

Введение в гиперболическую геометрию

Лекция 1:

- 2-мерные геометрии постоянной кривизны
- Теорема о трех симметриях
- модели геометрии Лобачевского
- модель Пуанкаре в верхней полуплоскости
- кривизна \mathbb{H}^2
- вывод геодезических в \mathbb{H}^2
- формула для расстояния между точками в \mathbb{H}^2
- группа изометрий \mathbb{H}^2 и дробно линейные отображения
- площадь треугольника в \mathbb{H}^2

Введение в гиперболическую геометрию

Лекция 2 :

- теорема Пифагора в \mathbb{H}^2
- окружность в \mathbb{H}^2
- модели в \mathbb{H}^n на гиперболоиде, проективная в шаре, конформная в шаре
- геометрическая связь между 5 моделями гиперболической геометрии
- группа изометрий \mathbb{H}^3 и дробно линейные отображения
- многогранники в \mathbb{H}^3 , теорема Андреева
- идеальный тетраэдр и выведение формулы для его объема

Теорема Пифагора:

Пусть ABC — прямоугольный треугольник в \mathbb{H}^2 с углом $\angle C = \frac{\pi}{2}$. Обозначим через a, b, c длины сторон, противоположных вершинам A, B, C .

Тогда $\cosh c = \cosh a \cdot \cosh b$

Док-во: Без ограничения общности можем считать, что $C = i$, $B = ik$, $A = s + it$, где $k > 0$ и $s^2 + t^2 = 1$ (рис.)

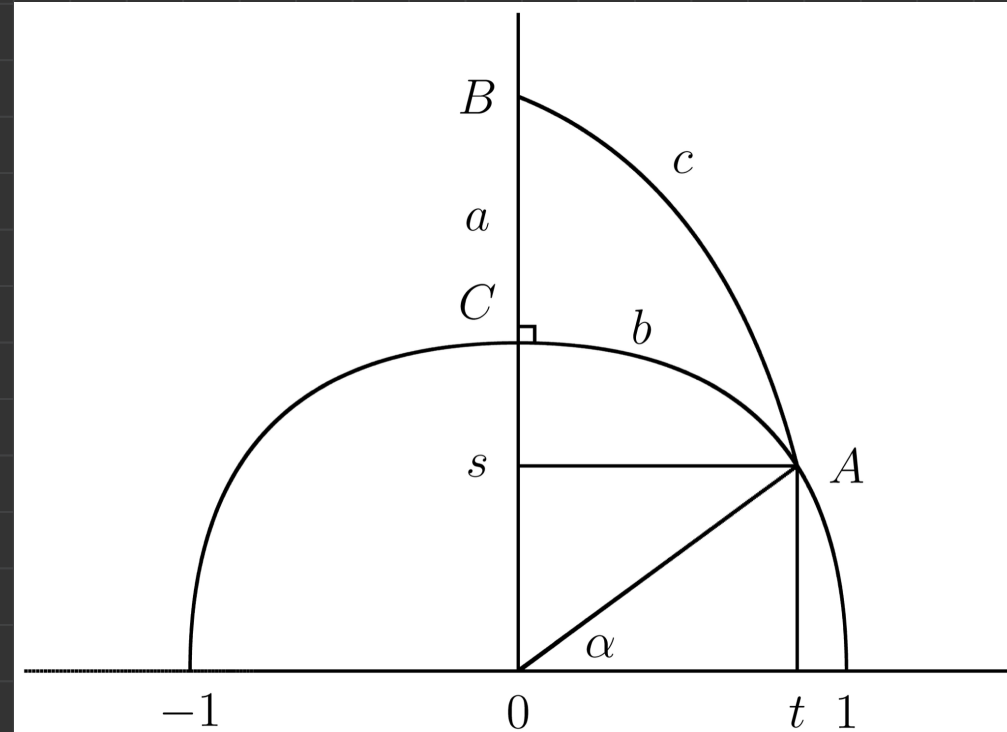
По формуле расстояния

$$(i) \quad \cosh \rho(z_1, z_2) = 1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{2 \operatorname{Im} z_1 \cdot \operatorname{Im} z_2} \Rightarrow$$

$$\cosh a = \cosh \rho(B, C) = 1 + \frac{|ik - i|^2}{2k} = \frac{k^2 + 1}{2k}$$

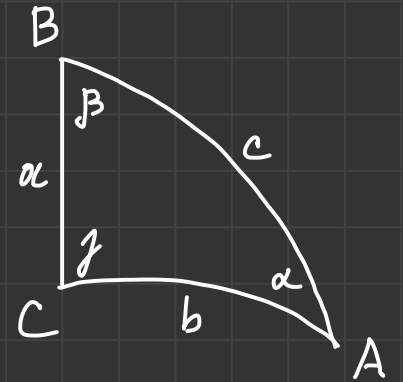
$$\cosh b = \cosh \rho(A, C) = 1 + \frac{|s + it - i|^2}{2t} = \frac{1}{t}$$

$$\cosh c = \cosh \rho(A, B) = 1 + \frac{|s + it - ik|^2}{2kt} = \frac{1 + k^2}{2kt} \Rightarrow \cosh c = \cosh a \cdot \cosh b \quad \square$$



