Введение в гиперболическую геометрию

Лекция 1:

- 2-мерные геометрии постоянной кривизны
- теорема о трех симметриях
- модели геометрии Лобачевского
- модель Пуанкаре в верхней полуплоскости
- кривизна $\mathbb{H}^2$
- вывод геодезических в $\mathbb{H}^2$
- формула для расстояния между точками в $\mathbb{H}^2$
- группа изометрий $\mathbb{H}^2$ и дробно линейные отображения
- площадь треугольника в $\mathbb{H}^2$
- окружность в $\mathbb{H}^2$

Постулаты Евклида ["Элементы", ок. III в. до н.э.]

(1) от каждой точки к каждой точке можно провести прямую линию

(2) ограниченную прямую можно продолжить по прямой

(3) вокруг любого центра на любом расстоянии можно провести окружность

(4) все прямые углы равны друг другу

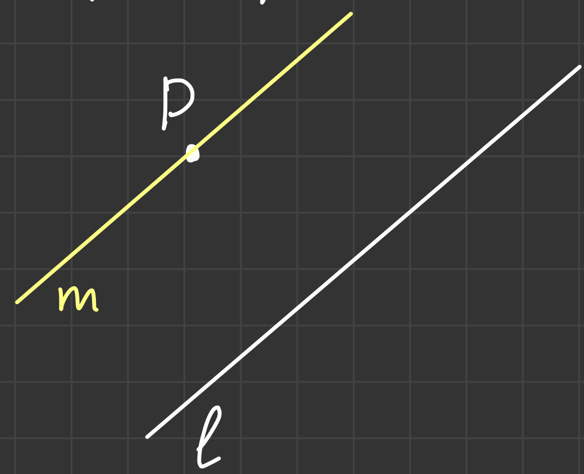
(5) если две прямые параллельны, то при пересечении их третьей прямой соответствующие углы равны

(1) + (2) + (3) = построения с помощью циркуля и линейки

При выборе аксиом вставал вопрос об их полноте и непротиворечивости.

(5) $\Longleftrightarrow$ Постулату Прокла – Плэйфера:

$\forall$ прямой ℓ и точки $P \notin \ell$ $\exists!$ прямая m: $\begin{cases} P \in m \\ m \parallel \ell \end{cases}$ $(m \cap \ell = \varnothing)$

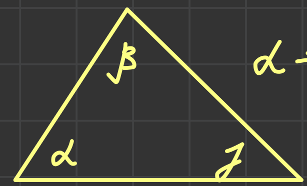


<u>Вопрос:</u> Верно ли, что (5) постулат независим от остальных (1)–(4) ?

Независимость (5) постулата доказана благодаря построению неевклидовых геометрий.

A.-M. Legendre (1752-1833), G. Saccheri (1667-1733), J.H. Lambert (1728-1777);

(5) $\Longleftrightarrow$ $\forall$ треугольника сумма углов = двум прямым



$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

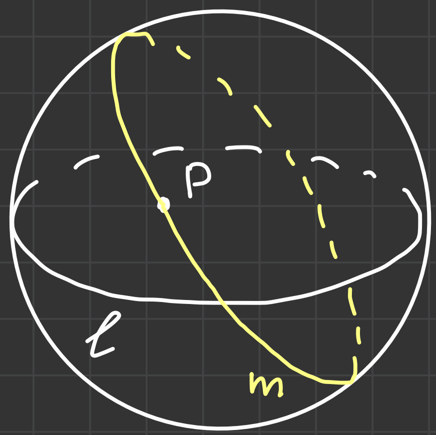
Н.И. Лобачевский (1792-1856), Я. Больяи (1802-1860), К. Гаусс:

$\exists$ другие геометрии, в которых не имеет места (5) постулат.

[Лобачевский, 11 февраля 1826 г., доклад "Краткое изложение основ геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных" на заседании Физ.-мат. общества Казанского университета]

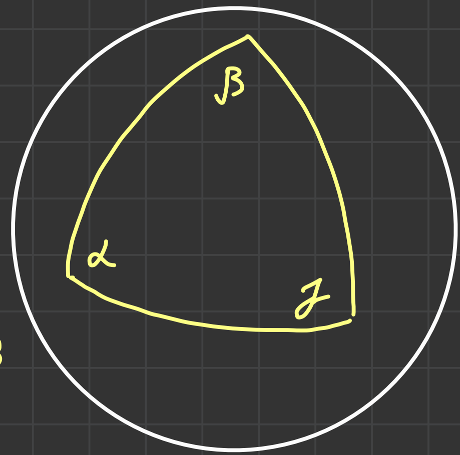
$\exists$ 2 возможных отрицания (5) постулата:

① Сферическая геометрия



$\forall$ прямой ℓ и точки $P \notin \ell$

$\neg\exists$ прямой m: $\begin{cases} P \in m \\ m \cap \ell = \varnothing \end{cases}$ $\Longleftrightarrow$

