество, состоящее из всех касательных векторов. Метрика между касательными элементами определяется величиной:

$$\begin{aligned} & \tau_P([\xi, x], [\zeta, y]) \\ = & \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \angle(\xi, \zeta)}, & \text{если } x > 0 \text{ и } y > 0, \\ |x - y|, & \text{в противном случае} \end{cases} \end{aligned}$$

Если $\Omega_P(M) = \emptyset$, полагаем

$$\vec{0}_P = P, M_P = \{\vec{0}_P\}, \tau_P(\vec{0}_P, \vec{0}_P) = 0.$$

Пример 8 *Касательное пространство к конусу в его вершине изометрично самому конусу.*



8 Условие существования кривизны

Для того, чтобы определить аналог секционной кривизны для метрического пространства, необходимо ввести понятие двумерного направления.

Определение 9 (Двумерное направление) *Пара направлений (ξ, ζ) , $\xi, \zeta \in \Omega_P(M)$, называется двумерным направлением, если*

$$0 < \angle(\xi, \zeta) < \pi.$$

Множество всех двумерных направлений в точке $P \in M$ обозначается через $\Omega_P^2(M)$.

Пусть $\sigma = (\xi, \zeta) \in \Omega_P^2(M)$ и $\sigma' = (\xi', \zeta') \in \Omega_P^2(M)$. Введём расстояние между двумерными направлениями:

$$\psi(\sigma, \sigma') = \max \{ \angle(\xi, \xi'), \angle(\zeta, \zeta') \}.$$

Предположим, что $\Omega_P^2(M) \neq \emptyset$. Пусть

$$\{\mathcal{T}_k = PB_kC_k\}_{k=1,2,\dots}$$

-- последовательность невырожденных треугольников в M и $\sigma \in \Omega_P^2(M)$. Мы говорим, что последовательность $\{\mathcal{T}_k\}_{k=1,2,\dots}$ σ -сходится к точке P (обозначение $\mathcal{T}_k \xrightarrow{\sigma} P$), если

$$\lim_{k \rightarrow \infty} B_k = \lim_{k \rightarrow \infty} C_k = P \text{ и } \lim_{k \rightarrow \infty} \psi(\sigma, \sigma_k) = 0,$$

где

$$\sigma_k = \sigma(\mathcal{T}_k) = (\xi_k, \zeta_k), \xi_k = \Pi(\mathcal{PB}_k), \zeta_k = \Pi(\mathcal{PC}_k).$$

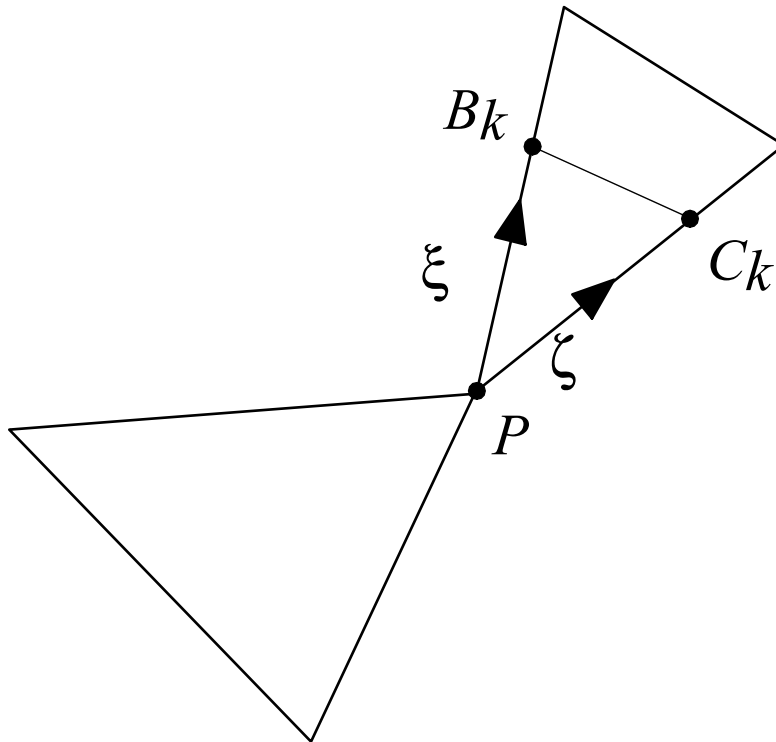
Определение 10 Метрическое пространство (M, ρ) имеет секционную кривизну $K_\sigma(P)$ в точке P в направлении $\sigma \in \Omega_P^2(M)$, если

(а) Найдётся последовательность невырожденных треугольников $\{\mathcal{T}_k = PB_kC_k\}_{k=1,2,\dots}$ в M , которая σ -сходится к точке P .

(б) Для любой последовательности невырожденных треугольников $\{\mathcal{T}'_k = PB'_kC'_k\}_{k=1,2,\dots}$ в M , которая σ -сходится к точке P , предел

$$\lim_{\mathcal{T}'_k \xrightarrow{\sigma} P} \frac{\delta(\mathcal{T}'_k)}{S(\mathcal{T}'_k)}$$

существует и равен $K_\sigma(P)$.



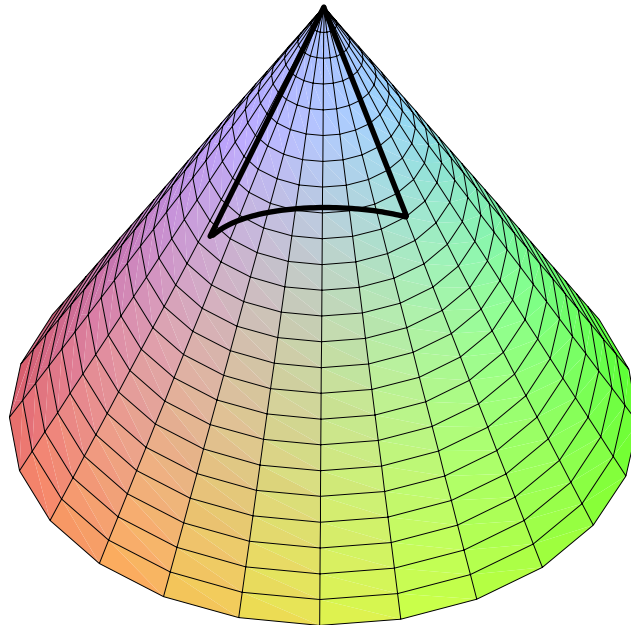
Определение 11 Секционная кривизна метрического пространства (M, ρ) в точке P существует, если

(а) $\Omega_P^2(M) \neq \emptyset$.

(б) $K_\sigma(P)$ существует, для каждого двумерного направления $\sigma \in \Omega_P^2(M)$.

Следующий пример показывает, что существования секционной кривизны в каждой точке метрического пространства недостаточно для “римановости” метрического пространства.

Пример 12 Рассмотрим правильный конус в евклидовом пространстве.



Секционная кривизна в вершине конуса существует и равна нулю. В то же время, верхняя кривизна в вершине конуса бесконечна.

Определение 13 (Условие существования кривизны)

Мы говорим, что кривизна метрического пространства (M, ρ) в точке P существует, если

(а) Секционная кривизна в точке P существует.

(б) $\overline{K}_M(P) < +\infty$; $\underline{K}_M(P) > -\infty$.

Секционная кривизна классического риманова пространства зависит непрерывно как от точки пространства так и от двумерного направления. В римановом многообразии, расстояния между двумерными направлениями в различных точках описывается с помощью расстояния Сасаки в касательном расслоении.

Пусть (M, ρ) -- произвольное метрическое пространство. Напомним, что M_P обозначает множество касательных векторов к M в точке P . Полагаем:

$$\tilde{T}(M) = \cup_{P \in M} M_P.$$

Для того, чтобы решить задачу метрического описания римановых пространств, нам необходимо построить аналог расстояния Сасаки на $\tilde{T}(M)$. Прежде, чем мы перейдём к обсуждению конструкции метрики Сасаки, нам необходимо ввести следующие предварительные понятия.

9 Полуметрическое пространство

Напомним, что пара (M, d) , где $d : M \times M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, называется дистанционным пространством. Дистанционное пространство называется полуметрическим (в терминологии К. Менгера), если его функция расстояния положительно определена и симметрична, т.е.,

$$(a) \quad d(X, Y) \geq 0 \text{ и } d(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y.$$

$$(б) \quad d(X, Y) = d(Y, X).$$

Пример 14 $(\mathbb{R}, d(x, y) = |x - y|^2)$.

В полуметрическом пространстве вводится функционал длины также как это делается в метрическом пространстве. Напомним, что путь в полуметрическом пространстве (M, d) есть непрерывное (относительно расстояния d) отображение $\gamma : [a, b] \rightarrow M$. Разобьём отрезок $[a, b]$ точками

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Функционал нижней длины задаётся следующим образом:

$$\underline{\ell}_d(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty, \max_j d(\gamma(t_{j+1}), \gamma(t_j)) \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} d(\gamma(t_{j+1}), \gamma(t_j)).$$

- Заметим, что существование таких разбиений отрезка $[a, b]$, что $\max_j d(\gamma(t_{j+1}), \gamma(t_j)) \rightarrow 0$ не очевидно и должно быть доказано.

Путь γ соединяет точки P и Q , если $\gamma(a) = P$ и $\gamma(b) = Q$. Пусть $P, Q \in M$. Индуцированное расстояние \tilde{d}_{ind} между P и Q вводится следующим образом:

$$\tilde{d}_{ind}(P, Q) = \begin{cases} \inf_{\gamma \text{ соединяет } P \text{ и } Q} \{\underline{\ell}_d(\gamma)\}, \\ \text{если } P \text{ и } Q \text{ соединимы путём}; \\ +\infty, \text{ в противном случае} \end{cases} .$$

Следующие свойства очевидны:

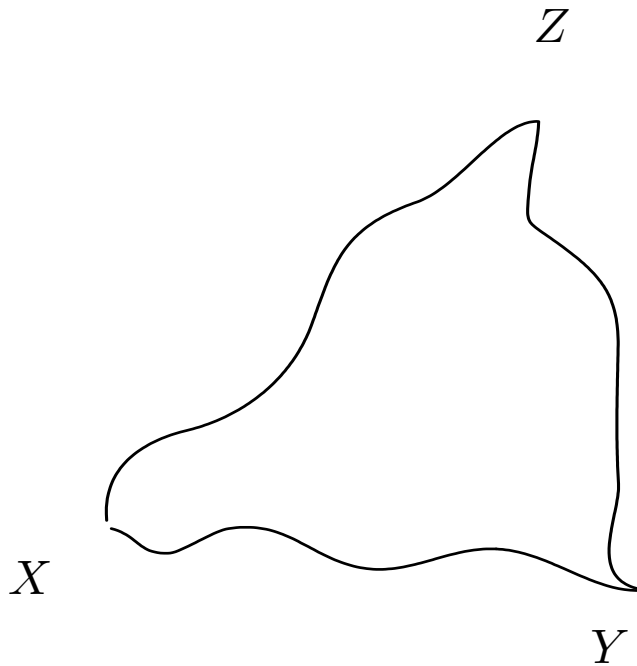
- В метрическом пространстве, $\ell_d = \underline{\ell}_d$.
- $\tilde{d}_{ind} : M \times M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$.
- Поскольку полуметрика d симметрична и неотрицательна, то \tilde{d}_{ind} симметрична и неотрицательна.

В общем случае, \tilde{d}_{ind} не является положительно определённой.

Пример 15 Рассмотрим полуметрическое пространство $(\mathbb{R}, d(x, y) = |x - y|^2)$. Рассмотрим путь $\gamma(t) = t, 0 \leq t \leq 1$. Рассмотрим разбиение отрезка $[0, 1]$ точками $x_j = j/n, j = 0, 1, 2, \dots, n$. Тогда

$$0 \leq \tilde{d}_{ind}(0, 1) \leq \underline{\ell}_d(\gamma) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Нетрудно доказать, что \tilde{d}_{ind} удовлетворяет неравенству треугольника.



Определение 16 *Дистанционное пространство (M, d) , $d : M \times M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, называется расширенным псевдометрическим пространством, если*

(a) $d(X, X) = 0$.

(б) $d(X, Y) = d(Y, X)$.

(в) $d(X, Y) \leq d(X, Z) + d(Z, Y)$, для всех $X, Y, Z \in M$.

Таким образом, если (M, d) полуметрическое пространство, то (M, \tilde{d}_{ind}) -- расширенное псевдометрическое пространство.

Определение 17 *Расширенное псевдометрическое пространство (M, d) называется расширенным метрическим пространством если*

$$d(X, Y) = 0 \Rightarrow X = Y.$$

- Пусть (M, d) -- расширенное метрическое пространство. Для точек $P, Q \in M$ введём отношение эквивалентности:

$$P \sim Q \Leftrightarrow d(P, Q) < +\infty.$$

Таким образом, расширенное метрическое пространство единственным образом представляется объединением непересекающихся метрических пространств -- классов эквивалентных точек.

Теперь мы переходим к обсуждению конструкции метрики Сасаки.

10 Метрика Сасаки в римановом пространстве

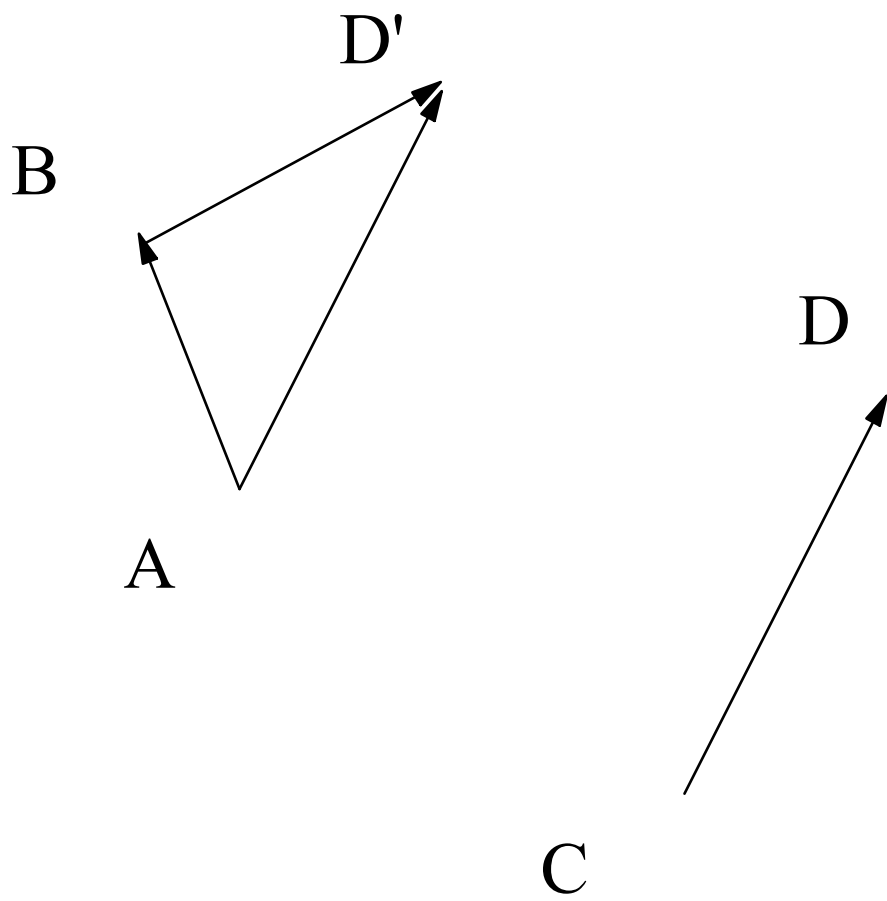
Если $\langle \mathfrak{R}, g \rangle$ риманово многообразие и $T(\mathfrak{R})$ его касательное расслоение, то длина пути $\Xi : [a, b] \rightarrow T(\mathfrak{R})$, $\Xi(t) = [c(t), \xi(t)]$, где $c(t)$ -- путь в \mathfrak{R} , а $\xi(t) \in \mathfrak{R}_{c(t)}$, задаётся следующим образом в метрике:

$$\ell_S(\Xi) = \int_a^b \sqrt{|\dot{c}(t)|^2 + |\nabla_{\dot{c}(t)} \xi(t)|^2} dt.$$

Расстояние Сасаки между двумя точками $T(\mathfrak{R})$ задаётся как точная нижняя граница длин путей в $T(\mathfrak{R})$, соединяющих данные точки. К метрике Сасаки можно также прийти, используя приведённые выше конструкции построения расширенной метрики по полуметрике. Для простоты, начнём с ситуации, когда $\mathfrak{R} = \mathbb{R}^n$. Если \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} два вектора в \mathbb{R}^n , то расстояние между ними естественно измерять величиной

$$S(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \sqrt{AC^2 + |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD'}|^2},$$

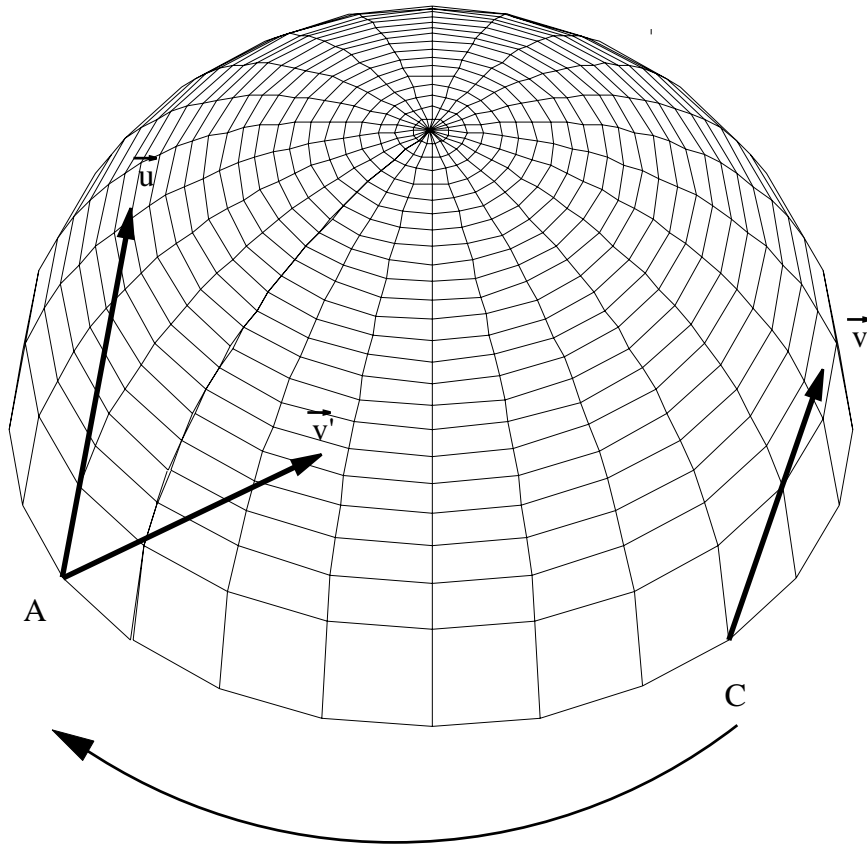
где вектор $\overrightarrow{AD'}$ получается из вектора \overrightarrow{CD} параллельным переносом в точку A .