Замечание: Если $a, b, c \rightarrow 0$, то $1 + \frac{c^2}{2} + \dots = \left(1 + \frac{a^2}{2} + \dots\right) \cdot \left(1 + \frac{b^2}{2} + \dots\right)$ приводит к $c^2 = a^2 + b^2$ евклидовой теореме Пифагора.

Теорема синусов: $\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$



I Теорема косинусов: $\cosh c = \cosh a \cdot \cosh b - \sinh a \cdot \sinh b \cdot \cos \gamma$

II Теорема косинусов: $\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cosh c$

Окружность $C_H(O, R)$ с центром O и радиусом R в \mathbb{H}^2 это множество точек $C_H(O, R) = \{M \in \mathbb{H}^2 : \rho(O, M) = R\}$

Теорема: Окружность на плоскости Лобачевского является евклидовой окружностью (при этом центры и радиусы гиперболической и евклидовой окружности, вообще говоря, не совпадают).

$$C_H(O, R) = C_E(Q, r)$$

Пусть O - центр окружности радиуса R в \mathbb{H}^2 .
 Проведем полупрямую через O и отметим A и B .
 C - произвольная точка окружности.

Т.к. $|OA| = |OB| = |OC| = R$, то
 \exists симметрии (инверсии):
 $OC \rightarrow OA$ и $OC \rightarrow OB$.
 Пусть $C_E(Q_1, r_1)$ и $C_E(Q_2, r_2)$ - окружности этих инверсий.

Окружность $C_E(Q_1, r_1)$
 это биссектриса угла $\angle AOC$
 окружность $C_E(Q_2, r_2)$
 это биссектриса угла $\angle BOC$

\Rightarrow эти окружности ортогональны.

Из соотношений инверсии получаем, что $Q_1C \cdot Q_1A = r_1^2 = Q_1O \cdot Q_1O$ и $Q_2C \cdot Q_2B = r_2^2 = Q_2O \cdot Q_2O$,

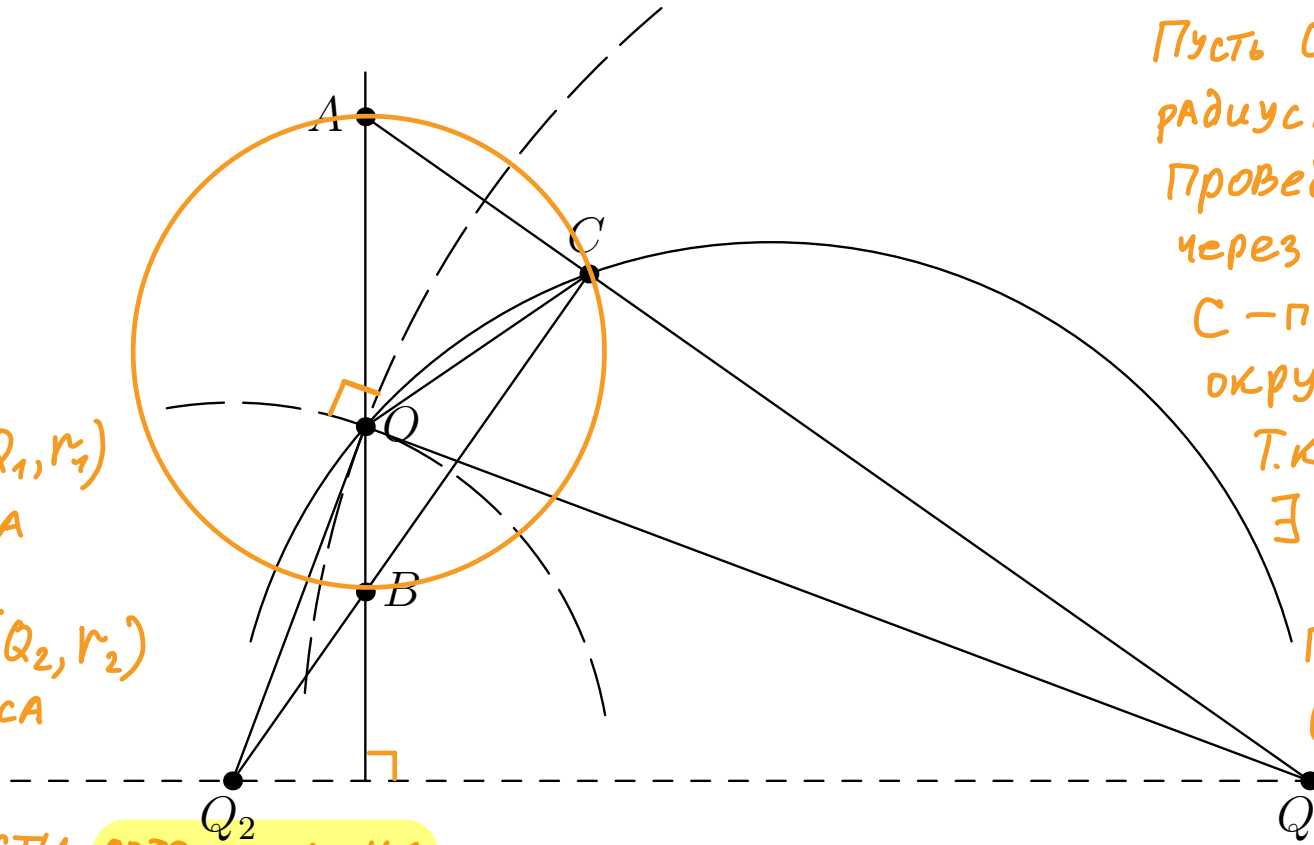
откуда $\frac{Q_1C}{Q_1O} = \frac{Q_1O}{Q_1A}$ и $\frac{Q_2C}{Q_2O} = \frac{Q_2O}{Q_2B}$.