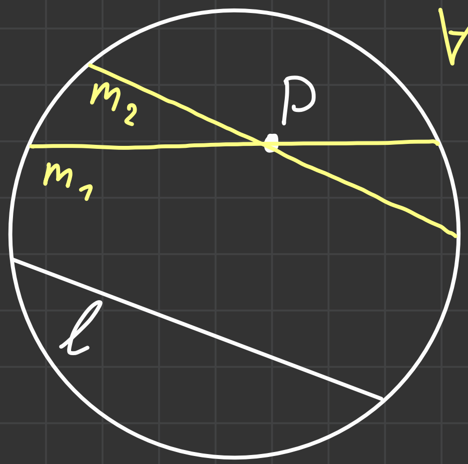


$\alpha + \beta + \gamma > \pi$

$\Longleftrightarrow$ $\forall$ треугольника сумма углов

$\alpha + \beta + \gamma > \pi$

② Гиперболическая геометрия (геометрия Лобачевского - Больяи - Гаусса)



$\forall$ прямой ℓ и точки $P \notin \ell$

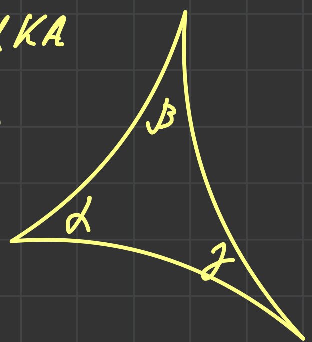
$\exists$ бесконечно много

прямых m_j: $\begin{cases} P \in m_j \\ m_j \cap \ell = \varnothing \end{cases}$

$\Longleftrightarrow$ $\forall$ треугольника

сумма углов

$\alpha + \beta + \gamma < \pi$



Движения на $\mathbb{E}^2$:

T_v – сдвиг на вектор v

R_A^φ – поворот на угол φ вокруг точки A

S_α – отражение отн. прямой α

Теорема Шаля:

$\forall$ движение $\mathbb{E}^2$ это T_v или R_A^φ или $\underset{v \parallel a}{T_v \circ S_\alpha}$ (скользящая симметрия).

Лемма о трёх гвоздях:

Если движение f имеет 3 неподв. точки, не лежащие на одной прямой, то $f = id$.

Док-во леммы: Если $f(D) = D' \neq D$, то все неподв. точки f лежат на серединном перпендикуляре к DD' (на одной прямой). $\square$

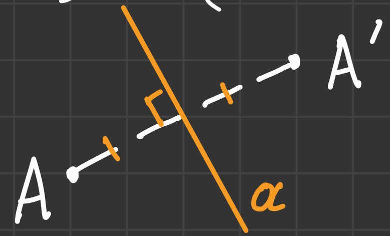
Теорема о трех симметриях:

$\forall$ движение $\mathbb{E}^2$ это композиция 0, 1, 2 или 3 осевых симметрий.

Док-во:

Если $f = id$, то доказано (0 симметрий).

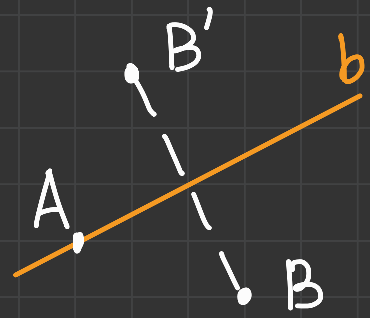
Пусть $f(A) = A' \neq A$



Пусть $g = S_\alpha \circ f$, тогда A – неподв. точка g.

Если $g = id$, то $f = S_\alpha$, т.к. $id = S_\alpha \circ S_\alpha$ (1 симметрия)

$g(A) = A$, пусть $g(B) = B' \neq B$

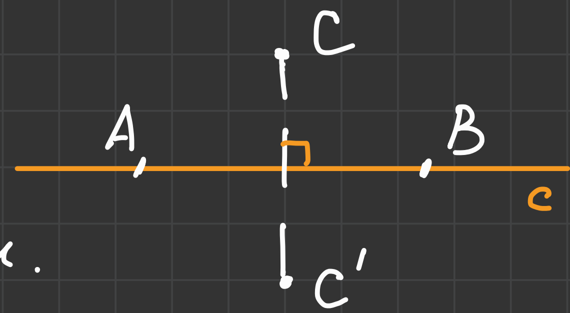


Пусть $h = S_b \circ g = S_b \circ S_\alpha \circ f$,

тогда A и B неподв. точки h.

Если $h = id$, то $f = S_\alpha \circ S_b$ (2 симметрии)

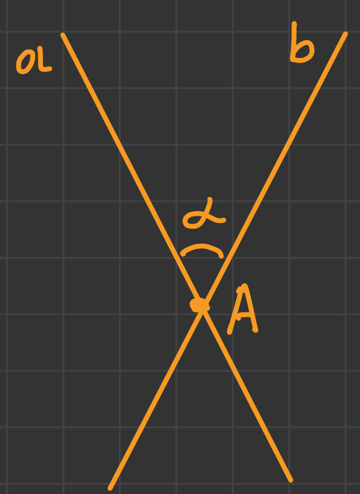
$h(A) = A$, $h(B) = B$, пусть $h(C) = C' \neq C$



У движения $S_c \circ h = S_c \circ S_b \circ S_\alpha \circ f$ 3 неподв. точки.