В римановом пространстве, параллельный перенос в точку A производится с помощью параллельного переноса Леви-Чивита вдоль кратчайшей, соединяющей точки A и C , предполагая, что эти точки соединимы кратчайшей. Для $\vec{u}, \vec{v} \in T(\mathfrak{R})$, полагаем:

$$S(\vec{u}, \vec{v}) = \sqrt{AC^2 + |\vec{u} - \vec{v}'|^2},$$

где $\vec{u} \in \mathfrak{R}_A, \vec{v} \in \mathfrak{R}_C$, и \vec{v}' получается из \vec{v} параллельным переносом из точки C в точку A .



Ясно, что $S(\vec{u}, \vec{v})$ является полуметрикой на $T(\mathfrak{R})$. Эта полуметрика индуцирует метрику Сасаки на $T(\mathfrak{R})$.

11 Построение аналога для $|\vec{u} - \vec{v}'|$ в метрическом пространстве

Главной идеей конструкции полуметрики Сасаки на обобщённом касательном расслоении является понятие “четырёхугольного косинуса” cosq (quadrilateral cosine), которое позволяет ввести аналог для величины

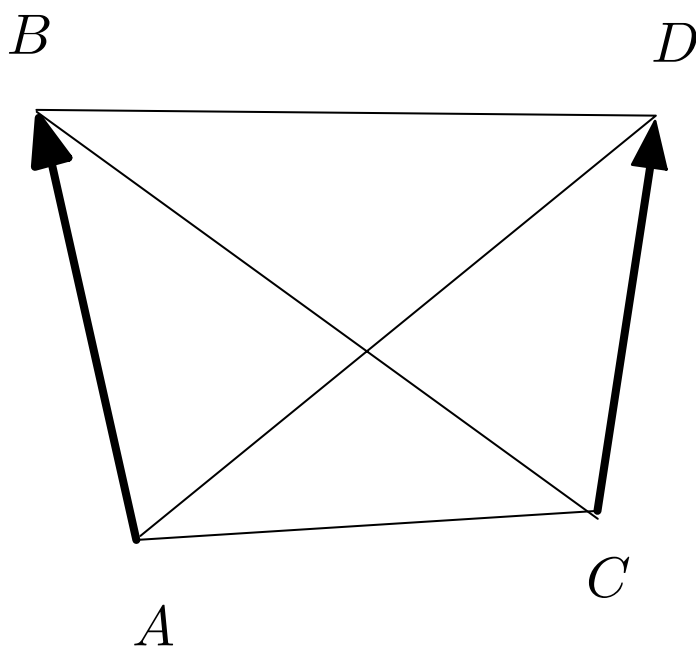
$$|\vec{u} - \vec{v}'|$$

в определении полуметрики Сасаки для касательных расслоений римановых пространств. Теперь мы перейдём к конструкции cosq . Для упорядоченной пары точек (A, B) , где $A, B \in M$, мы используем обозначение \overrightarrow{AB} .

11.1 Определение cosq

Определение 18 Пусть $\{A, B, C, D\}$ -- четвёрка различных точек в M . Тогда

$$\begin{aligned} \text{cosq} \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \right) \\ = \frac{\rho^2(A, D) + \rho^2(B, C) - \rho^2(A, C) - \rho^2(B, D)}{2\rho(A, B) \cdot \rho(C, D)}. \end{aligned}$$

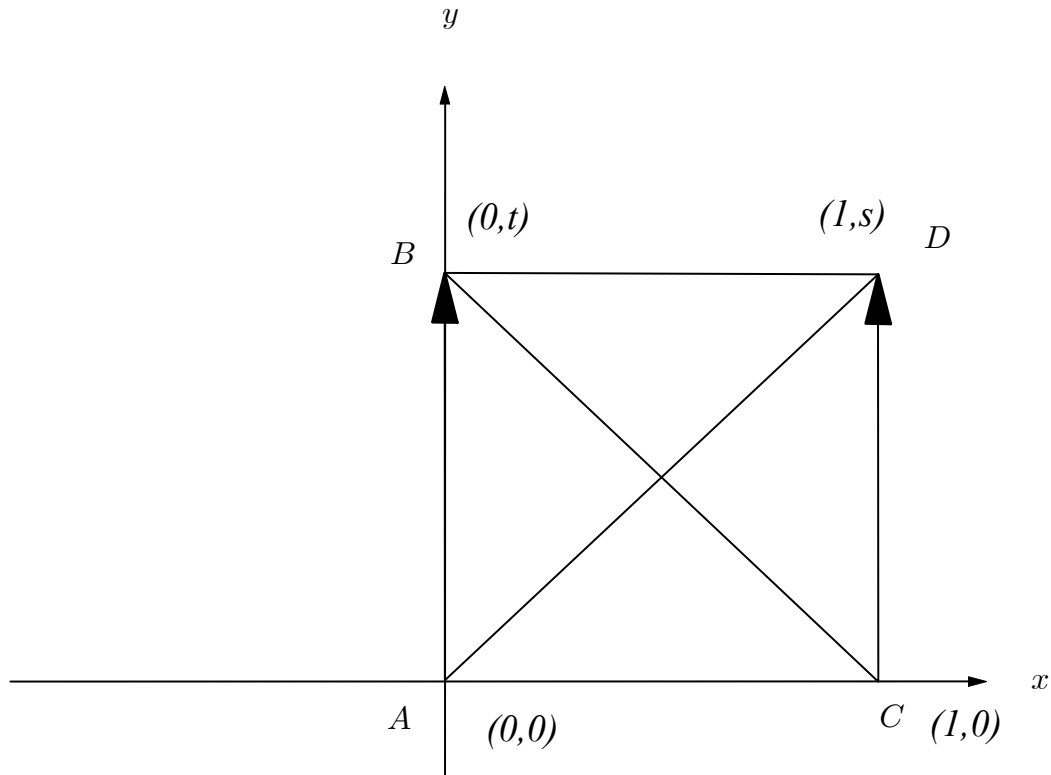


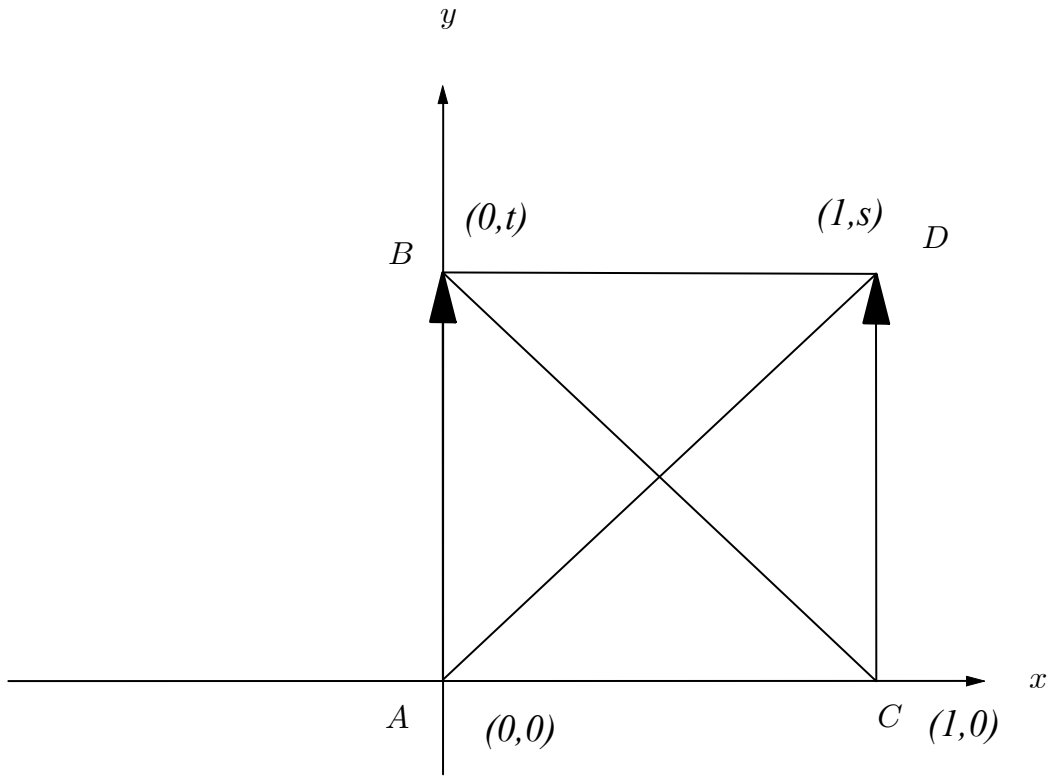
- В евклидовом пространстве,

$$\text{cosq} \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \right) = \cos \angle \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \right).$$

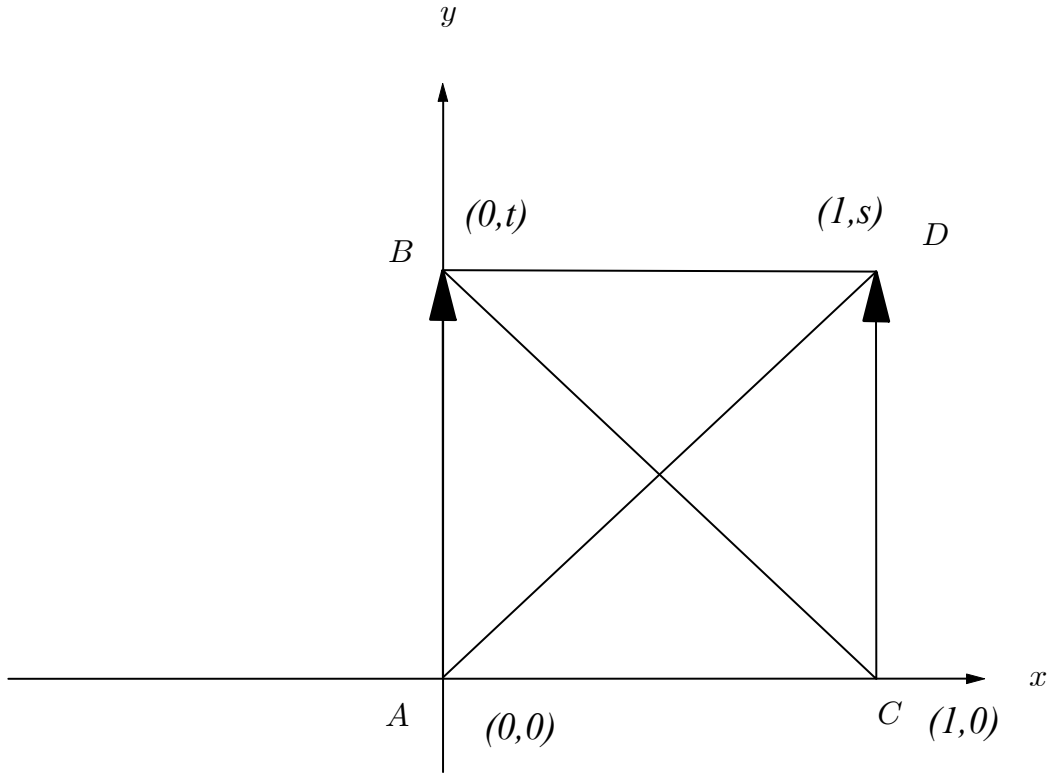
- В общем случае, cosq может быть не только больше единицы по абсолютной величине, но также быть произвольно большим.

Пример 19 Рассмотрим \mathbb{R}^2 с нормой $|(x, y)| = |x| + |y|$. Пусть $A = (0, 0)$, $B = (0, t)$, $C = (1, 0)$ и $D = (1, s)$, где $s, t \geq 0$.





$$\begin{aligned} & \cos \angle (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \\ &= \frac{AD^2 + BC^2 - AC^2 - BD^2}{2AB \cdot CD}; \\ AD &= 1 + s, BC = 1 + t; \\ AC &= 1; BD = 1 + |t - s|; \\ AB &= t; CD = s. \end{aligned}$$



Таким образом,

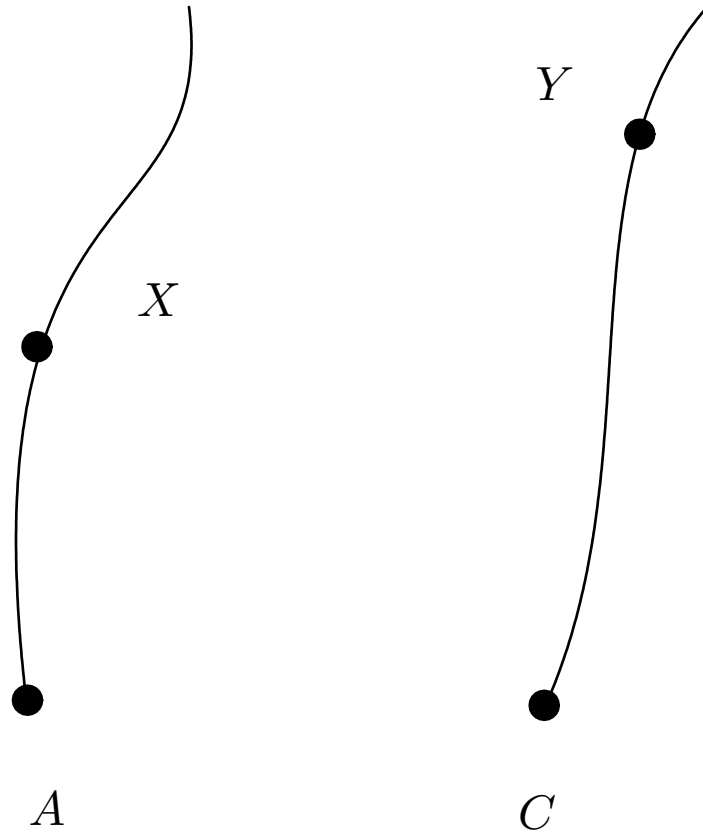
$$\begin{aligned}
 & \cosq(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \\
 &= \frac{(1+s)^2 + (1+t)^2 - 1 - (1+|t-s|)^2}{2st} \\
 &= \frac{2ts + 2s + 2t - 2|t-s|}{2st} \\
 &= \begin{cases} \frac{2ts+2s+2t-2(t-s)}{2st}, & \text{если } t \geq s \\ \frac{2ts+2s+2t-2(s-t)}{2st}, & \text{если } t \leq s \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{2ts+4s}{2st}, & \text{если } t \geq s \\ \frac{2ts+2t}{2st}, & \text{если } t \leq s \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 1 + \frac{2}{t}, & \text{если } t \geq s \\ 1 + \frac{1}{s}, & \text{если } t \leq s \end{cases}
 \end{aligned}$$

11.2 Функции $h_{\mathcal{L}\mathcal{N}}$ и $\varphi(\vec{u}, \vec{v})$

Пусть кривые $\mathcal{L} \in \Lambda_A(M)$, $\mathcal{N} \in \Lambda_C(M)$. Полагаем

$$h_{\mathcal{L}\mathcal{N}}(X, Y) = \cos q(\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{CY}),$$

где $X \in \mathcal{L}$ и $Y \in \mathcal{N}$.