Отсюда получаем, что $\triangle Q_1OC \sim \triangle Q_1AO$ и $\triangle Q_2OC \sim \triangle Q_2BO$. Наконец,

$$\angle Q_1CB = \angle Q_1CO - \angle Q_2CO = \angle Q_1OA - \angle Q_2OB = (180^\circ - \angle Q_1OB) - \angle Q_2OB = 180^\circ - \angle Q_1OQ_2 = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

Значит, угол ACB также прямой, поэтому точка C лежит на евклидовой окружности с диаметром AB .

Заметим, что точка O не является евклидовой серединой отрезка AB , а значит, и евклидовым центром окружности.



★ AI Overview

AI Google ошибается!

Нет, окружность на плоскости Лобачевского не является евклидовой окружностью; это принципиально другое понятие, поскольку геометрия Лобачевского отличается от евклидовой на уровне аксиом, включая аксиому о параллельных прямых, что приводит к иным свойствам фигур, в том числе и окружностей. В геометрии Лобачевского прямые и окружности имеют иные характеристики, что отличает их от привычных нам евклидовых фигур. [↗](#)

Почему это так:

Разные аксиомы: Геометрия Лобачевского основана на тех же аксиомах, что и евклидова, за исключением пятого постулата о параллельных прямых. Лобачевский заменил его утверждением, что через точку вне прямой можно провести бесконечно много прямых, не пересекающих данную. [↗](#)

Иная "плоскость": В геометрии Лобачевского используется понятие "гиперболической плоскости", которое является геометрической моделью неевклидовой геометрии, отличной от привычной нам евклидовой плоскости. [↗](#)

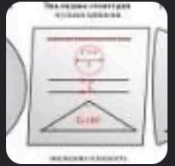
Отличия фигур: Изменение фундаментальных аксиом приводит к тому, что геометрические объекты, такие как прямые и окружности, на гиперболической плоскости ведут себя иначе. [↗](#)

В итоге: Когда мы говорим об окружности на плоскости Лобачевского, мы имеем в виду фигуру, определяемую по-другому и имеющую другие свойства по сравнению с окружностью на плоской евклидовой плоскости. [↗](#)

Геометрия Лобачевского - Википедия

Геометрия Лобачевского (или гиперболическая геометрия) — одна из...

📖 Википедия ⋮



Неевклидова геометрия - Википедия

Неевклидова геометрия — в буквальном понимании — любая геометрическая...

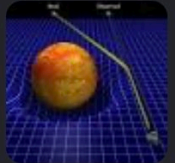
📖 Википедия ⋮



Геометрии Лобачевского и ее развитию была посвящена лекция ...