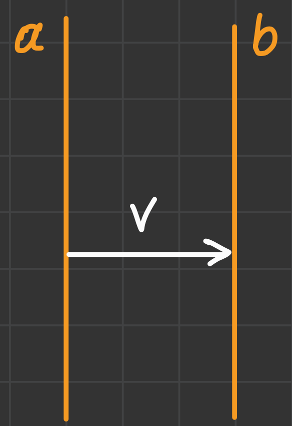
$\Rightarrow S_c \circ h = S_c \circ S_b \circ S_a \circ f = id$ по лемме о трёх гвоздях $\Rightarrow$

$f = S_a \circ S_b \circ S_c$ (3 симметрии) $\square$



$S_a \circ S_b = R_A^{2\alpha}$ – поворот на 2α вокруг точки A – это композиция 2х отражений отн. прямых a, b:

$$a, b : \begin{cases} a \cap b = A \\ \alpha = \text{угол между прямыми } a, b \end{cases}$$



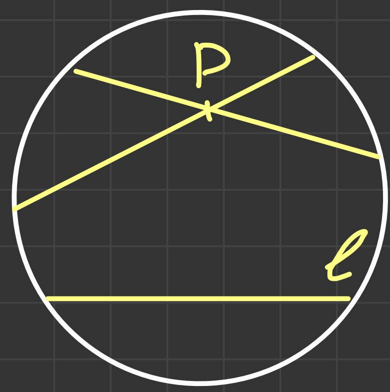
$S_a \circ S_b = T_{2v}$ – сдвиг на вектор $2v$ – это композиция 2х отражений отн. прямых a, b:

$$\begin{cases} a \parallel b \\ v \perp a \quad (v \perp b) \\ |v| = \text{расстояние между } a \text{ и } b \end{cases}$$

Скользящая симметрия $T_v \circ S_c = S_a \circ S_b \circ S_c$

Доказательство теоремы о трёх симметриях не опирается на аксиому о параллельных (5 постулат).

Проективная модель Бельтрами-Клейна в единичном диске

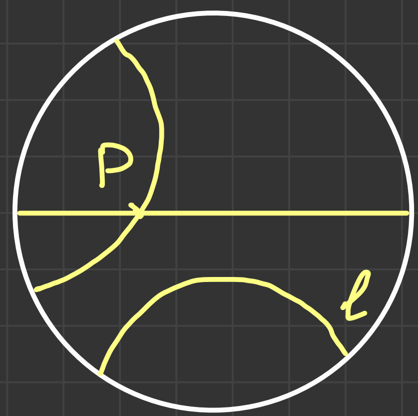


$$\mathbb{H}^2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2<1\}$$

с метрикой $ds^2=\dfrac{dx^2+dy^2-(ydx+xdy)^2}{(1-(x^2+y^2))^2}$

Граница $x^2+y^2=1$ def Абсолют

Конформная модель Пуанкаре в единичном диске

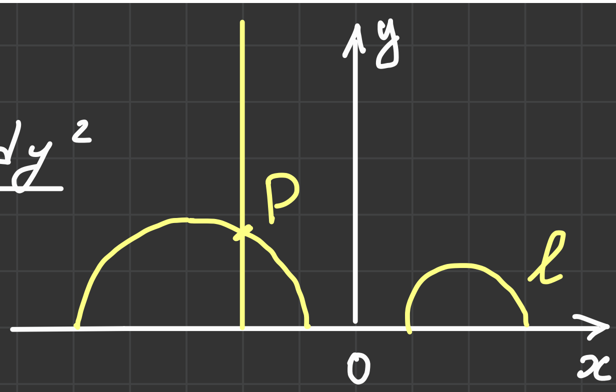


$$\mathbb{H}^2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2<1\}$$

с метрикой $ds^2=4\dfrac{dx^2+dy^2}{(1-(x^2+y^2))^2}$

Граница $x^2+y^2=1$ def Абсолют

Модель Пуанкаре в верхней полуплоскости



$\mathbb{H}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ с метрикой $ds^2 = \dfrac{dx^2 + dy^2}{y^2}$

граница $(y=0)$ def **Абсолют**

Упр.: Показать изоморфность трёх моделей $\mathbb{H}^2$.

Указание: $w = \dfrac{z-i}{z+i}$ $(3 \to 2)$, $\zeta = \dfrac{2w}{1+|w|^2}$ $(2 \to 1)$.