Полагаем:

$$h_{\mathcal{L}\mathcal{N}} = \lim_{a \rightarrow 0+, b \rightarrow \infty} \underline{\lim}_{X \rightarrow A, Y \rightarrow C, a \leq \frac{AX}{CY} \leq b} h_{\mathcal{L}\mathcal{N}}(X, Y).$$

- Если $A = C$, то $h_{\mathcal{L}\mathcal{N}}$ есть в точности косинус верхнего угла между кривыми \mathcal{L} и \mathcal{N} .
- Мы доказываем, что в римановом пространстве, для $\mathcal{L} \in \Pi^{-1}(\xi)$ и $\mathcal{N} \in \Pi^{-1}(\zeta)$, $h_{\mathcal{L}\mathcal{N}}$ приблизительно равен $\cos \angle(\xi, \zeta')$, где ζ' получается из ζ параллельным переносом вдоль кратчайшей CA .
- В евклидовом пространстве,

$$\begin{aligned} & \langle \vec{u}, \eta \rangle - \langle \vec{v}, \eta \rangle \\ &= |\vec{u}| \cos \angle(\vec{u}, \eta) - |\vec{v}| \cos \angle(\vec{v}, \eta), |\eta| = 1. \end{aligned}$$

В то же время,

$$\begin{aligned} & \sup_{\eta, |\eta|=1} \{ \langle \vec{u}, \eta \rangle - \langle \vec{v}, \eta \rangle \} \\ &= \sup_{\eta, |\eta|=1} \{ \langle \vec{u} - \vec{v}, \eta \rangle \} = |\vec{u} - \vec{v}|. \end{aligned}$$

Это наблюдение положено в основу определения функции $\varphi(\vec{u}, \vec{v})$, которая в метрическом пространстве заменяет $|\vec{u} - \vec{v}'|$. Пусть $|\vec{u}|, |\vec{v}| \neq 0$ и $\eta \in \Omega_A(M) \cup \Omega_C(M)$. Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} & \varphi(\vec{u}, \vec{v}; \eta) \\ &= \inf_{\mathcal{L} \in \Pi^{-1}(\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}), \mathcal{N} \in \Pi^{-1}(\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}), \mathcal{J} \in \Pi^{-1}(\eta)} \left| |\vec{u}| h_{\mathcal{L}\mathcal{J}} - |\vec{v}| h_{\mathcal{N}\mathcal{J}} \right|. \end{aligned}$$

- Заметим, что $h_{\mathcal{L}\mathcal{J}}$ и $h_{\mathcal{N}\mathcal{J}}$ не могут быть бесконечными одновременно.

Далее полагаем:

$$\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = \sup_{\eta \in \Omega_A(M) \cup \Omega_C(M)} \varphi(\vec{u}, \vec{v}; \eta).$$

Если же $|\vec{u}|$ или $|\vec{v}|$ обращается в ноль, полагаем:

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{u}, \vec{0}_C) &= \varphi(\vec{0}_A, \vec{u}) = |\vec{u}|; \\ \varphi(\vec{0}_A, \vec{0}_C) &= \varphi(\vec{0}_C, \vec{0}_A) = 0.\end{aligned}$$

Определение 20 Пусть $\vec{u}, \vec{v} \in \tilde{T}(M)$. Полуметрика Сасаки между \vec{u} и \vec{v} задаётся величиной

$$\delta_M(\vec{u}, \vec{v}) = \sqrt{\rho^2(A, C) + \varphi^2(\vec{u}, \vec{v})}.$$

Пусть $\widetilde{(\delta_M)}_{ind} = \tilde{\delta}_{ind}$ обозначает индуцированную расширенную псевдометрику на $\tilde{T}(M)$. Таким образом, $(\tilde{T}(M), \tilde{\delta}_{ind})$ -- расширенное псевдометрическое пространство. Ясно, что приведённая выше конструкция применима также к расширенным метрическим пространствам.

Оказывается, что $\tilde{\delta}_{ind}$ может вырождаться только на слое.

Лемма 21 Пусть (M, ρ) -- расширенное метрическое пространство. Пусть $\vec{u}, \vec{v} \in \tilde{T}(M)$. Если

$$\tilde{\delta}_{ind}(\vec{u}, \vec{v}) = 0,$$

то векторы \vec{u} и \vec{v} касаются M в одной и той же точке.

Доказательство. Пусть $A, C \in M$ и $\vec{u} \in M_A, \vec{v} \in M_C$. Легко видеть, что

$$\delta(\vec{u}, \vec{v}) = \sqrt{AC^2 + \varphi^2(\vec{u}, \vec{v})} \geq AC.$$

Согласно определению $\tilde{\delta}_{ind}$,

$$\tilde{\delta}_{ind}(\vec{u}, \vec{v}) \geq \rho_{ind}(A, C) \geq \rho(A, C).$$

Имеем:

$$0 = \tilde{\delta}_{ind}(\vec{u}, \vec{v}) \geq \rho_{ind}(A, C) \geq \rho(A, C) \Rightarrow A = C,$$

как и утверждалось. ■

Наконец всё готово для того, чтобы завершить построение обобщённого касательного расслоения $T(M)$ расширенного метрического пространства (M, ρ) . Введём отношение эквивалентности на множестве $\tilde{T}(M)$:

$$\vec{u} \sim \vec{v} \Leftrightarrow \tilde{\delta}_{ind}(\vec{u}, \vec{v}) = 0.$$

Поскольку расширенная псевдометрика удовлетворяет неравенству треугольника, “ \sim ” действительно является отношением эквивалентности.

Определение 22 (Обобщённое касательное расслоение $T(M)$)

$$T(M) = \tilde{T}(M) / \sim .$$

Точки $T(M)$ обозначаются $\mathbf{u} = [\vec{u}]$ -- класс эквивалентных векторов.

Определение 23 (Обобщённая полуметрика Сасаки)

$$\delta_{ind}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \tilde{\delta}_{ind}(\vec{u}, \vec{v}), \text{ где } \mathbf{u} = [\vec{u}] \text{ и } \mathbf{v} = [\vec{v}].$$

11.3 Примеры

Пример 24 Пусть (M, ρ) -- дискретное метрическое пространство. Тогда, для каждой точки $P \in M$,

$$\Lambda_P(M) = \emptyset \Rightarrow \Omega_P(M) = \emptyset.$$

Таким образом,

$$\tilde{T}(M) = \cup_{P \in M} \vec{0}_P.$$

По определению, $\varphi(\vec{0}_A, \vec{0}_C) = 0$. Следовательно,

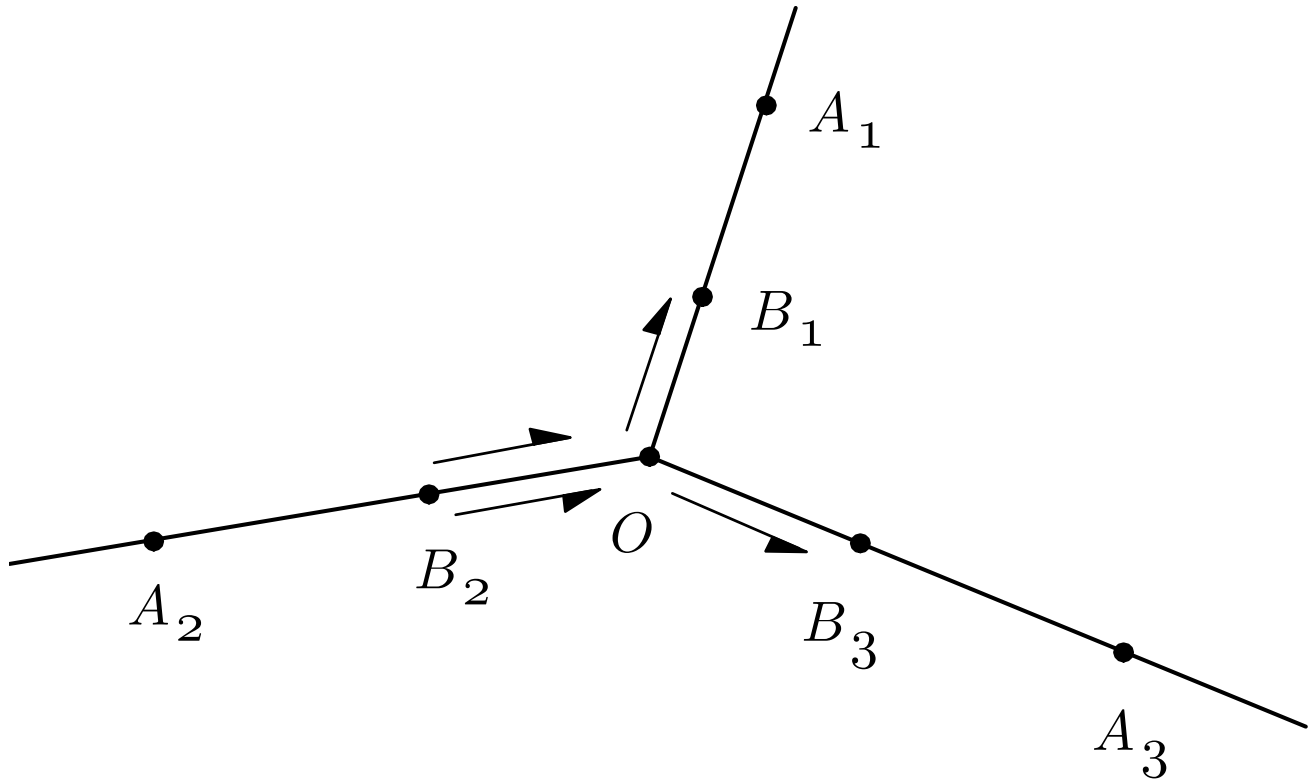
$$\delta_M(\vec{0}_A, \vec{0}_C) = \sqrt{AC^2 + \varphi^2(\vec{0}_A, \vec{0}_C)} = AC.$$

Поскольку любые две различные точки не соединимы путём, имеем:

$$\tilde{\delta}_{ind}(\vec{0}_A, \vec{0}_C) = \begin{cases} 0, & \text{если } A = C \\ +\infty, & \text{в противном случае} \end{cases} .$$

Ясно, что $\tilde{\delta}_{ind} = \delta_{ind}$ и $\tilde{T}(M) = T(M)$.

Пример 25 (Линейный граф) Пусть M -- граф на плоскости с метрикой ρ , индуцированной с плоскости.

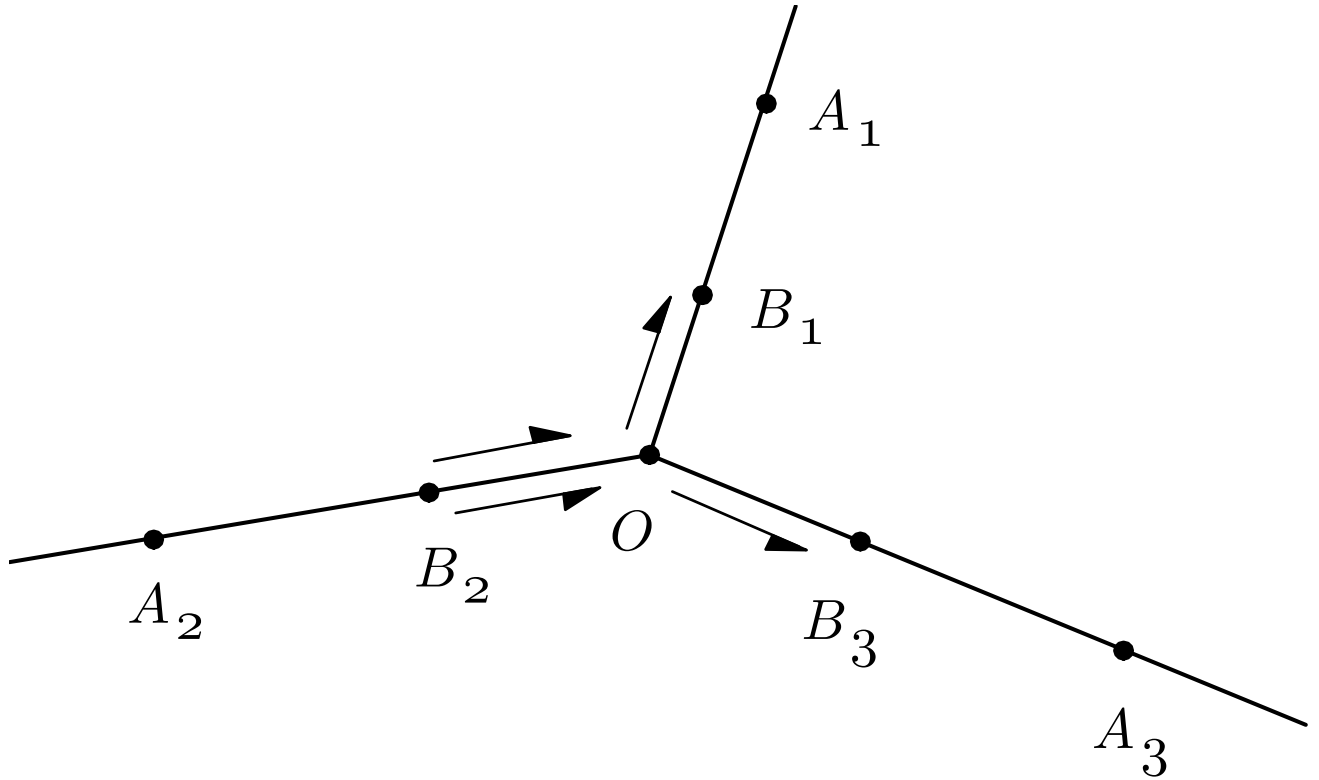


Введём следующее обозначение. Для пары точек $P, Q \in M$, пусть ξ_{PQ} обозначает направление кратчайшей PQ в точке P :

$$\xi_{PQ} = \Pi(PQ).$$

I. Так как граф склеен из отрезков прямых линий, то

$$h_{\mathcal{LN}} = \lim_{a \rightarrow 0+, b \rightarrow \infty} \lim_{X \rightarrow P, Y \rightarrow Q, a \leq \frac{PX}{QY} \leq b} \cos \angle (\overrightarrow{PX}, \overrightarrow{PY}) = \pm 1.$$



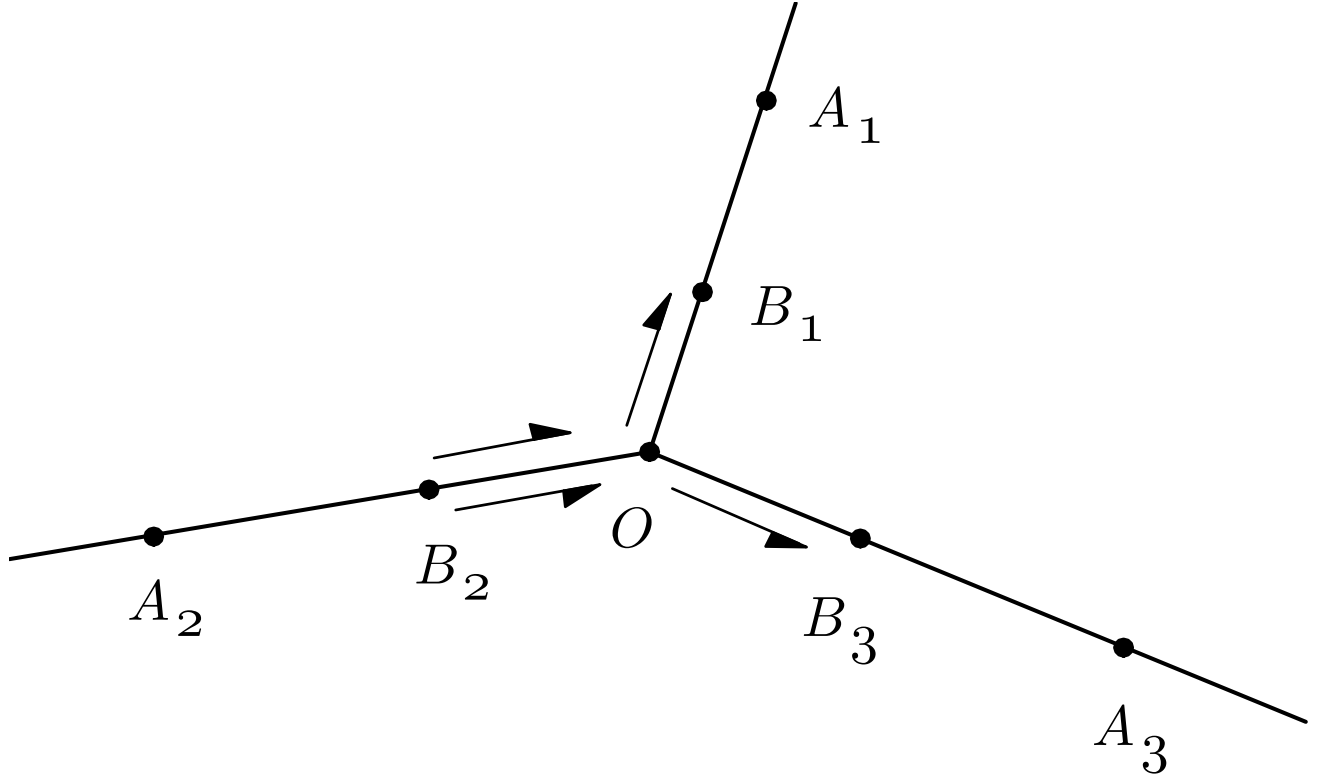
Например, $h_{\mathcal{L}\mathcal{N}} = 1$, когда $\mathcal{L} = A_2B_2$ и $\mathcal{N} = B_1A_1$.
Напомним, что

$$\begin{aligned} & \varphi(\vec{u}, \vec{v}; \eta) \\ = & \inf_{\substack{\mathcal{L} \in \Pi^{-1}\left(\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right), \mathcal{N} \in \Pi^{-1}\left(\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\right), \mathcal{J} \in \Pi^{-1}(\eta) \\ \text{в нашем случае} \\ \underline{\underline{=}}}} & \left| |\vec{u}| h_{\mathcal{L}\mathcal{J}} - |\vec{v}| h_{\mathcal{N}\mathcal{J}} \right| \end{aligned}$$

$$\left| |\vec{u}| h_{\mathcal{L}\mathcal{J}} - |\vec{v}| h_{\mathcal{N}\mathcal{J}} \right|$$