Dec 2, 2021 — Аксиома Лобачевского, которая является отрицанием аксиомы...

🌐 Казанский (Приволжский) федеральный ... ⋮



Show all

Модель \mathbb{H}^n на гиперboloиде

$$\mathbb{R}^{n+1} = \{ (x_0, x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \} \quad \text{пространство Минковского}$$

$$Q(X) = x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2 \quad \text{квадратичная форма Минковского}$$

$$Q(X) = 1 \quad \text{гиперboloид } S^+$$

$$B(X, Y) = \frac{Q(X+Y) - Q(X) - Q(Y)}{2} = x_0 y_0 - x_1 y_1 - \dots - x_n y_n$$

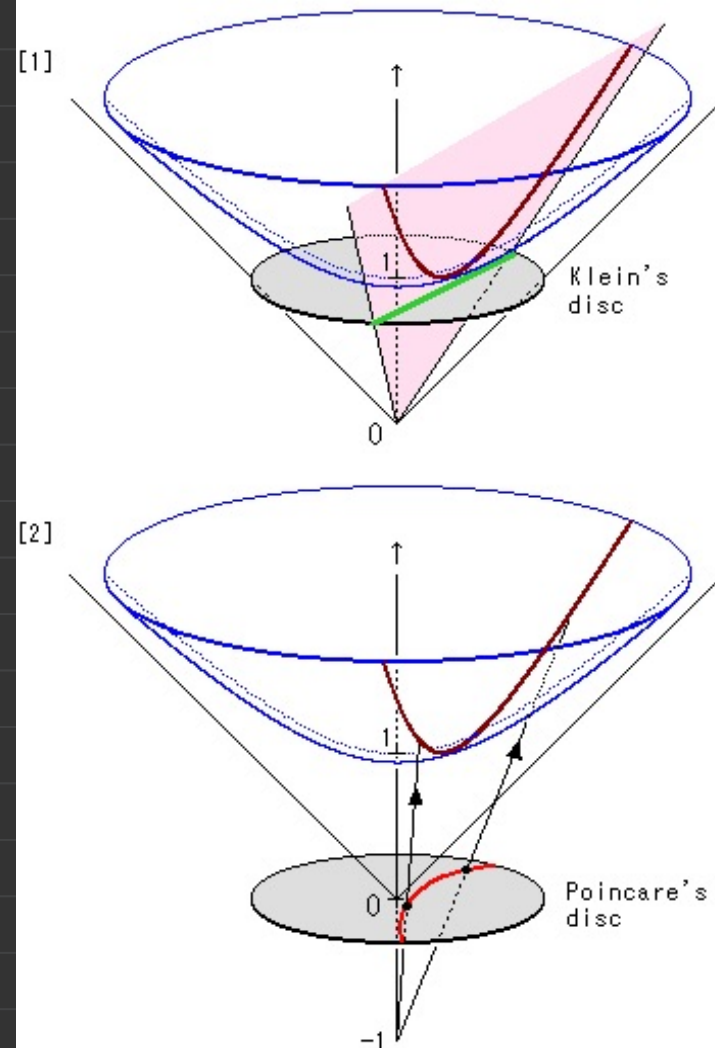
билинейная форма Минковского

(B является поляризацией Q)

$$\cosh \int(X, Y) = B(X, Y) \quad \text{расстояние в } \mathbb{H}^n$$

Прямые это сечение S^+ n -мерным линейным подпространством в \mathbb{R}^{n+1} , проходящим через O ,

Fig. 5 hyperboloid model



Проективная модель Кэли-Клейна \mathbb{H}^n

Рассмотрим пространство Минковского \mathbb{R}_1^{n+1} с билинейной формой

$$B(x, y) = x_0 y_0 - x_1 y_1 - \dots - x_n y_n$$

Модель Кэли-Клейна это единичный шар $K = \{ (1, x_1, \dots, x_n) : x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1 \}$, лежащий в гиперплоскости $x_0 = 1$.

Пусть $V, W \in K$ - два вектора. Положим $V = (1, v)$, $W = (1, w)$, где $v, w \in \mathbb{R}^n$. Тогда билинейная форма Минковского выражается через евклидово скалярное произведение $B(V, W) = 1 - \langle v, w \rangle_E$

$$\cosh \rho(V, W) = \frac{B(V, W)}{\sqrt{B(V, V) \cdot B(W, W)}} \quad \text{расстояние в } K$$

Плоскость в K это г. м. т. $\mathcal{P} = \{ V \in K : B(V, N) = 0 \}$, где $N = (1, n)$, $\langle n, n \rangle_E > 0$, N - вектор нормали к плоскости \mathcal{P} .