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

Имеем поверхность с I кв. формой $I = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$

Теорема Гаусса (Egregium): Гауссова кривизна

$$K = \frac{1}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} \left[\left(\Gamma_{12}^k \Gamma_{12}^l - \Gamma_{11}^k \Gamma_{22}^l \right) g_{kl} + \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1 \partial u^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u^2 \partial u^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1 \partial u^1} \right],$$ где

u^1, u^2 - локальные координаты, $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{lk} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} \right)$ – символы Кристоффеля, $(g^{lk}) = (g_{kl})^{-1}$.

$u^1 = x$, $u^2 = y$, $g_{11} = g_{22} = \frac{1}{y^2}$, $g_{12} = 0$; $g^{11} = g^{22} = y^2$

$\Rightarrow \Gamma_{11}^1 = 0$, $\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{y}$, $\Gamma_{22}^1 = 0$, $\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{y}$, $\Gamma_{12}^2 = 0$, $\Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{y}$

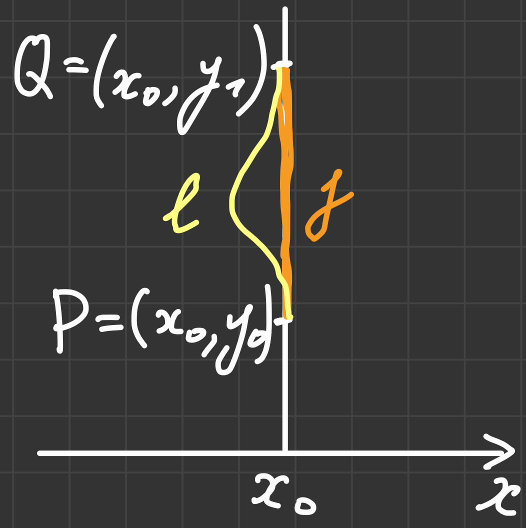
$\Rightarrow K = -1$.

Упр.: Аккуратно посчитать и проверить.

Геодезические в $\mathbb{H}^2$ (модель в верхней полуплоскости)

Геодезическая это кривая ℓ : $\forall$ пары точек $P, Q \in \ell$ она содержит кратчайшую, соединяющую P и Q.

Лемма 1: Вертикальные полупрямые явл-ся геодезическими в $\mathbb{H}^2$.



Док-во: Пусть $P=(x_0,y_0)$, $Q=(x_0,y_1)$, $\gamma=[P,Q]$

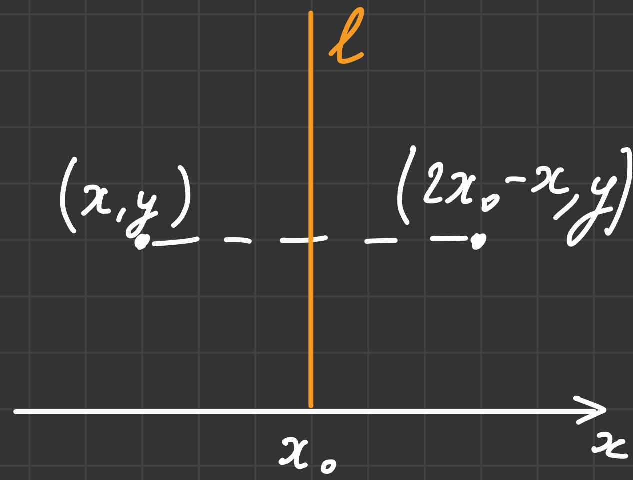
$$ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2} \Longrightarrow |\gamma| = \int_\gamma ds = \int_{y_0}^{y_1} \frac{|dy|}{y} = \left|\ln \frac{y_1}{y_0}\right|.$$

Пусть $\ell = \{(x(t), y(t)) : t_0 \le t \le t_1\}$ - гладкая кривая из P в Q, отличная от γ. Т.к. ℓ не вертикальный отрезок, то $\exists$ точка $t^* \in [t_0, t_1]$: $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t^*} \neq 0 \Longrightarrow$

$$|\ell| = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{y} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt > \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{y} \left(\frac{dy}{dt}\right) dt \geq \left|\ln \frac{y_1}{y_0}\right| = |\gamma|$$

$\Rightarrow$ вертикальный отрезок $\gamma = [P, Q]$ имеет наименьшую длину $\square$.