\Rightarrow

$$\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = \sup_{\eta \in \Omega_P(M) \cup \Omega_Q(M)} \left| |\vec{u}| h_{\mathcal{L}\mathcal{J}} - |\vec{v}| h_{\mathcal{N}\mathcal{J}} \right|.$$



Пусть $\mathcal{L} = A_2B_2$ и $\mathcal{N} = B_1A_1$. Поскольку оба эти отрезка расположены на одной ветви графа и они не задевают точку O , мы видим, что $\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = |s - t|$, если $\vec{u} = [\xi_{A_2B_2}, s]$, $\vec{v} = [\xi_{B_1A_1}, t]$. Таким образом,

$$\delta_M([\xi_{A_2B_2}, s], [\xi_{B_1A_1}, t]) = \sqrt{\rho^2(A_2, B_1) + |s - t|^2}.$$

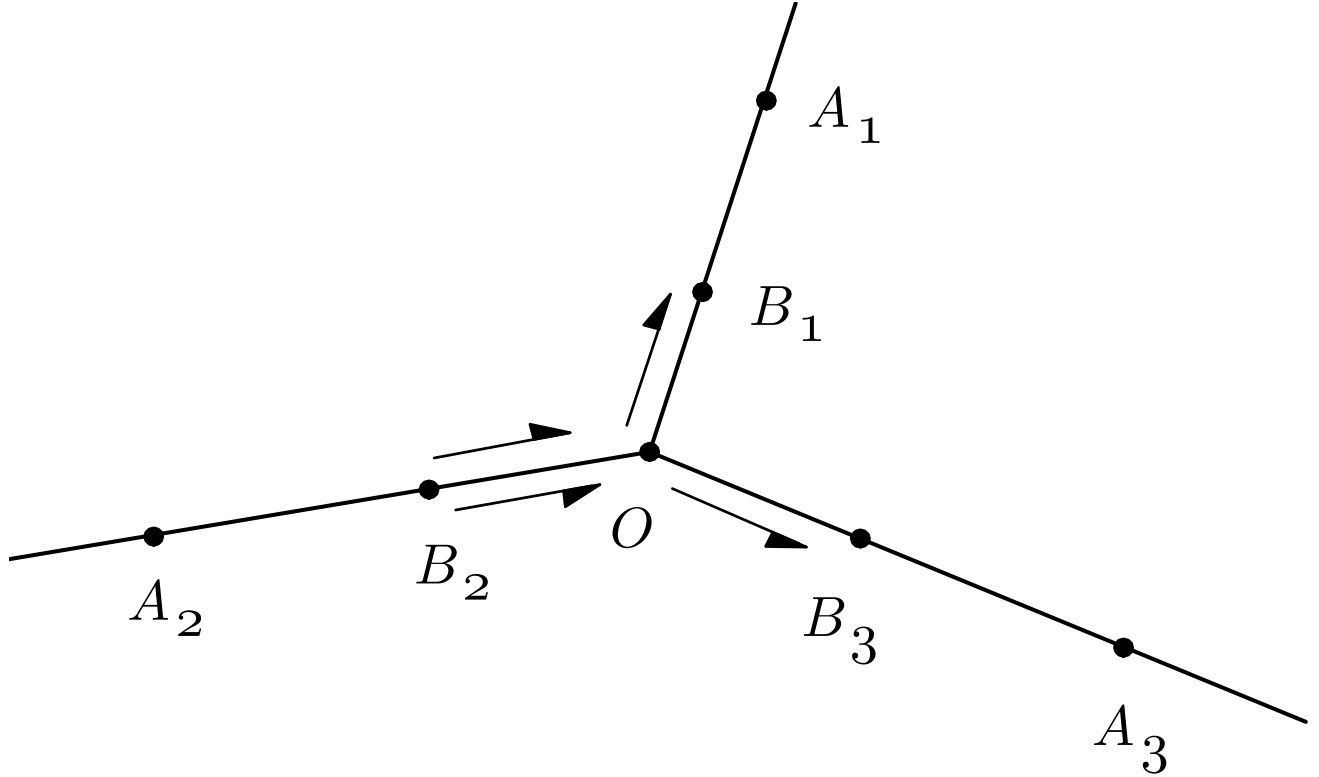
Точно также проверяется, что

$$\varphi([\xi_{OB_1}, s], [\xi_{A_2B_2}, t]) = |sh_{\mathcal{L}\mathcal{J}} - th_{\mathcal{N}\mathcal{J}}| = |s + t|$$

(здесь \sup достигается на $\mathcal{J} = OB_3$). Следовательно,

$$\delta_M([\xi_{OB_1}, s], [\xi_{A_2B_2}, t]) = \sqrt{\rho^2(O, A_2) + (s + t)^2}.$$

Остальные случаи рассматриваются аналогично.



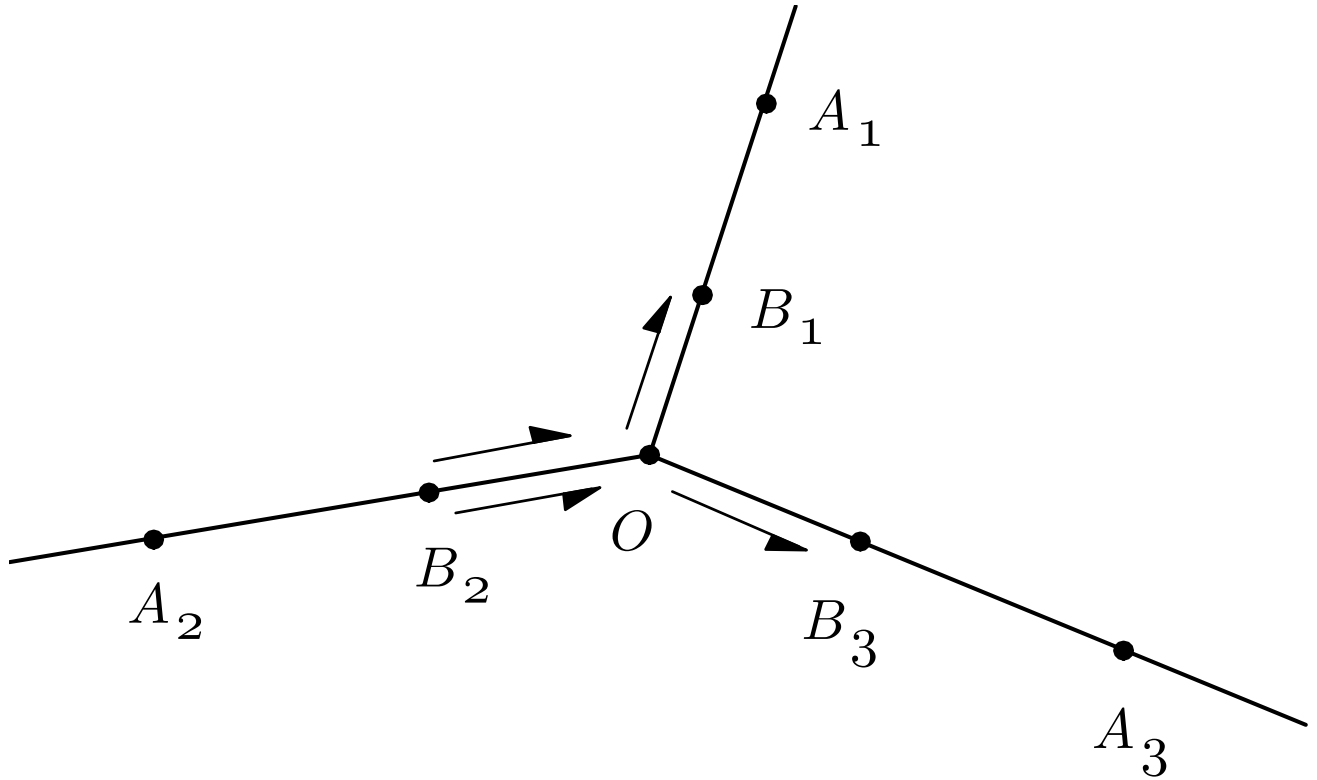
II. Заметим, что для $\xi_{OB_1}, \xi_{OB_3} \in \Omega_O(M)$,

$$\angle(\xi_{OB_1}, \xi_{OB_3}) = \pi.$$

Однако, как мы покажем, расстояние $\tilde{\delta}_{ind}$ вырождается на этих векторах. Для простоты положим $\xi_{OB_1} = [\xi_{OB_1}, 1]$ и $\xi_{OB_3} = [\xi_{OB_3}, 1]$. Согласно определению индуцированной метрики,

$$\tilde{\delta}_{ind}(\xi_{OB_1}, \xi_{OB_3}) = \inf_{\Xi} \underline{\ell}_{\delta_M}(\Xi),$$

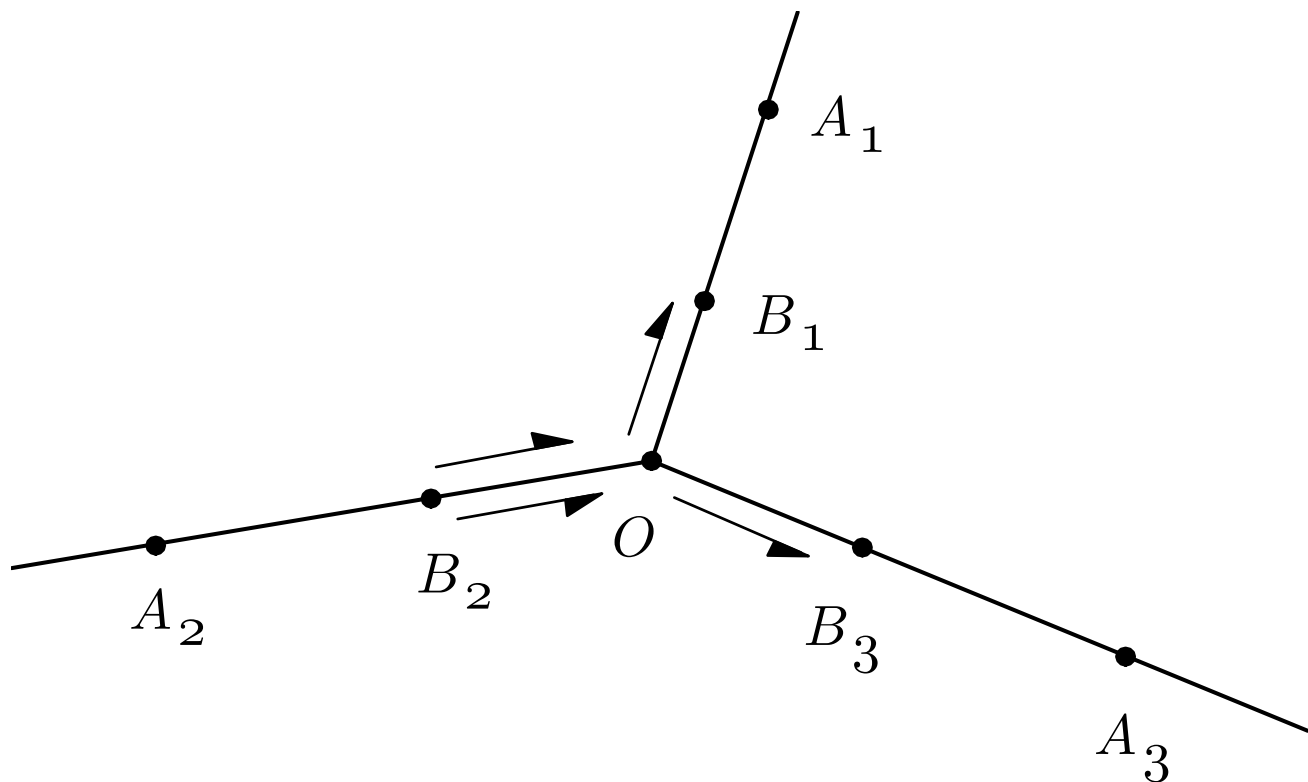
где путь Ξ соединяет ξ_{OB_1} и ξ_{OB_3} .



Рассмотрим путь $\Xi(t)$, когда начало вектора $\xi(t)$ движется вдоль ломаной линии $OB_1OB_2OB_3O$. Для того, чтобы вычислить $\underline{\ell}_{\delta_M}(\Xi)$ рассмотрим разбиение $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$. Выберем точки t_1, \dots, t_{n-1} так, чтобы начало вектора $\xi(t_j)$ не находилось в точке O . Тогда, для любого пробного вектора, $\varphi \equiv 0 \Rightarrow \underline{\ell}_{\delta_M}(\Xi) = \ell = OB_1 = OB_3$. Поскольку ℓ может быть выбрано сколь угодно малым,

$$\tilde{\delta}_{ind}(\xi_{OB_1}, \xi_{OB_3}) = \inf_{\Xi} \underline{\ell}_{\delta_M}(\Xi) = 0.$$

Заметим, что если бы мы использовали функционал верхней длины вместо функционала нижней длины, то тогда расстояние между ξ_{OB_1} и ξ_{OB_3} было бы 2, т.е., такое же как и в M_O . Но соответствующее индуцированное расстояние не было бы метрикой.



Аналогичные рассуждения приводят к следующим равенствам:

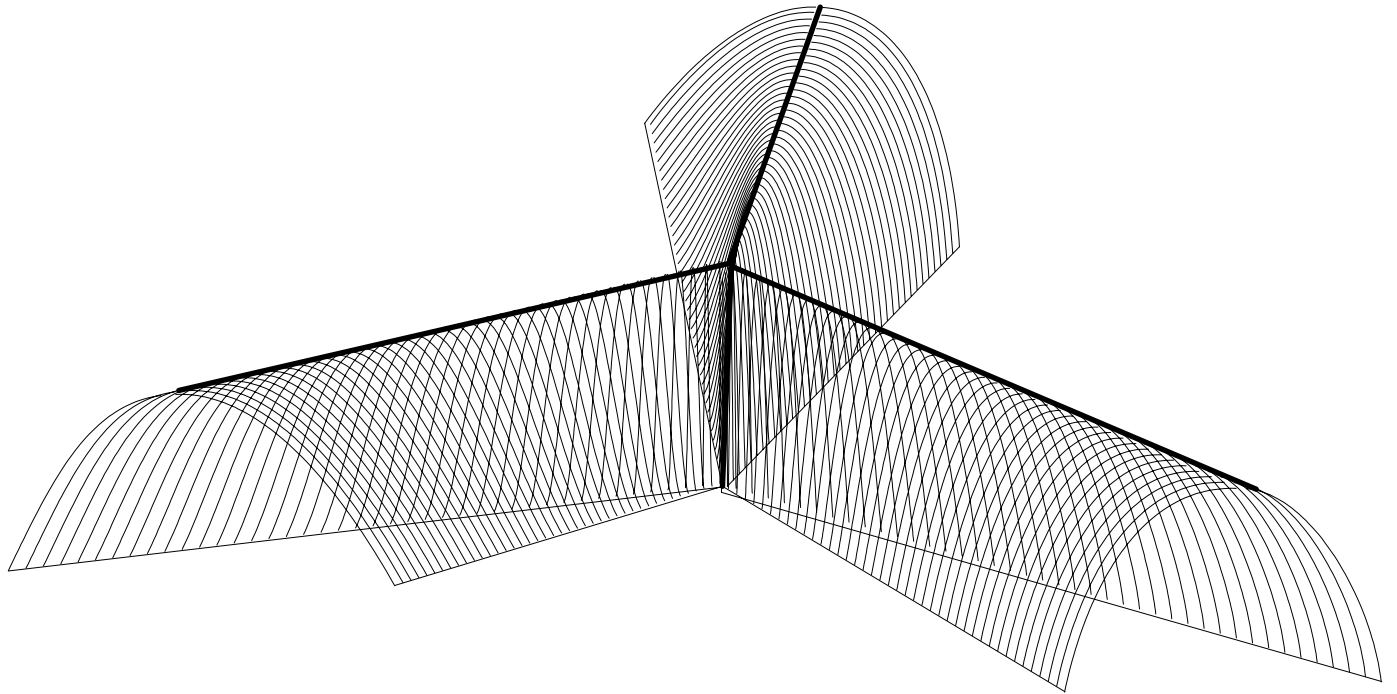
$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_{ind} \left([\xi_{OB_i}, s], [\xi_{OB_j}, t] \right) &= |s - t|; \\ \tilde{\delta}_{ind} \left([\xi_{A_i B_i}, s], [\xi_{A_j B_j}, t] \right) &= \sqrt{\rho^2 (A_i, A_j) + |s + t|^2}; \\ \tilde{\delta}_{ind} \left([\xi_{A_i B_i}, s], [\xi_{B_j A_j}, t] \right) &= \sqrt{\rho^2 (A_i, B_j) + |s - t|^2}; \\ & i, j = 1, 2, 3, i \neq j. \end{aligned}$$

Таким образом, расстояние $\tilde{\delta}_{ind}$ между этими векторами вычисляется так как если бы они были касательны к \mathbb{R} . Каждой ветке графа соответствует

$$\tilde{T}(M) = \text{полуплоскость}.$$

Эти полуплоскости склеиваются вместе вдоль границ,

причём сами границы “складываются пополам”.