Точка $(1, n)$ def **полюсом** \mathcal{P} и лежит вне K .

В размерности $n = 3$: $H^3 = \{ (x, y, t) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + t^2 < 1 \}$
 с метрикой $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dt^2 - (ydx + xdy)^2 - (tdx + xdt)^2 - (tdy + ydt)^2}{(1 - (x^2 + y^2 + t^2))^2}$

Угол между плоскостями \mathcal{P} и \mathcal{Q} с нормальными векторами N и M определяется

$$\cos(\widehat{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}) = \frac{-B(N, M)}{\sqrt{B(N, N) \cdot B(M, M)}}$$

Пусть $V_1 = (1, v_1)$, $V_2 = (1, v_2)$, $V_3 = (1, v_3)$ — три некопланарных вектора в K

Тогда через них проходит единственная плоскость $\mathcal{P} = \{ V \in K : B(V, N) = 0 \}$

с вектором нормали $N = (1, n)$, где координаты вектора $n \in \mathbb{R}^n$ опре-

деляются из системы линеарных уравнений

$$\begin{cases} \langle v_1, n \rangle_E - 1 = 0 \\ \langle v_2, n \rangle_E - 1 = 0 \\ \langle v_3, n \rangle_E - 1 = 0 \end{cases}$$

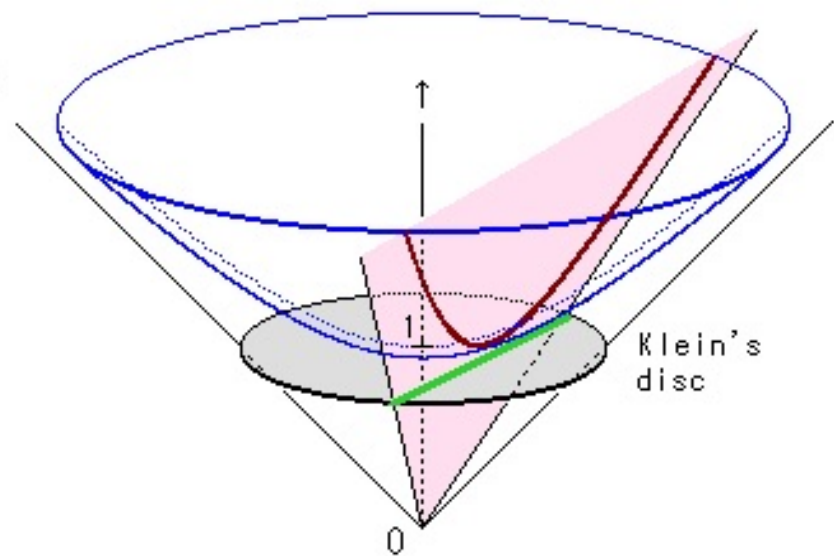
Модель Пуанкаре в единичном шаре

$\mathbb{H}^3 = \{ (x, y, t) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + t^2 < 1 \}$ с метрикой $ds^2 = 4 \frac{dx^2 + dy^2 + dt^2}{(1 - (x^2 + y^2 + t^2))^2}$

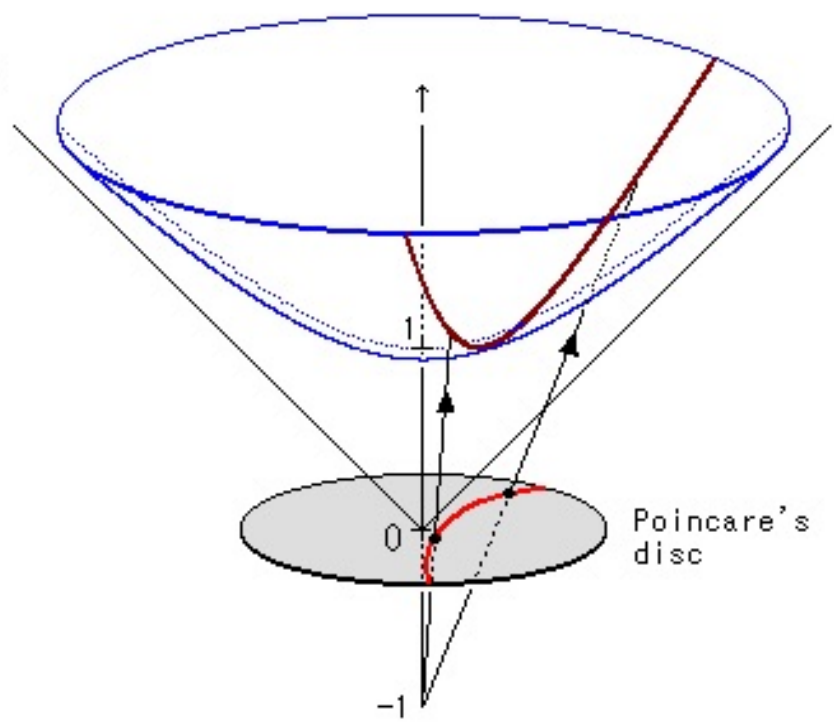
Плоскости это пересечения с единичным шаром евклидовых сфер, ортогональных абсолюту.