Отражения отн-но геодезических

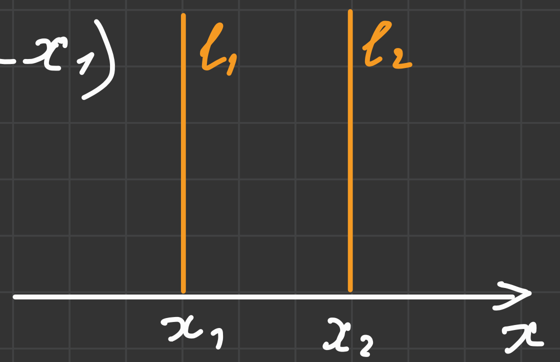


Отражение R_ℓ в вертикальной полупрямой

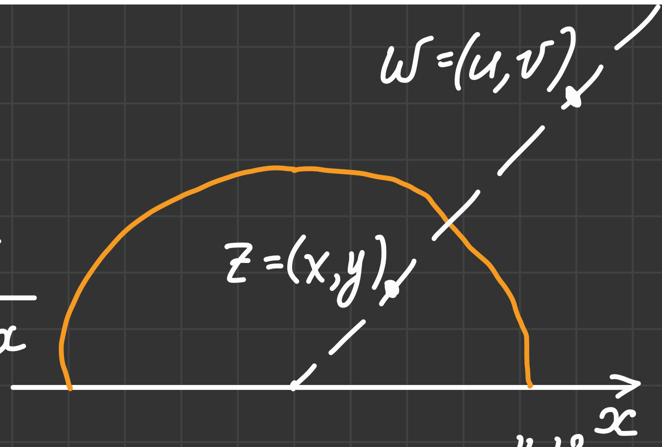
$$R_\ell : (x,y) \longrightarrow (u,v) = (2x_0 - x, y)$$

Горизонтальный перенос $T_\alpha : (x,y) \to (u,v) = (x+\alpha, y)$

<u>Упр.:</u> Покажите, что $T_\alpha = R_{\ell_1} \circ R_{\ell_2}$, где $\alpha = 2(x_2 - x_1)$



Инверсия $I_{a,r}$ в полуокружности $\perp$ абсолюту с центром a и радиусом r



$I_{a,r}: (x,y) \to (u,v)$, $z = x+iy \longmapsto w = u+iv = a + \frac{r^2}{\bar z - a}$

Лемма 2: Преобразования R_ℓ, T_a, $I_{a,r}$ являются изометриями $\mathbb{H}^2$.

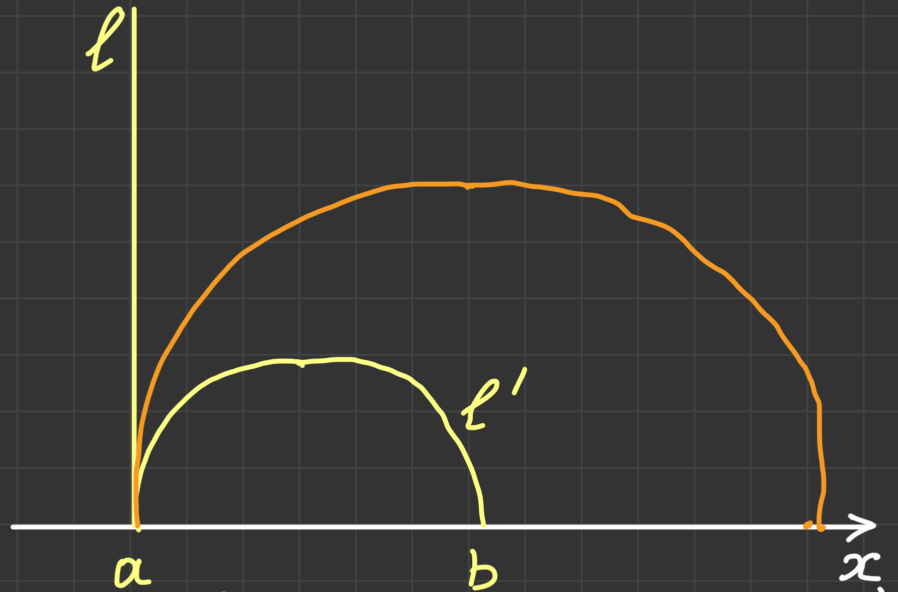
Док-во: Для R_ℓ очевидно, т.к. $\frac{du^2+dv^2}{v^2} = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$

Для гориз. переноса утв. следует из $T_a = R_{\ell_1} \circ R_{\ell_2}$

Для $I_{a,r}$: $w = a + \frac{r^2}{\bar z - a}$, $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2} = \frac{-4\,dz\,d\bar z}{(\bar z - z)^2} \Longrightarrow$

$$\frac{dw\,d\bar w}{(\bar w - w)^2} = \frac{dz\,d\bar z}{(\bar z - z)^2} \Longrightarrow \frac{du^2+dv^2}{v^2} = \frac{dx^2+dy^2}{y^2} \quad \square$$

Лемма 3: $\forall$ полуокружность $\perp$ абсолюту можно получить инверсией из полупрямой $\perp$ абсолюту.