12 Пространства $T^m(M)$

Поскольку конструкция обобщённого касательного расслоения и расширенной метрики Сасаки на нём применима к любому расширенному метрическому пространству, мы можем определить пространства $T^m(M)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, полагая

$$\begin{aligned}
 (T^0(M), \delta_0) &= (M, \rho); \\
 (T^1(M), \delta_1) &= (T(M), (\delta_0)_{ind}); \\
 &\dots \\
 (T^m(M), \delta_m) &= (T(T^{m-1}(M)), (\delta_{m-1})_{ind}) \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

13 Решение проблемы Александрова

Пусть $\sigma_1 \in \Omega_P^2(M)$ и $\sigma_2 \in \Omega_Q^2(M)$; $\sigma_1 = (\xi_1, \zeta_1)$, $\sigma_2 = (\xi_2, \zeta_2)$. Полагаем:

$$\omega(\sigma_1, \sigma_2) = \max \{ \delta([\xi_1, 1], [\xi_2, 1]), \delta([\zeta_1, 1], [\zeta_2, 1]) \}.$$

Определение 26 Мы говорим, что расширенное метрическое пространство имеет непрерывную по Гёльдеру кривизну с показателем α , $0 < \alpha < 1$, если

(а) Кривизна (M, ρ) существует в каждой точке $P \in M$.

(б) Для каждой точки $P \in M$ найдётся положительное число r_P , такое что

$$|K_{\sigma_1}(Q_1) - K_{\sigma_2}(Q_2)| \leq C_\varepsilon \omega(\sigma_1, \sigma_2)^\alpha,$$

для всех $Q_1, Q_2 \in B(P, r_P) \subseteq M$, каждого $0 < \varepsilon < \pi/2$, и каждой пары двумерных направлений

$$\sigma_1 = (\xi_1, \zeta_1) \in \Omega_{Q_1}^2(M)$$

и

$$\sigma_2 = (\xi_2, \zeta_2) \in \Omega_{Q_2}^2(M),$$

удовлетворяющих неравенствам:

$$\varepsilon < \angle(\xi_1, \zeta_1) < \pi - \varepsilon;$$

$$\varepsilon < \angle(\xi_2, \zeta_2) < \pi - \varepsilon.$$

Решение проблемы Александрова даётся следующей теоремой.

Теорема 27 (Решение проблемы Александрова) *Локально-компактное метрическое пространство (M, ρ) с внутренней метрикой и непрерывной по Гёльдеру кривизной с показателем $\alpha, 0 < \alpha < 1$, и удовлетворяющее условию локальной продолжаемости геодезических, изометрично $C^{2,\alpha}$ -гладкому риманову многообразию.*

Напомним, что тройка точек в метрическом пространстве M называется *линейной*, если она изометрична тройке точек на прямой линии. Пусть $P \in M$. Окрестность $U \subseteq M$ точки P называется *линейной*, если каждая тройка точек в U линейна. Метрическое пространство M называется *линейным* в точке P , если у P есть линейная окрестность. Следующая теорема даёт метрическое описание $C^{m,\alpha}$ -гладких римановых пространств.

Теорема 28 (Метрическое описание $C^{m,\alpha}$ -гладких римановых пространств) *Пусть $m = 1, 2, \dots$. Пусть (M, ρ) локально-компактное метрическое пространство с внутренней метрикой, которое удовлетворяет условию локальной продолжаемости геодезических. Предположим, что $(T^m(M), \delta_m)$ имеет непрерывную по Гёльдеру кривизну с показателем $\alpha, 0 < \alpha < 1$, и что M не является линейным в какой либо его точке. Тогда (M, ρ) изометрично $C^{m+2,\alpha}$ -гладкому риманову многообразию.*

В качестве следствия, получаем

Следствие 29 (Метрическое описание C^∞ -гладких римановых пространств) Пусть (M, ρ) локально-компактное метрическое пространство с внутренней метрикой, которое удовлетворяет условию локальной продолжаемости геодезических. Предположим, что

$$(T^m(M), \delta_m)$$

имеет непрерывную по Гёльдеру кривизну с показателем $\alpha, 0 < \alpha < 1$, для произвольно больших m и что M не является линейным в какой либо его точке. Тогда (M, ρ) изометрично C^∞ -гладкому риманову многообразию.

- Очевидно, что условия, сформулированные в приведённых выше теоремах и следствии являются не только достаточными, но и необходимыми.
- То, что M не является линейным, необходимо требовать в метрическом описании $C^{m,\alpha}$ и C^∞ -гладких римановых пространств. В противном случае, M может оказаться одномерным. Например, достаточно рассмотреть $M = \mathbb{R}$. Его касательное расслоение изометрично \mathbb{R}^2 -- пространству с нулевой кривизной.

14 План доказательства Теоремы 27

I. Поскольку, для каждой точки $P \in M$, $\overline{K}_M(P) < +\infty$, $\underline{K}_M(P) > -\infty$, то согласно теореме гладкости для пространств с ограниченной кривизной, (M, ρ) изометрично риманову многообразию $\langle M, g \rangle$, где $g \in W_p^2 \cap C^{1,\alpha}$, для каждого $p \geq 1$ и $0 < \alpha < 1$. При этом, M -- $C^{4,\alpha}$ -гладкое многообразие.

II. Для почти всех точек M (в смысле n -мерной меры Хаусдорфа, $n = \dim(M)$), определён *формальный тензор кривизны*:

$$R_{f\ irq}^j = \frac{\partial \Gamma_{iq}^j}{\partial x^r} - \frac{\partial \Gamma_{ir}^j}{\partial x^q} + \Gamma_{iq}^k \Gamma_{kr}^j - \Gamma_{ir}^k \Gamma_{kq}^j,$$

формальная секционная кривизна, и так далее.

- Априорно не ясно, имеет ли формальный тензор кривизны какое-либо отношение к геометрии M .

Ранее автором было доказано, что почти во всех точках, формальная секционная кривизна может быть вычислена следующим образом:

$$K_{\sigma}^f(P) = \lim_{T_n \xrightarrow{\sigma} P} \frac{\delta(T_n)}{S(T_n)},$$

где $T_n \xrightarrow{\sigma} P$ -- последовательность “правильных” треугольников: все их углы отделены от нуля и π некоторыми постоянными (теорема о геометрическом смысле секционной кривизны). Из теоремы о гладкости метрики и о геометрическом смысле секционной кривизны следует, что секционная кривизна метрического пространства (M, ρ) почти всюду совпадает с формальной секционной кривизной: $K_{\sigma}(P) = K_{\sigma}^f(P)$, для почти всех $P \in M$.

III. Теперь необходимо доказать, что непрерывность по Гёльдеру кривизны метрического пространства влечёт непрерывность по Гёльдеру формальной секционной кривизны. Проблема состоит в том, что Гёльдерова непрерывность кривизны метрического пространства (M, ρ) определяется в терминах обобщённой полуметрики Сасаки δ_M на $\tilde{T}(M)$, в то время как Гёльдерова непрерывность формальной секционной кривизны должна определяться через метрику ρ .

Начиная с этого момента, мы рассматриваем малую окрестность \mathcal{U} пространства M ; в частности, не ограничивая общности, можно считать, что любые две точки \mathcal{U} соединимы единственной кратчайшей. Если $P, Q \in \mathcal{U}$, $P \neq Q$, и $\xi \in \Omega_Q(M)$, то ξ' обозначает единичный вектор в $\Omega_P(M)$, который получается из ξ параллельным переносом вдоль (единственной) кратчайшей QP .

Доказывается следующая лемма.

Лемма 30 Для почти всех $P, Q \in \mathcal{U}$, $P \neq Q$, и для каждой пары единичных векторов $\xi \in M_P$ и $\xi' \in M_Q$, которые параллельны вдоль кратчайшей PQ , имеет место оценка:

$$\sup_{\eta \in \Omega_P(M) \cup \Omega_Q(M)} |h(\xi, \eta) - h(\xi', \eta)| \leq C(\mathcal{U}) PQ^2.$$

IV. Если Лемма 30 доказана, то тогда

$$\begin{aligned} & \delta([\xi, 1], [\zeta, 1]) \\ & \leq PQ + \sup_{\eta \in \Omega_P(M) \cup \Omega_Q(M)} |h(\xi, \eta) - h(\xi', \eta)| \\ & = PQ + O(PQ^2) = O(PQ), \end{aligned}$$

откуда следует, что для всех $\xi, \zeta \in M_P$ и параллельных им векторам $\xi', \zeta' \in M_Q$, удовлетворяющих условиям:

$$0 < \varepsilon < \angle(\xi, \zeta) < \pi - \varepsilon,$$

выполнено:

$$\omega(\sigma, \sigma') = O(PQ), \text{ где } \sigma = (\xi, \zeta) \text{ и } \sigma' = (\xi', \zeta').$$

Следовательно, почти всюду, для формальных сеченных кривизн, выполнено:

$$\left| K_{\sigma_{ij}(u)}^f - K_{\sigma_{ij}(v)}^f \right| \leq C |u - v|^\alpha,$$

где σ_{ij} -- двумерное направление, заданное координатными векторами некоторой карты на M . Напомним, что поскольку, в силу теоремы гладкости, символы Кристоффеля Γ_{ij}^k непрерывны, то соответствующие параллельные векторы могут быть заменены на координатные. Напомним также, что компоненты метрического тензора $\{g_{ij}\}$ в гармонических координатах удовлетворяют следующему эллиптическому уравнению (С.З. Шефель, 1976):

$$g^{tl} \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^t \partial x^l} = 2R_{ij} + I(g), \quad ij = 1, 2, \dots, n,$$

где $I(g)$ зависит только от компонент метрического тензора и его первых производных. Согласно теореме гладкости, $g_{ij} \in C^{1,\alpha}$. Кроме того, как показано выше, компоненты тензора Риччи принадлежат классу $C^{0,\alpha}$. Тогда, стандартные оценки Шаудера позволяют заключить, что, на самом деле, $g_{ij} \in C^{2,\alpha}$. Согласно теореме С.З. Шефеля, M -- многообразие класса $C^{4,\alpha}$.

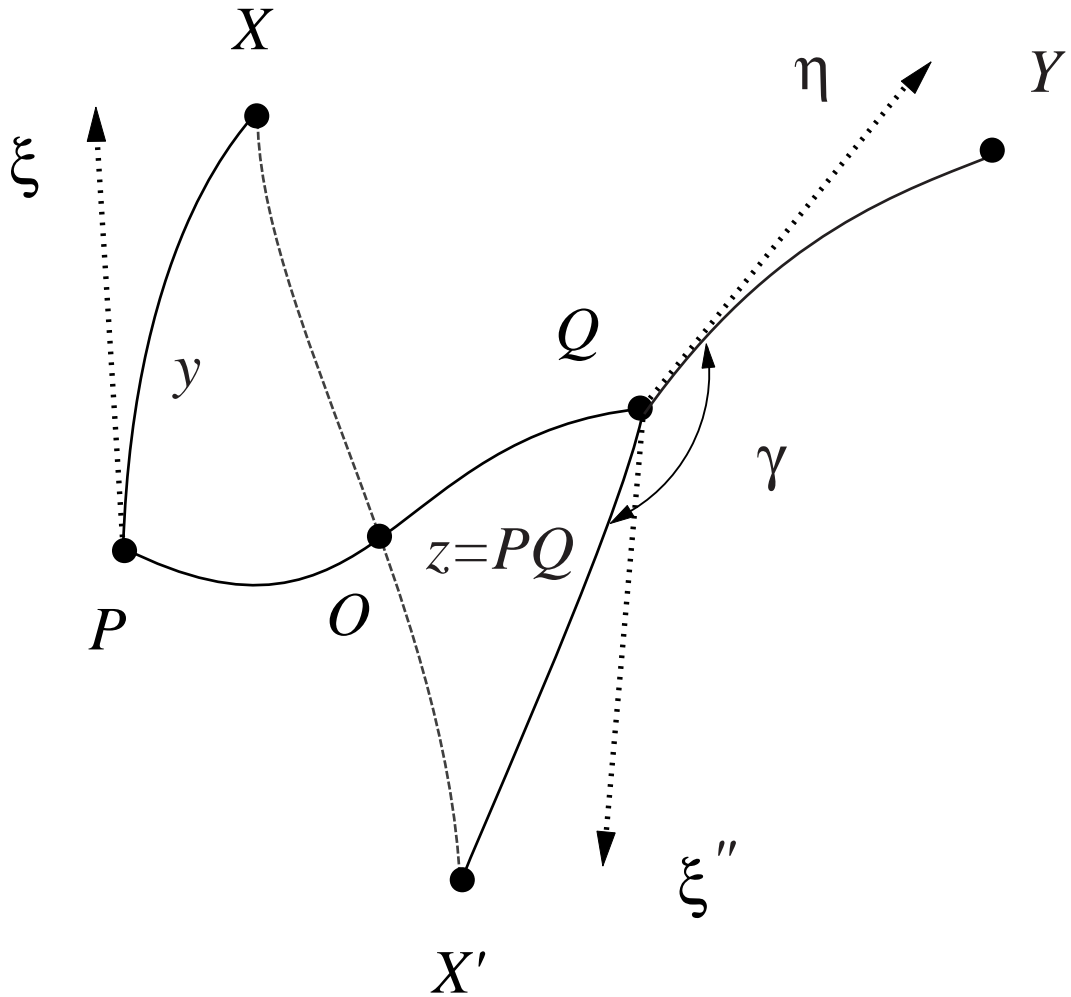
V. План доказательства Леммы 30.

1. Сначала доказывается, что $h_{\mathcal{L}\mathcal{N}} = h_{\tilde{\mathcal{L}}\tilde{\mathcal{N}}}$, если $\mathcal{L} \sim \tilde{\mathcal{L}}$ и $\mathcal{N} \sim \tilde{\mathcal{N}}$. Здесь используются геометрические оценки, вытекающие из условия теоремы: $\overline{K}_{\mathcal{M}}(P) < +\infty$, для каждой точки $P \in M$.