Fig. 5 hyperboloid model

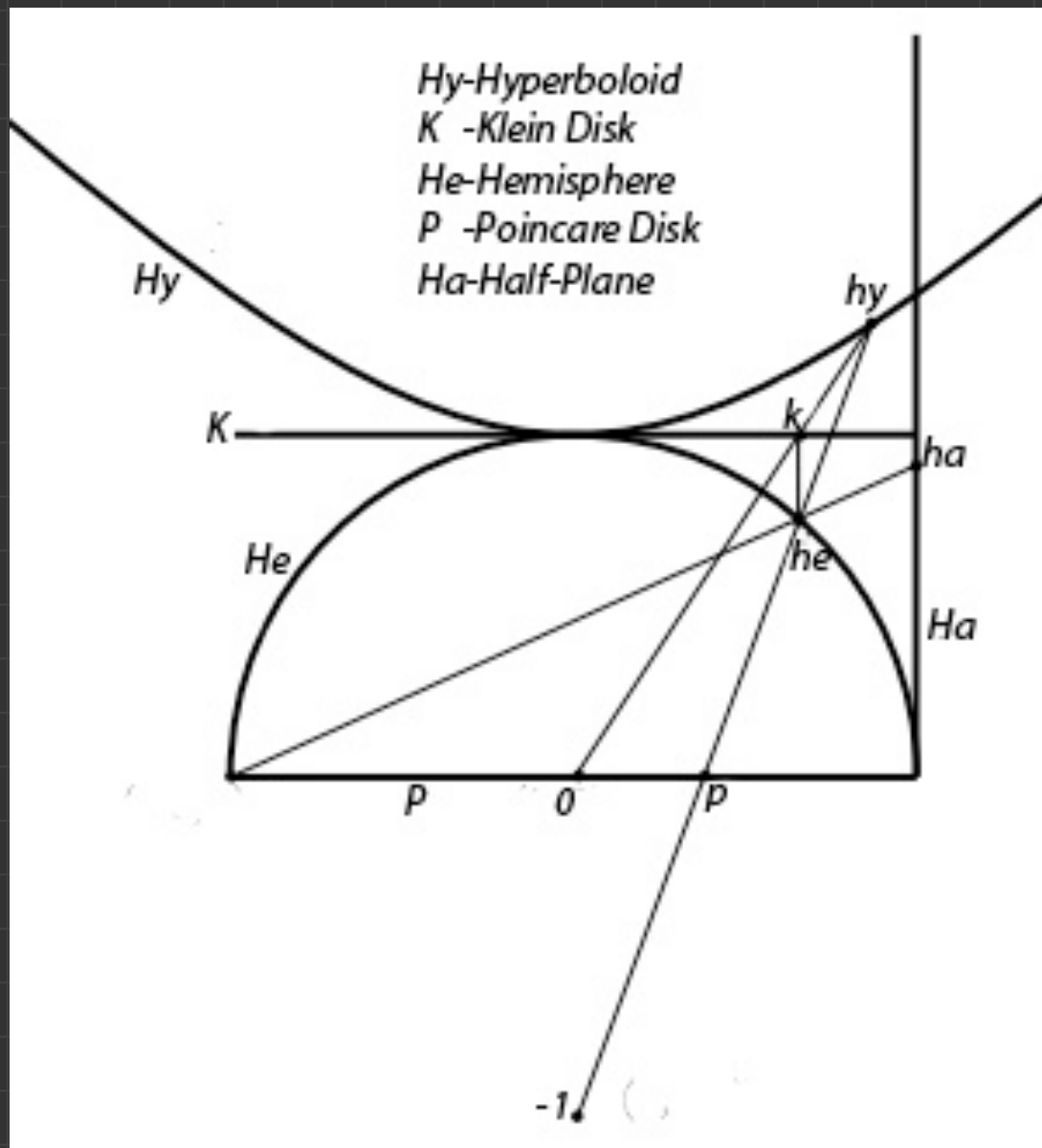
[1]



[2]



Геометрическая связь между моделями гиперболической геометрии



Upper half-space model of hyperbolic 3-space

Denote by \mathbb{H}^3 a 3-dimensional *hyperbolic space* (*Lobachevsky–Boljai–Gauss space*).