Док-во: Инверсия $I_{b,\,b-a}: \ell \to \ell'$

Пусть $z = a + it$, $t > 0$, тогда

$$\omega = I_{b,\,b-a}(z) = b + \frac{(b-a)^2}{\bar z - b} = b + \frac{(b-a)^2}{a - it - b} = b - \frac{(b-a)^2}{(b-a)+it} = b - \frac{(b-a)^2((b-a)-it)}{(b-a)^2+t^2}.$$

Покажем, что $\left|\omega - \frac{a+b}{2}\right| = \frac{b-a}{2}$:

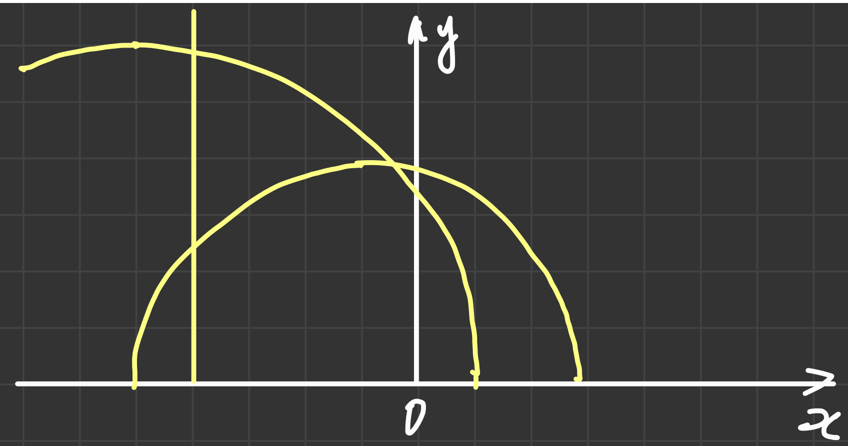
$$\omega - \frac{a+b}{2} = b - \frac{a+b}{2} + \frac{(b-a)^2((b-a)-it)}{(b-a)^2+t^2} = \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{2}\cdot\frac{2(b-a)^2 - 2(b-a)it}{(b-a)^2+t^2} =$$

$$= \frac{b-a}{2}\cdot\left[1 + \frac{2(b-a)^2 - 2i(b-a)t}{(b-a)^2+t^2}\right].$$

Модуль выражения в скобках:

$$\left|1 + \frac{2(b-a)^2 - 2i(b-a)t}{(b-a)^2+t^2}\right| = \left|\frac{-(b-a)^2 + t^2 - 2i(b-a)t}{(b-a)^2+t^2}\right| = \left|\frac{(t+i(b-a))^2}{t^2+(b-a)^2}\right| = \left|\frac{\xi^2}{|\xi|^2}\right| = 1,$$ где $\xi = t + i(b-a)$ $\square$

Лемма 1 + Лемма 2 + Лемма 3 $\Longrightarrow$



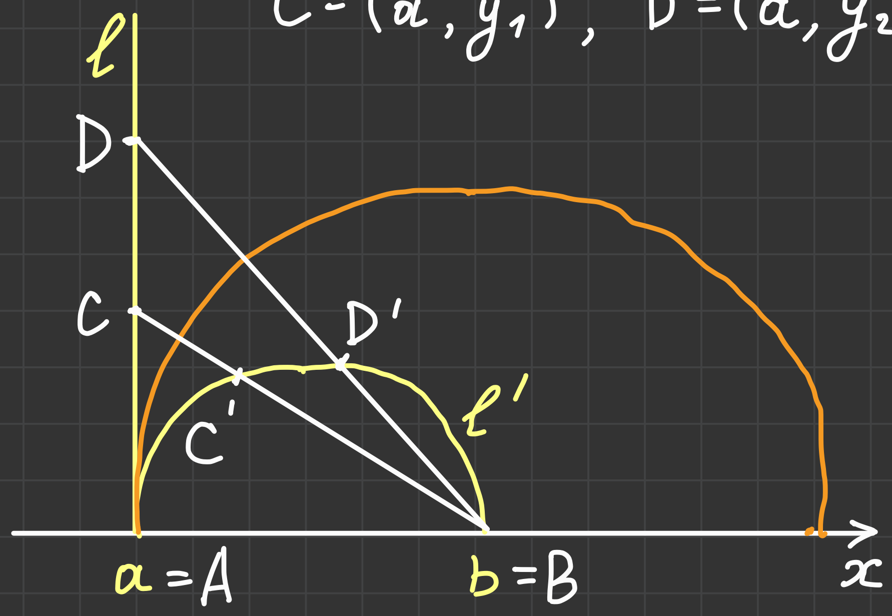
Теорема: Вертикальные полупрямые и полуокружности, ортогональные абсолюту являются геодезическими в $\mathbb{H}^2$.

Упр.: Покажите, что других геодезических нет.

Замечание: Инверсия $I_{a,r}$ – это отражение отн. евкл. полуокружности, ортогональной абсолюту.

Теорема о трех симметриях:

$\forall$ движение $\mathbb{H}^2$ это композиция 0, 1, 2 или 3 отражений в геодезических.