2. Затем доказывается, что предел

$$\lim_{X \rightarrow P, Y \rightarrow Q, a \leq \frac{PX}{QY} \leq b} h_{\mathcal{L}\mathcal{N}}(X, Y)$$

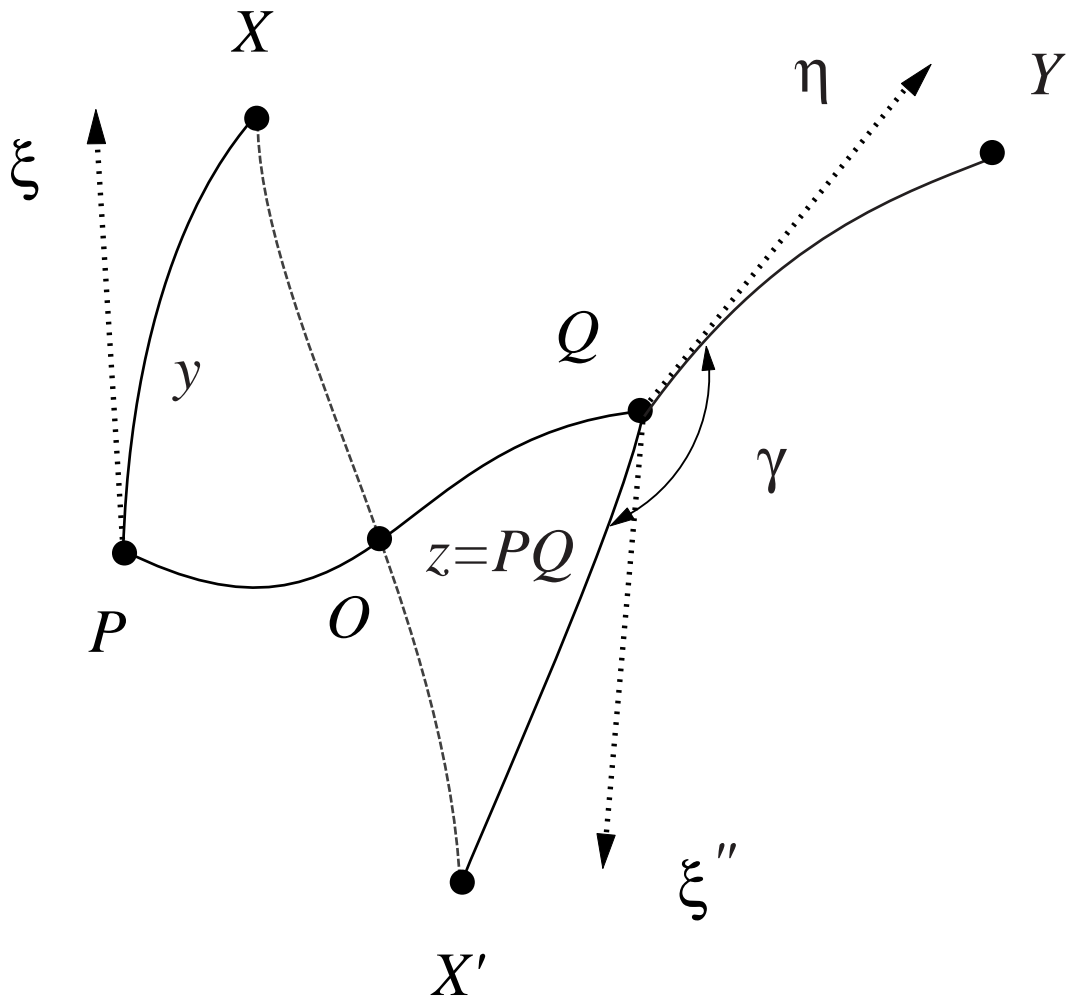
существует и не зависит от a и b , для каждого двумерного направления (ξ, ζ) и почти всех точек $P, Q \in M$. После этого доказательство сводится к следующей геометрической оценке.



Автором доказано ранее, что вектор $-\xi''$ параллелен вектору ξ с точностью до $O(PQ^2)$. Также известно, что в малой окрестности пространства с ограниченной кривизной,

$$|\alpha - \alpha_0| \leq \text{const} \cdot S(T),$$

где α -- угол треугольника T , а α_0 -- соответствующий угол в плоском треугольнике с теми же длинами сторон.



Применяя указанные выше оценки и пользуясь формулой косинусов, получаем:

$$\begin{aligned}
 h(\xi, \zeta) &= h_{\mathcal{LN}} = \frac{PY^2 + QX^2 - XY^2 - PQ^2}{2y^2} \\
 &= -\cos \gamma + O(z^2),
 \end{aligned}$$

что завершает доказательство леммы.

15 План доказательства Теоремы 28

Для простоты, рассмотрим случай $m = 1$: $(T(M), \delta_1)$ имеет Гёльдерову непрерывную кривизну с показателем α , $0 < \alpha < 1$.

А. Из определения $T(M)$ следует, что $i : M \hookrightarrow T(M)$, $i(P) = \vec{0}_P$, является изометрическим вложением. Поэтому кривизна (M, ρ) также непрерывна по Гёльдеру с показателем α . Но тогда, по Теореме 27, (M, ρ) изометрично $C^{2,\alpha}$ -гладкому риманову многообразию. Итак, не ограничивая общности, можно предположить, что (M, ρ) -- $C^{2,\alpha}$ -гладкое риманово многообразие.

Б. Доказывается, что для C^2 -гладкого риманова пространства $\langle M, g \rangle$ его обобщённое касательное расслоение $(T(M), \delta_1)$ совпадает с его стандартным касательным расслоением $(T(M), S_{ind})$. Доказательство использует формулу второй вариации и свойства полей Якоби. В случае C^3 -гладких римановых пространств, дифференцируя поля Якоби по параметру, можно прийти к требуемым оценкам достаточно легко. Для C^2 -гладкого риманового пространства ситуация гораздо сложнее.

В. Согласно Б, $(T(M), \delta_1)$ -- стандартное касательное расслоение с метрикой Сасаки на нём. Согласно формулам Сасаки, для символов Кристоффеля $\bar{\Gamma}_{(n+j)pq}$ выполнено:

$$\bar{\Gamma}_{(n+j)pq} = \frac{1}{2}[R_{j\lambda qp}(x) + \text{не более, чем первые производные } g].$$

В частности, по условию, $(T(M), \delta_1)$ является пространством с ограниченной кривизной. Поэтому, его метрический тензор $C^{2,\alpha}$ -гладкий. Таким образом,

$$\bar{\Gamma}_{(n+j)pq} \in C^{1,\alpha} \Rightarrow R_{j\lambda qp}(x) \in C^{1,\alpha}.$$

Опять используя уравнение

$$g^{tl} \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^t \partial x^l} = 2R_{ij} + I(g), \quad ij = 1, 2, \dots, n,$$

и оценки Шаудера, заключаем, что $g_{ij} \in C^{3,\alpha}$. Общий случай доказывается индукцией по m .

В заключение, мы приведём два результата, связанных с общими свойствами cosq .

Приводимые ниже результаты получены совместно с профессором Бергом.

Теорема 31 *Риманово пространство $\langle \mathfrak{R}, g \rangle$ имеет неположительную секционную кривизну тогда и только тогда, когда у каждой точки $P \in M$ имеется окрестность, такая что, для каждой четвёрки различных точек $\{A, B, C, D\}$ в этой окрестности выполнено:*

$$\cosq \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \right) \leq 1.$$

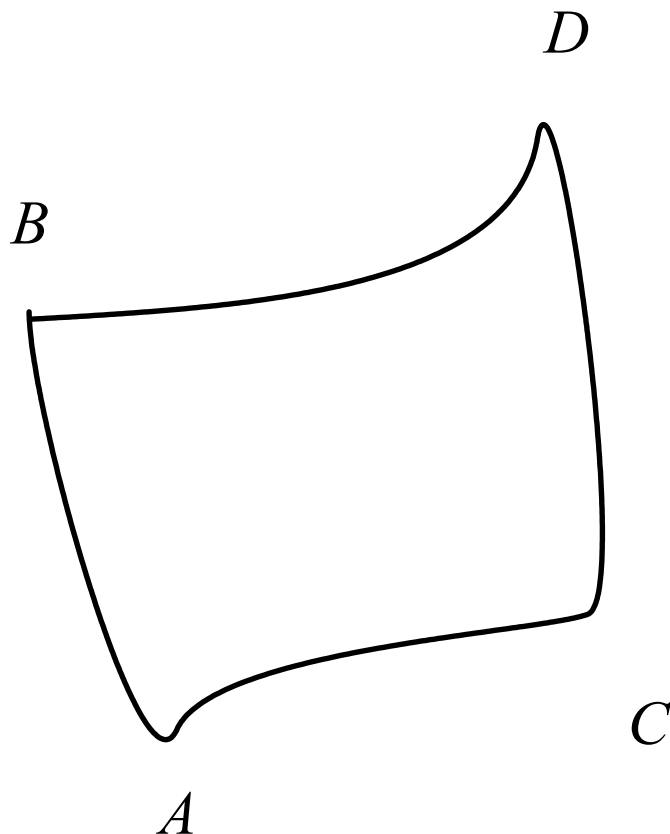
Доказательство. I. “ \Rightarrow ” Пусть $\langle \mathfrak{R}, g \rangle$ имеет неположительную секционную кривизну. Тогда, как хорошо известно, $\langle \mathfrak{R}, g \rangle$ также является пространством кривизны ≤ 0 , в смысле А.Д. Александрова. Таким образом, каждая точка \mathfrak{R} имеет окрестность \mathfrak{R}_0 , в которой

$$\delta(\mathcal{T}) \leq 0,$$

для каждого треугольника в этой окрестности, и в которой любые две точки соединимы (единственной) кратчайшей. Рассмотрим четвёрку различных точек

$$\{A, B, C, D\}$$

в этой окрестности. и рассмотрим замкнутую геодезическую ломаную $\Gamma : ABDC A$.

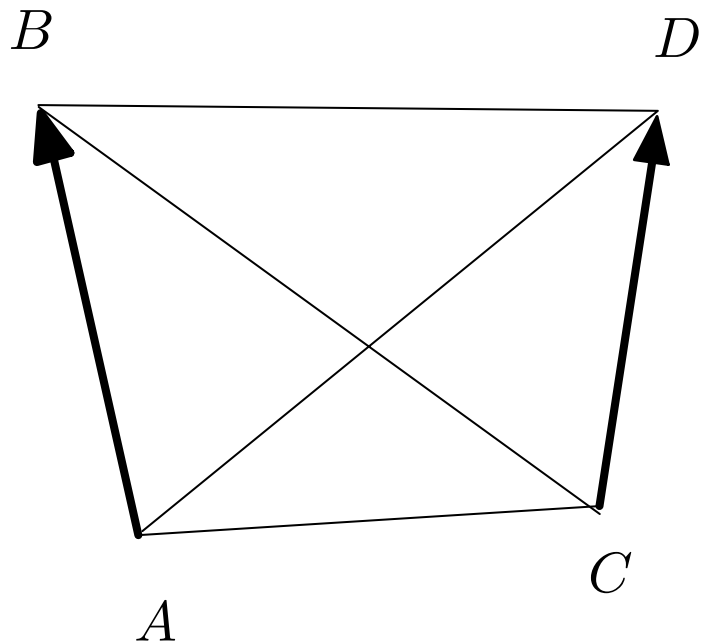


Теорема Ю.Г. Решетняка утверждает, что найдется выпуклое множество \mathcal{V} и отображение $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}_0$ такие, что

- f отображает $\partial\mathcal{V}$ на Γ с сохранением длин (т.е., *эквилонгально*).
- f не увеличивает расстояния:

$$X, Y \in \Gamma \Rightarrow \rho(f(X), f(Y)) \leq |X - Y|.$$

Тогда имеем:



$$\begin{aligned}
 & \cos \angle (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \\
 &= \frac{BC^2 + AD^2 - BD^2 - AC^2}{2AB \cdot CD} \\
 &\leq \frac{B_0C_0^2 + A_0D_0^2 - B_0D_0^2 - A_0C_0^2}{2A_0B_0 \cdot C_0D_0} \\
 &= \cos \angle (\overrightarrow{A_0B_0}, \overrightarrow{C_0D_0}) \\
 &= \cos \angle (\overrightarrow{A_0B_0}, \overrightarrow{C_0D_0}) \leq 1,
 \end{aligned}$$

где $A = f(A)$, $B = f(B_0)$, и т.д. Доказательство I завершено.

II. “ \Leftarrow ” Теперь предположим, что для каждой точки риманова пространства $\langle \mathcal{R}, g \rangle$ найдётся окрестность \mathcal{U} , такая что, для каждой четвёрки различных точек $\{A, B, C, D\}$, $\text{cosq}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \leq 1$.

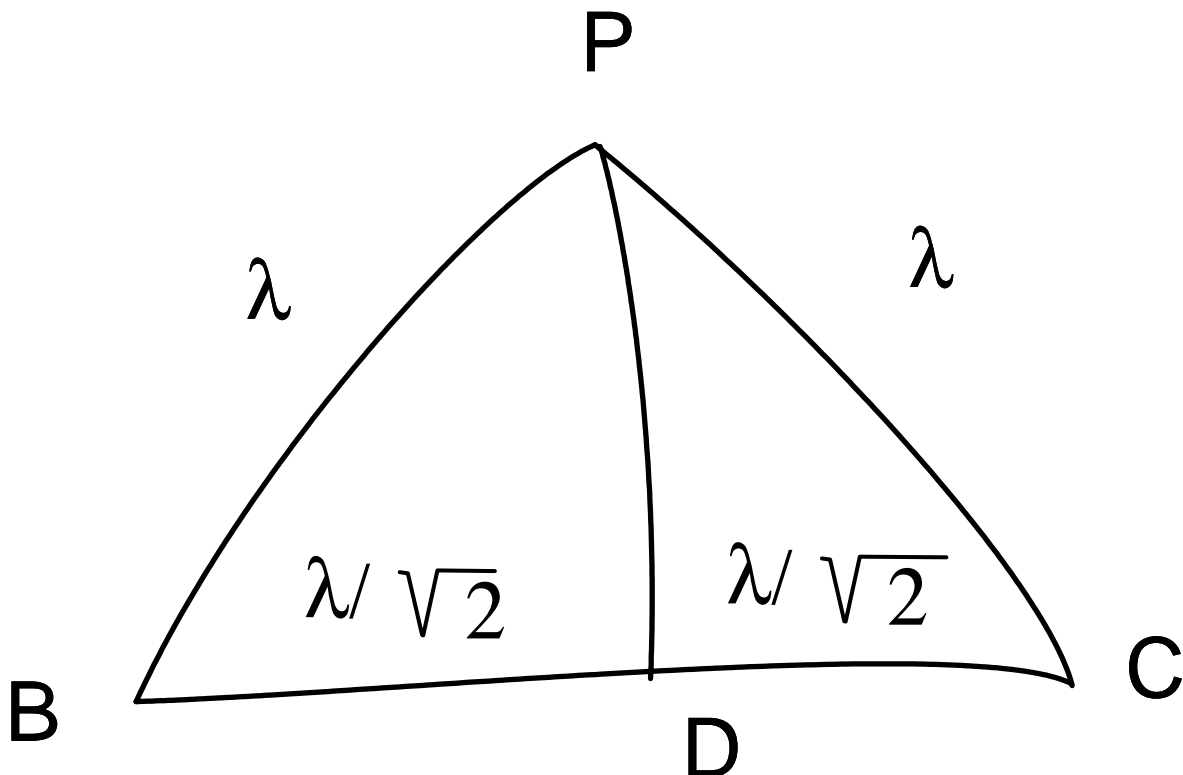
Пусть, вопреки утверждению теоремы, найдётся точка $P \in M$ и двумерная площадка $\sigma \subset M_P$, такие что $K_\sigma(P) > 0$. Нетрудно видеть, что существуют единичные векторы $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in M_P$, такие что

$$\sigma = \text{Span} \{ \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \}$$

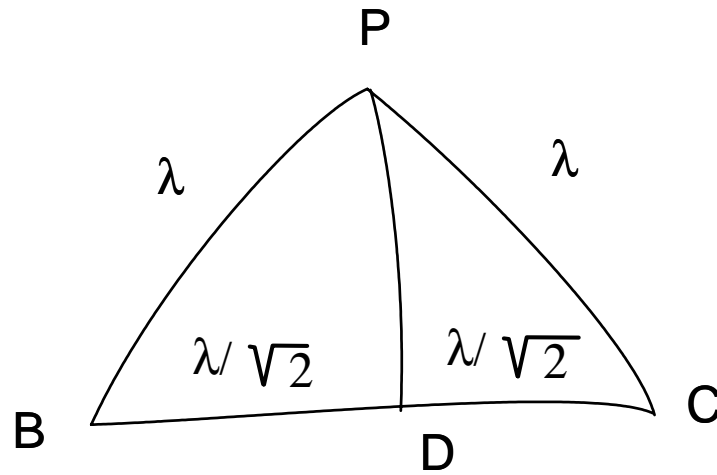
и

$$\text{dist}(\exp_P \lambda \overrightarrow{u}, \exp_P \lambda \overrightarrow{v}) = \sqrt{2}\lambda.$$

Пусть $B = \exp_P \lambda \overrightarrow{u}$ и $C = \exp_P \lambda \overrightarrow{v}$. Пусть D -- середина кратчайшей BC .



III.