\mathbb{H}^3 can be modelled in $\mathbb{R}_+^3 = \{(x, y, t) : x, y, t \in \mathbb{R}, t > 0\}$ with metric s given by expression $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dt^2}{t^2}$.

The volume element is $dV = \frac{dx dy dt}{t^3}$.

The boundary $\partial\mathbb{H}^3 = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ called *absolute* and consist of points at infinity.

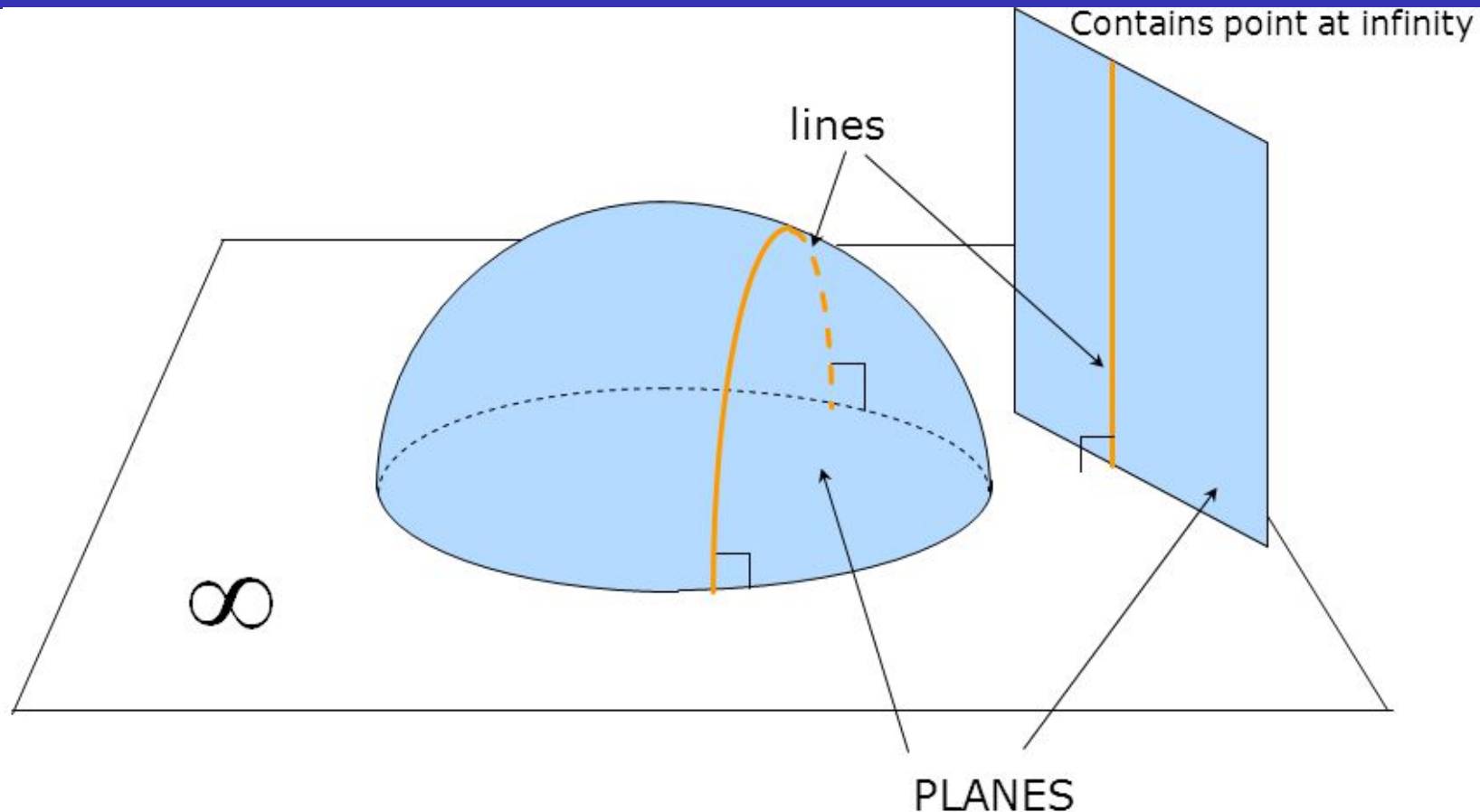
Denote by $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ the group of orientation preserving isometries.