$C = (a, y_1),\ D = (a, y_2) \implies \rho(C,D) = \left| \ln \frac{y_2}{y_1} \right|$

Отражение $I_{b,\, b-a}$: $\ell \to \ell'$, $CD \to C'D'$

$\implies \rho(C', D') = \rho(C,D) = \left| \ln \frac{\operatorname{tg} \angle ABC'}{\operatorname{tg} \angle ABD'} \right|$

Теорема: Расстояние $\rho(z_1, z_2)$ между точками $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$:

(i) $\cosh \rho(z_1, z_2) = 1 + \dfrac{|z_1 - z_2|^2}{2\,\mathrm{Im}\, z_1 \cdot \mathrm{Im}\, z_2}$

(ii) $\rho(z_1, z_2) = \ln \dfrac{|z_1 - \bar{z}_2| + |z_1 - z_2|}{|z_1 - \bar{z}_2| - |z_1 - z_2|}$

Док-во: Без ограничения общности можно считать, что $z_1 = ip$, $z_2 = iq$, поскольку $\forall$ изометрия является композицией отражений и $w = w_0 + \dfrac{r^2}{\bar{z} - a}$ сохраняет $\dfrac{|z_1 - z_2|^2}{\mathrm{Im}\, z_1 \cdot \mathrm{Im}\, z_2}$.

По лемме 1 $\rho(z_1, z_2) = \left|\ln \dfrac{p}{q}\right| \Longrightarrow$

$$\cosh \rho(z_1, z_2) = \cosh\left|\ln \frac{p}{q}\right| = \frac{e^{|\ln p/q|} + e^{-|\ln p/q|}}{2} = \frac{p^2 + q^2}{2pq} =$$

$$= 1 + \frac{(p-q)^2}{2pq} = 1 + \frac{|ip - iq|^2}{2pq} = 1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{2\,\mathrm{Im}\, z_1 \cdot \mathrm{Im}\, z_2}$$ ((i) доказано)

(ii) следует из (i) $\square$

Представление изометрий $\mathbb{H}^2$ матрицами

Пусть $\mathbb{H}^2 = \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0 \}$.

Дробно линейное отображение это $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d} \in \mathbb{C}$, где $ad-bc \neq 0$.

- $\forall$ Д.Л.О. переводит обобщенные окружности в обобщенные окружности и сохраняет углы.
- $\forall$ Д.Л.О. является композицией отражений в обобщенных окружностях.
- Д.Л.О. переводит $\mathbb{R}$ в себя $\Longleftrightarrow$ Д.Л.О. является композицией отражений в обобщенных окружностях, ортогональных $\mathbb{R}$.
- Д.Л.О. переводит $\mathbb{R}$ в себя $\Longleftrightarrow$ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$\Longrightarrow$ **Теорема:** $\forall$ изометрия H^2 представима в виде

$z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ собственное Д.Л.О. или $z \mapsto \dfrac{a(-\bar{z})+b}{c(-\bar{z})+d}$ несобственное Д.Л.О.,

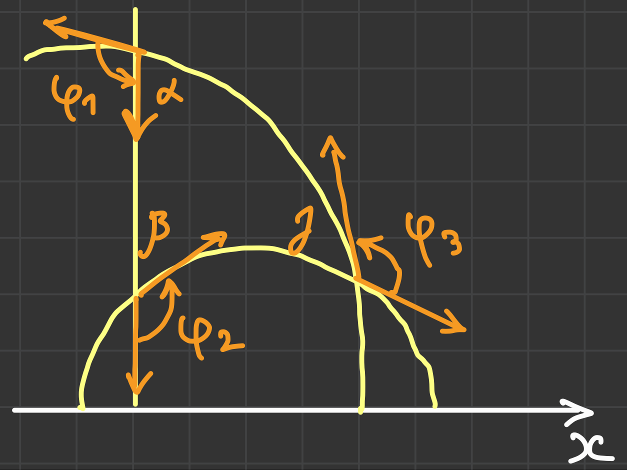
где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad-bc>0$.

Замечание: Используя нормировку $ad-bc=1$, получаем, что группа всех собственных преобразований $\mathbb{H}^2$ изоморфна $PSL(2,\mathbb{R})$.

Формула Гаусса-Бонне: Ω - область с кусочно гладкой границей $\partial\Omega$, φ_i - угол поворота касательного вектора в точке излома P_i в сторону области Ω.

$$\int\limits_{\Omega} K\, d\sigma + \int\limits_{\partial\Omega} k_g\, ds + \sum_i \varphi_i = 2\pi\chi(\Omega),$$