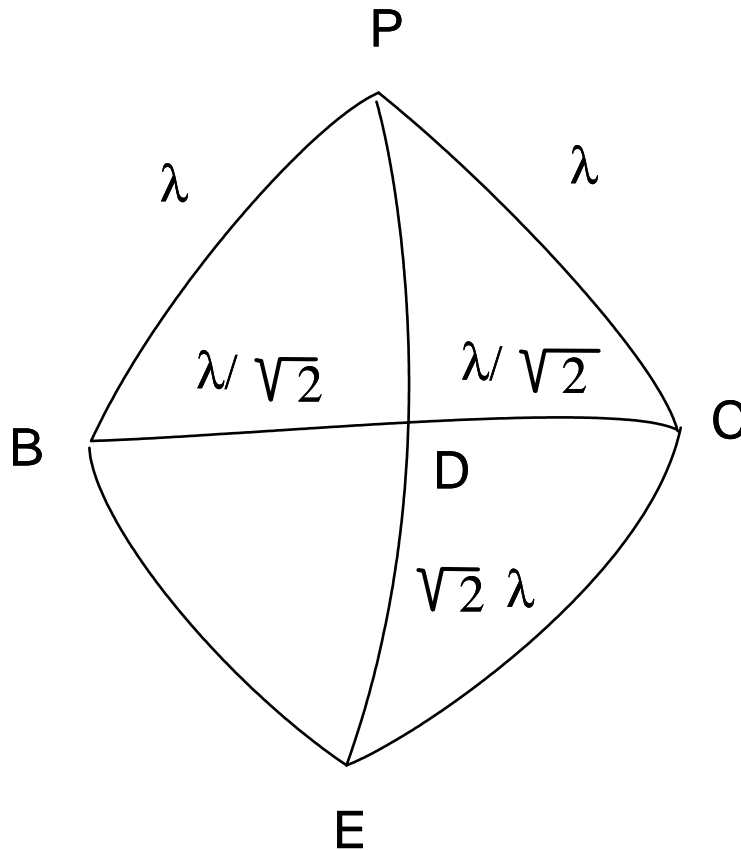


Докажем, что $PD < \sqrt{2}\lambda$. Действительно, пусть $PD \geq \sqrt{2}\lambda$. Тогда

$$\begin{aligned}
 & \cos \angle (\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{CD}) \\
 &= \frac{PD^2 + (\sqrt{2}\lambda)^2 - \lambda^2 - \left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)^2}{2\lambda \cdot \left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)} \\
 &= \frac{PD^2 + 2\lambda^2 - \lambda^2 - \frac{\lambda^2}{2}}{2\lambda \cdot \left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)} \\
 &= \frac{PD^2 + \frac{\lambda^2}{2}}{2\lambda^2/\sqrt{2}} \geq \frac{2\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda^2}{2\lambda^2/\sqrt{2}} \\
 &= \frac{2 + \frac{1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5}{2\sqrt{2}} \approx 1.767 > 1,
 \end{aligned}$$

противоречие. Поэтому должно быть $PD < \sqrt{2}\lambda$.

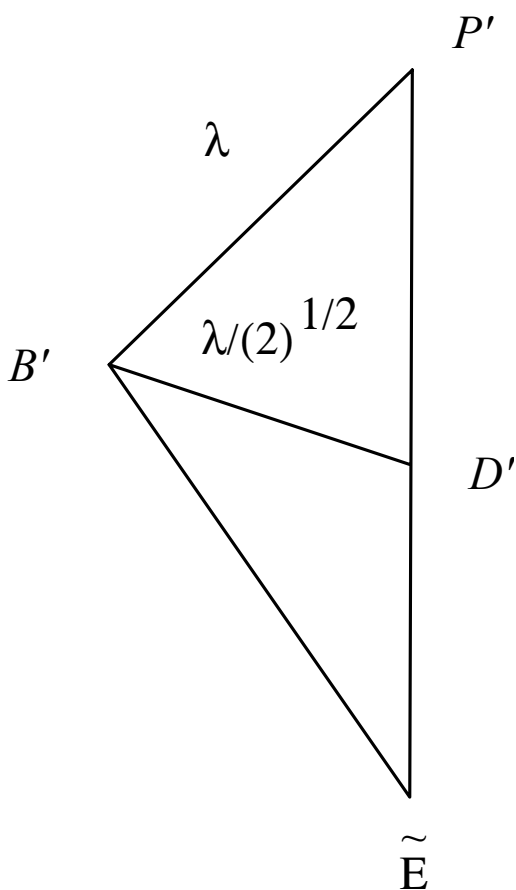
IV. Поскольку $PD < \sqrt{2}\lambda$, мы можем продлить кратчайшую PD до кратчайшей PE длины $\sqrt{2}\lambda$.



Утверждается, что

$$0 < BE < \lambda.$$

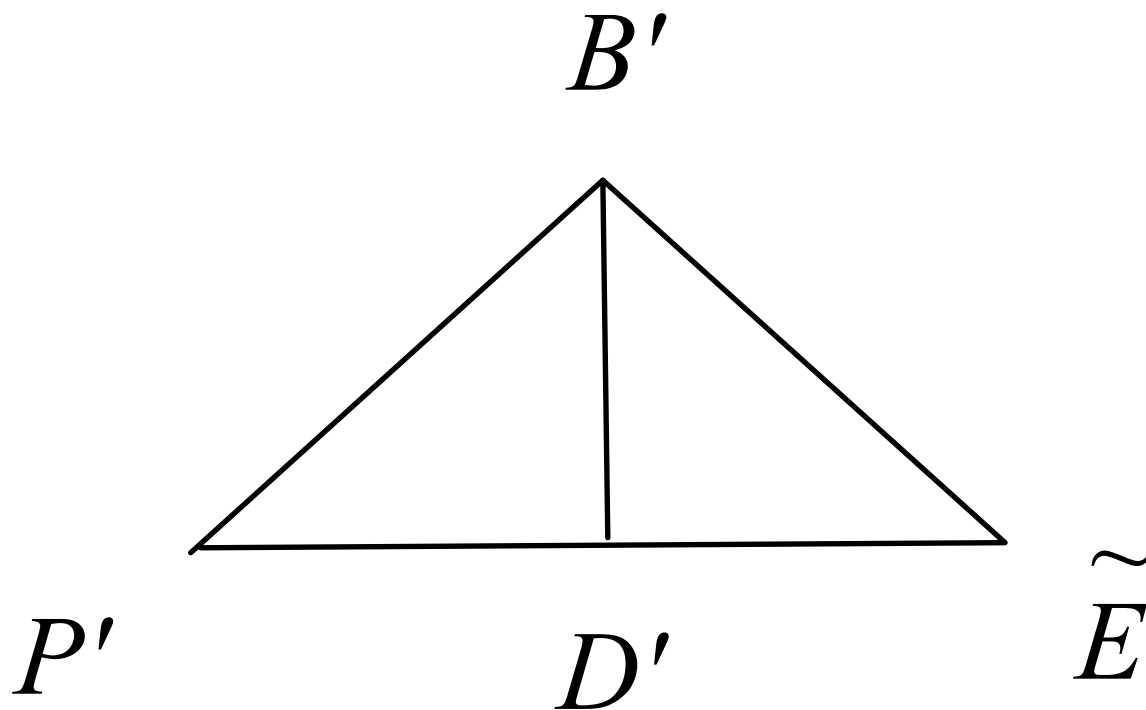
В самом деле, если $B = E$, то тогда $PD + DE = \sqrt{2}\lambda > \lambda = PB$, противоречие. Итак, $BE > 0$. Теперь докажем, что $BE < \lambda$. Для этого рассмотрим треугольник $T = PDB$ и его изометрическую копию в \mathbb{R}^2 -- $T' = P'D'B'$. Продолжим $P'D'$ через точку D' до отрезка $P'\tilde{E}$ длины $\sqrt{2}\lambda$. Докажем, что $B'\tilde{E} \leq \lambda$.



В самом деле, $\angle B'P'\tilde{E} < \pi/2$, поскольку $\angle B'P'\tilde{E} = \angle B'P'D'$ и

$$\cos \angle B'P'D' = \frac{\lambda^2 + PD^2 - \frac{\lambda^2}{2}}{2\lambda \cdot PD} = \frac{PD^2 + \frac{\lambda^2}{2}}{2\lambda \cdot PD} > 0.$$

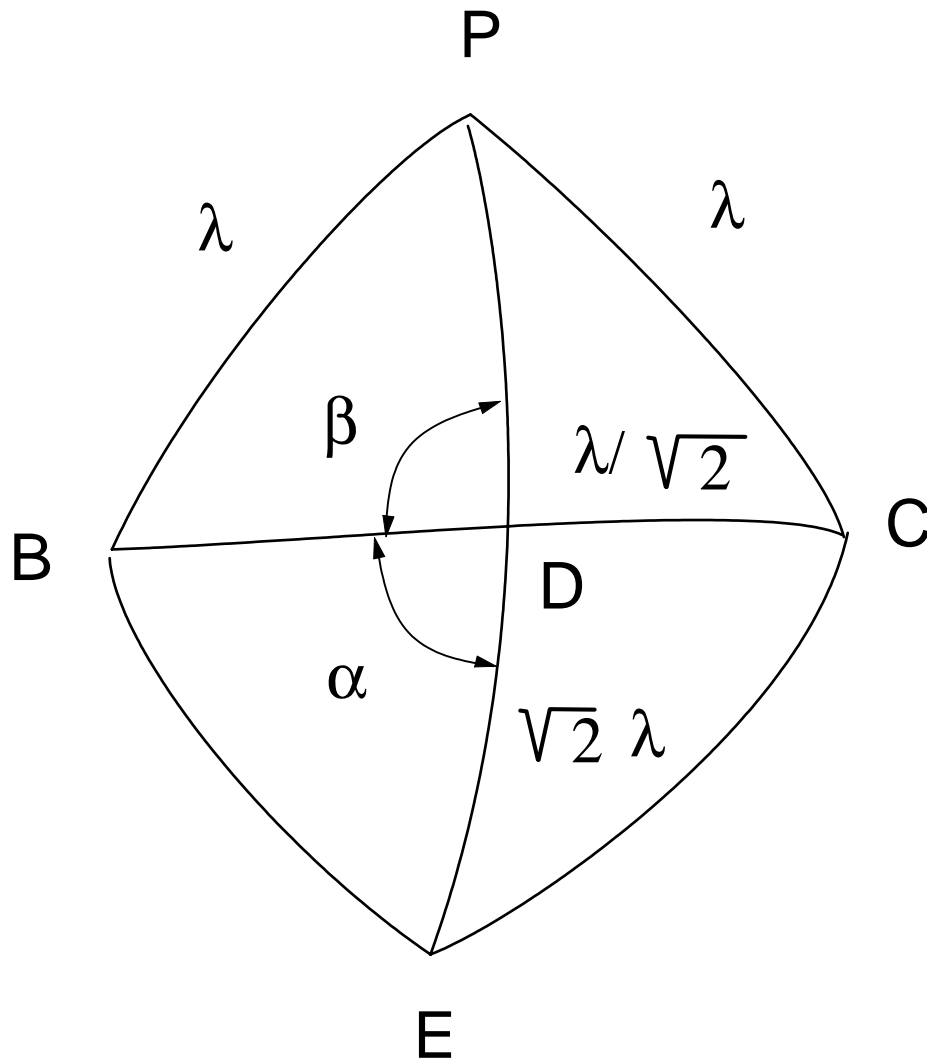
Осталось заметить, что $B'\tilde{E}$ максимизируется выбором $P'D' = \sqrt{2}\lambda/2 \Rightarrow B'\tilde{E} \leq \lambda$.



Итак, имеем:

$$B'\tilde{E} \leq \lambda.$$

Теперь, мы приступаем к доказательству того, что $BE < \lambda$. Рассмотрим треугольник $\tilde{T} = BDE$ и его изометрическую копию на евклидовой плоскости $\tilde{T}' = B'D'E'$.



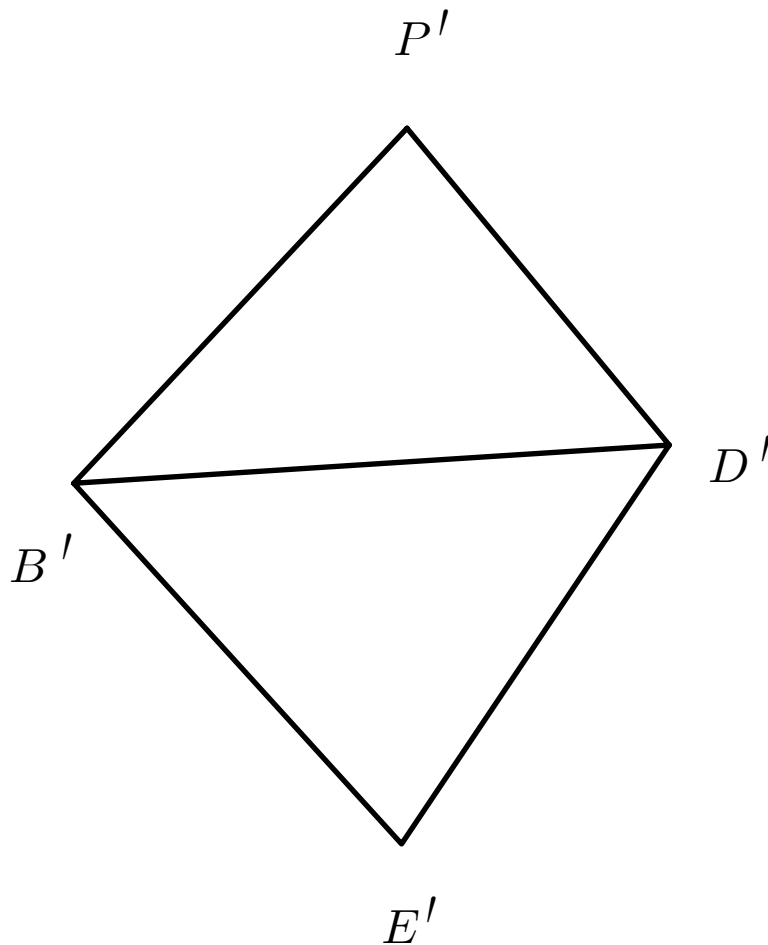
Поскольку кривизна в точке P в направлении σ положительна, по теореме сравнения углов, имеем:

$$\alpha \geq \alpha_0, \beta \geq \beta_0.$$

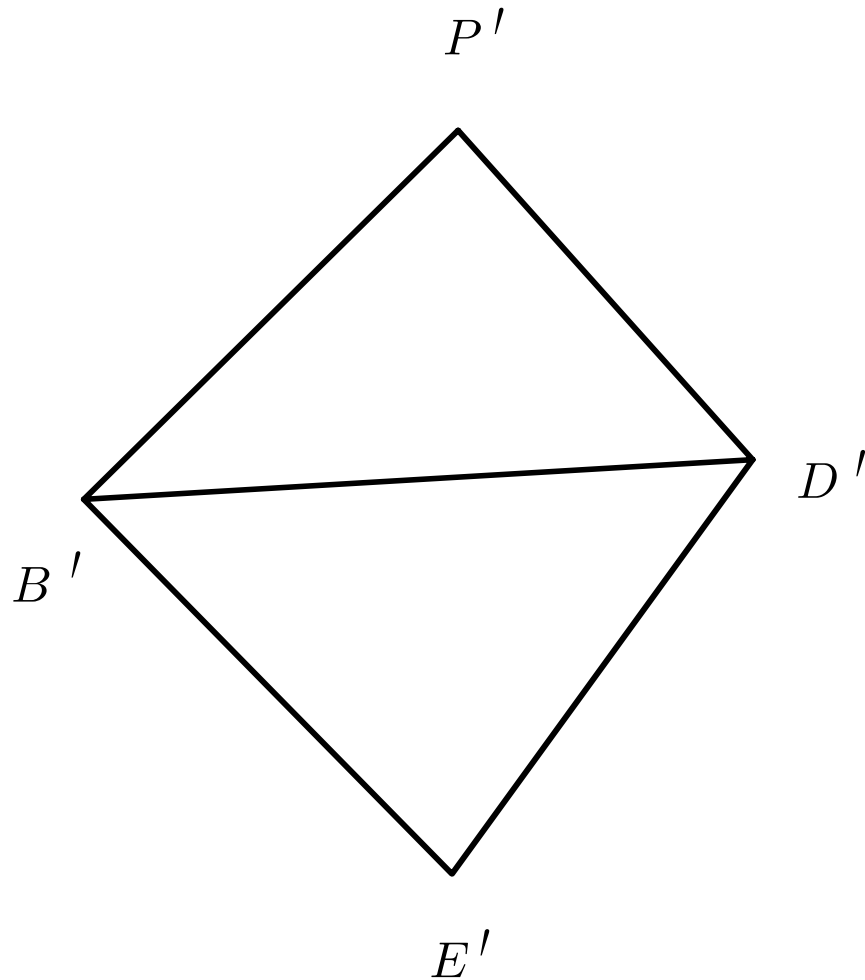
Заметим, что α не может быть равно α_0 , потому что треугольник PBD -- невырожденный и равенство углов, по теореме Александра, влечёт изометрию треугольников PBD и $P'B'D'$. Так как \mathcal{PE} -- кратчайшая, имеем:

$$\pi = \alpha + \beta > \alpha_0 + \beta_0.$$

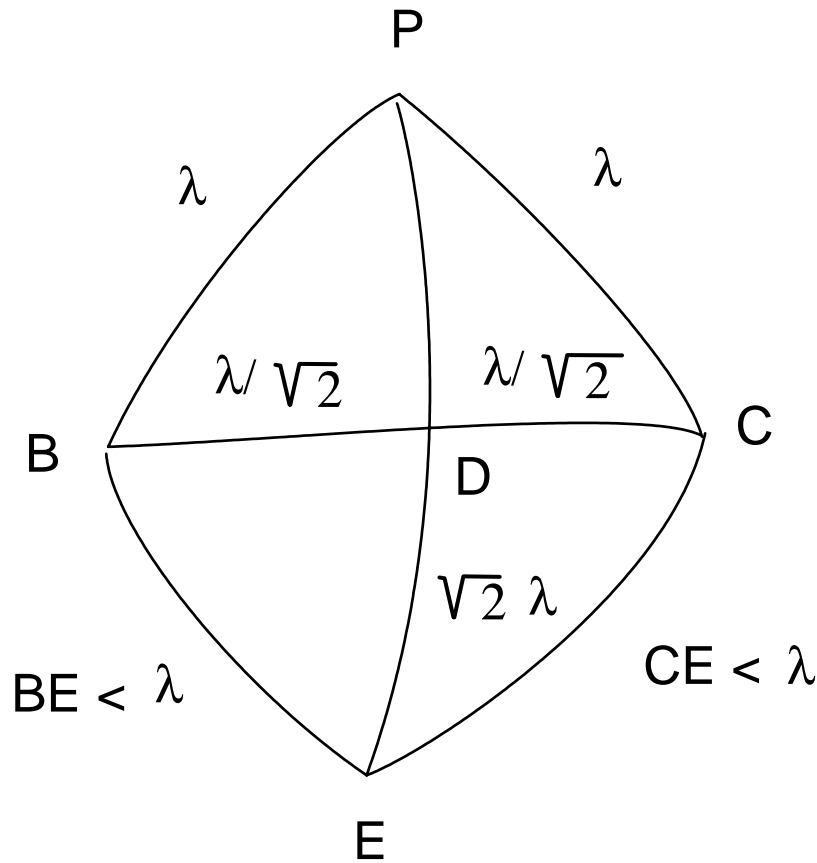
Рассмотрим четырёхугольник $P'B'E'D'$, составленный из треугольников $P'D'B'$ и $B'D'E'$:



Поскольку $\angle P'D'E' = \alpha_0 + \beta_0 < \pi$, мы можем, увеличивая $B'E'$ распрямить угол $\angle P'D'E'$ и получить треугольник $P'E'B'$, который изометричен треугольнику PEB . Таким образом, $0 < BE < \lambda$ доказано. Аналогично доказывается: $0 < CE < \lambda$.