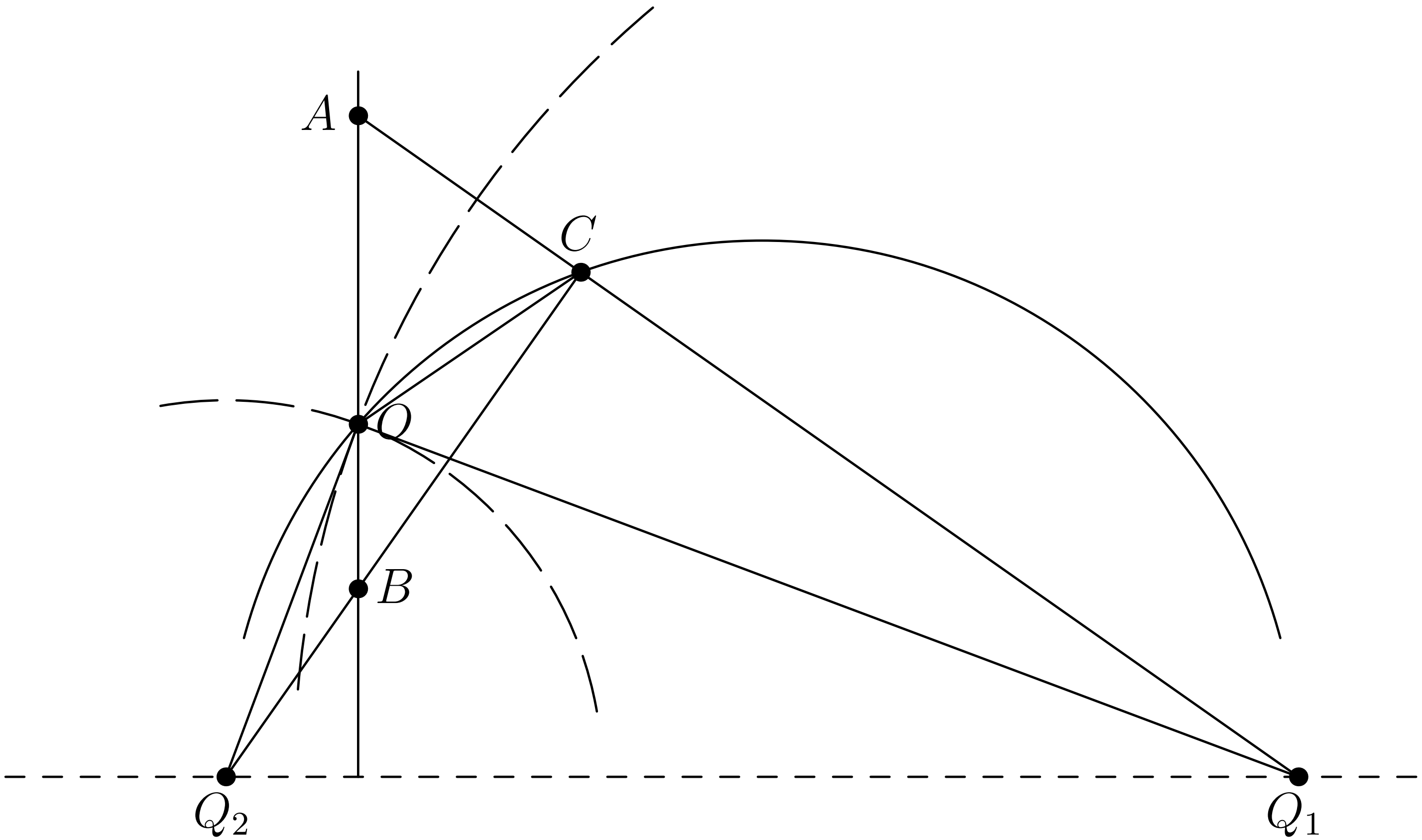
где K - гауссова кривизна поверхности, k_g - геодезическая кривизна границы $\partial\Omega$, $\chi(\Omega)$ - эйлерова характеристика.



$\alpha = \pi - \varphi_1$, $\beta = \pi - \varphi_2$, $\gamma = \pi - \varphi_3$, $K=-1$, $k_g = 0$,

$\chi(\Delta) = 3-3+1 = 1 \Longrightarrow -\int\limits_{\Omega} d\sigma + 0 + 3\pi - \alpha - \beta - \gamma = 2\pi$

$\Longrightarrow$ площадь треугольника в $\mathbb{H}^2$ равна $S = \pi - \alpha - \beta - \gamma$.



Из соотношений инверсии получаем, что $Q_1C \cdot Q_1A = r_1^2 = Q_1O \cdot Q_1O$ и $Q_2C \cdot Q_2B = r_2^2 = Q_2O \cdot Q_2O$,

$$\text{откуда} \qquad \frac{Q_1C}{Q_1O} = \frac{Q_1O}{Q_1A} \qquad \text{и} \qquad \frac{Q_2C}{Q_2O} = \frac{Q_2O}{Q_2B}.$$

Отсюда получаем, что $\triangle Q_1OC \sim \triangle Q_1AO$ и $\triangle Q_2OC \sim \triangle Q_2BO$. Наконец,

$$\angle Q_1CB = \angle Q_1CO - \angle Q_2CO = \angle Q_1OA - \angle Q_2OB = (180^\circ - \angle Q_1OB) - \angle Q_2OB = 180^\circ - \angle Q_1OQ_2 = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

Значит, угол ACB также прямой, поэтому точка C лежит на евклидовой окружности с диаметром AB.

Заметим, что точка O не является евклидовой серединой отрезка AB, а значит, и евклидовым центром окружности.