V. Теперь нетрудно завершить доказательство теоремы. Имеем:



$$\begin{aligned} \cos q \left(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{CE} \right) &= \frac{PE^2 + BC^2 - PC^2 - BE^2}{2PB \cdot CE} \\ &= \frac{2\lambda^2 + 2\lambda^2 - \lambda^2 - BE^2}{2\lambda \cdot CE} \\ &> \frac{2\lambda^2 + 2\lambda^2 - \lambda^2 - \lambda^2}{2\lambda \cdot CE} > \frac{2\lambda^2}{2\lambda^2} = 1, \end{aligned}$$

противоречие. Таким образом, верно $K_\sigma \leq 0$, для каждой точки и для каждого двумерного направления. Доказательство теоремы завершено. ■

Верна также следующая экстремальная теорема.

Прежде, чем сформулировать теорему, введём следующее определение. Предположим, что метрическое пространство (M, ρ) метрически связно: любые две его точки соединимы кратчайшей. Для точек $P, Q \in M$, обозначим через $\mathcal{G}(P, Q)$ множество точек всех кратчайших, соединяющих P и Q . Для $\mathcal{A} \subseteq M$ полагаем:

$$\mathcal{G}(\mathcal{A}) = \cup_{P, Q \in \mathcal{A}} \mathcal{G}(P, Q).$$

Пусть $\mathcal{G}^0(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, и обозначим $\underbrace{\mathcal{G}(\dots \mathcal{G}(\mathcal{A}))}_{m \text{ раз}}$ через $\mathcal{G}^m(\mathcal{A})$, $m > 0$. Выпуклая (геодезическая) оболочка множества \mathcal{A} в (M, ρ) есть $\cup_{m=0}^{\infty} \mathcal{G}^m(\mathcal{A})$.

Теорема 32 Пусть (M, ρ) -- метрически связное пространство. Предположим, что для каждой четвёрки различных точек в M , $|\cos q| \leq 1$. Если для некоторой четвёрки различных точек $\{A, B, C, D\}$ выполнено:

$$\cos q \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \right) = 1,$$

то тогда выпуклая геодезическая оболочка множества $\{A, B, C, D\}$, $\mathcal{G}(\{A, B, C, D\})$, либо изометрична четырёхугольнику на евклидовой плоскости или отрезку прямой линии.

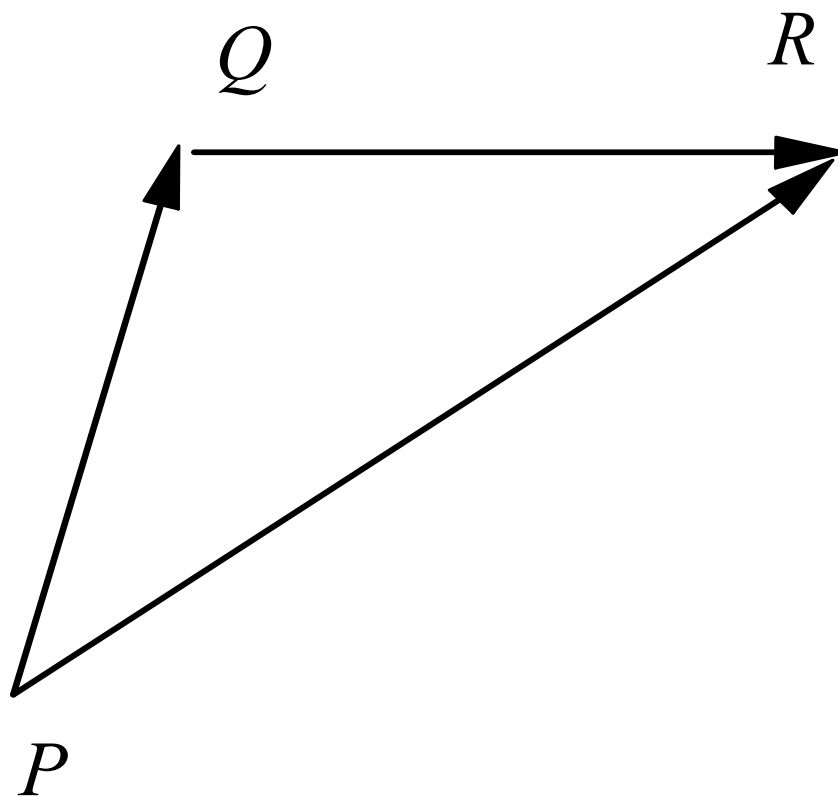
16.1 План доказательства Теоремы 32

I. Принцип усреднения для cosq .

Лемма 33 Пусть $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$, $\vec{v} = \overrightarrow{QR}$ и $\vec{w} = \overrightarrow{PR}$.
Тогда

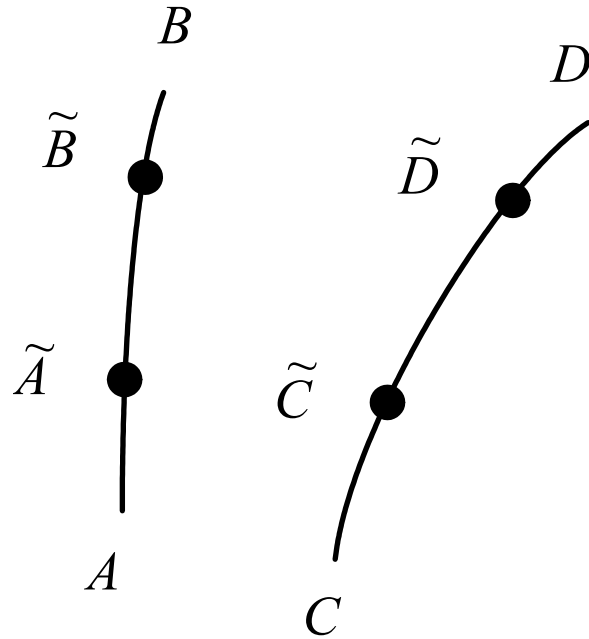
$$\begin{aligned} & \text{cosq}(\vec{w}, \vec{u} + \vec{v}) \\ &= \frac{|\vec{u}|}{|\vec{u} + \vec{v}|} \text{cosq}(\vec{w}, \vec{u}) + \frac{|\vec{v}|}{|\vec{u} + \vec{v}|} \text{cosq}(\vec{w}, \vec{v}). \end{aligned}$$

Доказательство получается из определения cosq .



Сложение векторов.

II. Пусть $\text{cosq}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 1$ и $|\text{cosq}| \leq 1$. Тогда $\text{cosq}(\overrightarrow{\tilde{A}\tilde{B}}, \overrightarrow{\tilde{C}\tilde{D}}) = 1$.



Для доказательства применим принцип усреднения.
Имеем:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{\tilde{A}\tilde{B}} + \overrightarrow{\tilde{B}B}; \\ \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{CC} + \overrightarrow{\tilde{C}\tilde{D}} + \overrightarrow{\tilde{D}D}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1 &= \text{cosq}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \text{cosq}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CC} + \overrightarrow{\tilde{C}\tilde{D}} + \overrightarrow{\tilde{D}D}) \\ &= \text{cosq}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CC}) \frac{CC}{CD} \\ &\quad + \text{cosq}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\tilde{C}\tilde{D}} + \overrightarrow{\tilde{D}D}) \frac{\tilde{C}D}{CD}.\end{aligned}$$

Поскольку $|\cos q| \leq 1$ и $\frac{C\tilde{C}}{CD} + \frac{\tilde{C}D}{CD} = 1$, получаем:
 $\cos q \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\tilde{C}\tilde{D}} + \overrightarrow{\tilde{D}D} \right) = 1$ и $\cos q \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{C\tilde{C}} \right) = 1$.

Вновь применяя принцип усреднения к равенству

$$1 = \cos q \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\tilde{C}\tilde{D}} + \overrightarrow{\tilde{D}D} \right),$$

получаем, что

$$\cos q \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\tilde{C}\tilde{D}} \right) = 1.$$

Аналогично доказывается, что из равенства

$$\cos q \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\tilde{C}\tilde{D}} \right) = 1$$

следует равенство

$$\cos q \left(\overrightarrow{\tilde{A}\tilde{B}}, \overrightarrow{\tilde{C}\tilde{D}} \right) = 1,$$

что и требовалось.

III. Изометрическое погружение в \mathbb{R}^2 в виде параллелограмма.

Лемма 34 Пусть $AB + CD$, $\text{cosq}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 1$ и $|\text{cosq}| \leq 1$. Тогда множество $\{A, B, C, D\}$ различных точек может быть погружено изометрически в \mathbb{R}^2 в виде вершин параллелограмма.

Доказательство. Поскольку

$$\text{cosq}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 1,$$

имеем:

$$\frac{AD^2 + BC^2 - BD^2 - AC^2}{2AB \cdot CD} = 1 \Rightarrow$$

$$AD^2 + BC^2 - BD^2 - AC^2 = 2AB^2.$$

Докажем, что

$$BD = AC.$$

Если $BD \neq AC$, то тогда

$$BD^2 + AC^2 > 2BD \cdot AC.$$

Имеем:

$$AD^2 + BC^2 - 2AB^2 = BD^2 + AC^2 > 2BD \cdot AC \Rightarrow$$

$$\text{cosq}(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = \frac{AD^2 + BC^2 - 2AB^2}{2BD \cdot AC} > 1,$$

противоречие. Таким образом, имеем: $BD = AC$.

Теперь рассмотрим евклидовый параллелограмм

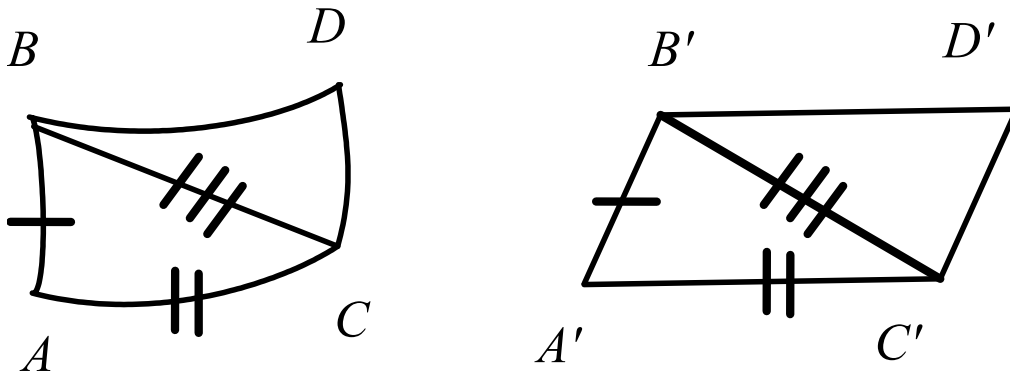
$$A'B'C'D',$$

такой что

$$AB = A'B';$$

$$AC = A'C';$$

$$BC = B'C'.$$



Имеем:

$$1 = \cosq \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \right) = \frac{BC^2 + AD^2 - BD^2 - AC^2}{2AB \cdot CD};$$

$$1 = \cosq \left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'} \right)$$

$$= \frac{C'B'^2 + A'D'^2 - B'D'^2 - A'C'^2}{2A'B' \cdot C'D'}.$$

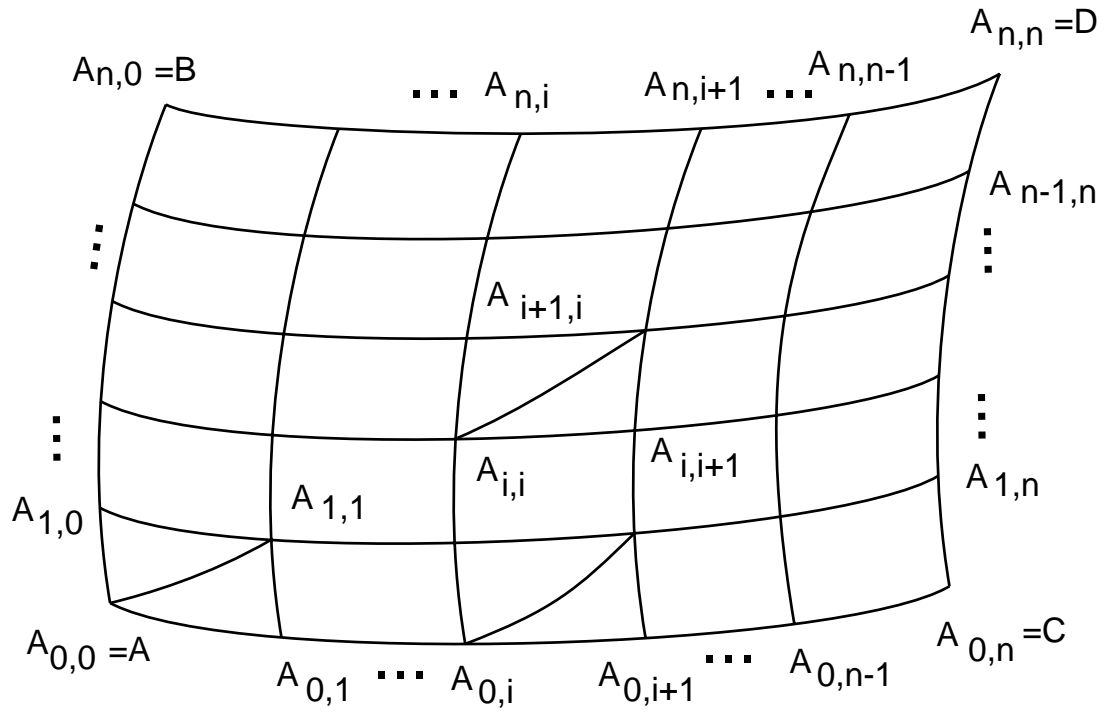
$$\frac{BC^2 + AD^2 - BD^2 - AC^2}{2AB \cdot CD}$$

$$= \frac{C'B'^2 + A'D'^2 - B'D'^2 - A'C'^2}{2A'B' \cdot C'D'} \Rightarrow$$

$$AD^2 = A'D'^2 \Rightarrow AD = A'D'.$$

■

IV. Само изометрическое отображение строится разбиением параллелограмма на маленькие параллелограммы и применением предыдущей леммы.



Заключительное замечание.

Теорема 35 Пусть $T = LPM$ -- треугольник в области \mathfrak{R}_K , такой что $\angle QPR > 0$. Пусть $Q, X \in \mathcal{PL}$ и $R, Y \in \mathcal{PM}$. Пусть $PQ = PR = t$ и $PX = PY = h$. Тогда

$$\lim_{h,t \rightarrow 0} \cosq \left(\overrightarrow{QR}, \overrightarrow{XY} \right) = 1.$$