$\text{Isom}^+(\mathbb{H}^3) \cong \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ (Positive Special Lorentz group). An element

$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ acts on \mathbb{H}^3 by the rule

$$g : (z, t) \mapsto \left(\frac{(az + b)\overline{(cz + d)} + a\bar{c}t^2}{|cz + d|^2 + |c|^2 t^2}, \frac{t}{|cz + d|^2 + |c|^2 t^2} \right), \quad z = x + iy.$$

Upper half-space model of hyperbolic 3-space



$\text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ is generated by compositions of even number of reflections with respect to geodesic planes.

$\text{Isom}^+(\mathbb{H}^3) \cong \left\{ \frac{az + b}{cz + d} : ad - bc = 1 \right\}$ a group of fractional linear mappings in the complex plane $\partial\mathbb{H}^3 = \{(x, y, 0) : z = x + iy \in \mathbb{C}\}$.

Теорема: Гиперболические расстояния в модели \mathbb{H}^3 в верхнем полу-пространстве находятся по ф-ле

$$\cosh \rho(z_1 + t_1 j, z_2 + t_2 j) = 1 + \frac{|z_1 - z_2|^2 + (t_1 - t_2)^2}{2t_1 t_2}$$

Док-во: Аналогично 2-мерному случаю, сводя к ситуации, когда обе точки лежат на вертикальной прямой.

Многогранники в \mathbb{H}^3

Выпуклый многогранник в \mathbb{H}^3 это $P = \bigcap_{i=1}^k \alpha_i^-$, где α_i^- - замкнутое

полупространство, граница которого гиперплоскость α_i .

Всегда можно считать, что ни одно из полупространств α_i^- не содержит пересечения остальных.

Выпуклый многогранник **ограничен**, если он является выпуклой оболочкой конечного числа точек (своих вершин).

В \mathbb{H}^3 \exists неограниченные многогранники **конечного объема**.

Выпуклый многогранник в \mathbb{H}^3 имеет конечный объем \iff он является выпуклой оболочкой конечного числа обычных или бесконечно удаленных (идеальных) точек (вершин).

Комбинаторный тип многогранника **прост**, если все его вершины 3-валентные (инцидентны 3 граням).

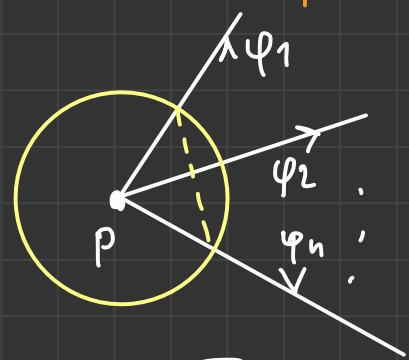
Теорема (Андреев, 1970): Ограниченный остроугольный многогранник в \mathbb{H}^3 однозначно, с точностью до изометрии, определяется своим комбинаторным типом и двугранными углами.

Док-во: Аналогично док-ву теоремы Коши о единственности ограниченного евклидова многогранника с заданной разверткой.

Теорема (Андреев, 1970): Если ограниченный многогранник $P \subset \mathbb{H}^3$ остроугольный, то все вершины P 3-валентные.

Док-во: Рассмотрим сечение многогранника P сферой с центром в его вершине p . Получим остроугольный сферический многоугольник с углами $\varphi_1, \dots, \varphi_m$, равными двугранным углам $P \Rightarrow \varphi_1 + \dots + \varphi_m > (m-2)\pi$, но

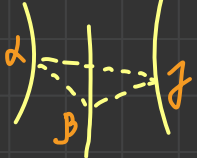
$$\varphi_i \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sum_{i=1}^m \varphi_i \leq \frac{m}{2} \pi \Rightarrow (m-2)\pi < \frac{m}{2} \pi \Rightarrow m < 4 \Rightarrow m = 3 \quad \square$$



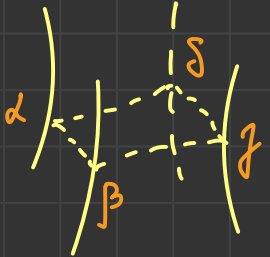
Теорема (Андреев, 1970): Для существования в \mathbb{R}^3 ограниченного остроугольного многогранника заданного простого комбинаторного типа, отличного от тетраэдра и треугольной призмы, с заданными двугранными углами необходимо и достаточно

(1) если  , то $\alpha + \beta + \gamma > \pi$

← сферический треугольник

(2) если  , то $\alpha + \beta + \gamma < \pi$

↗ гиперболические треугольник и четырехугольник

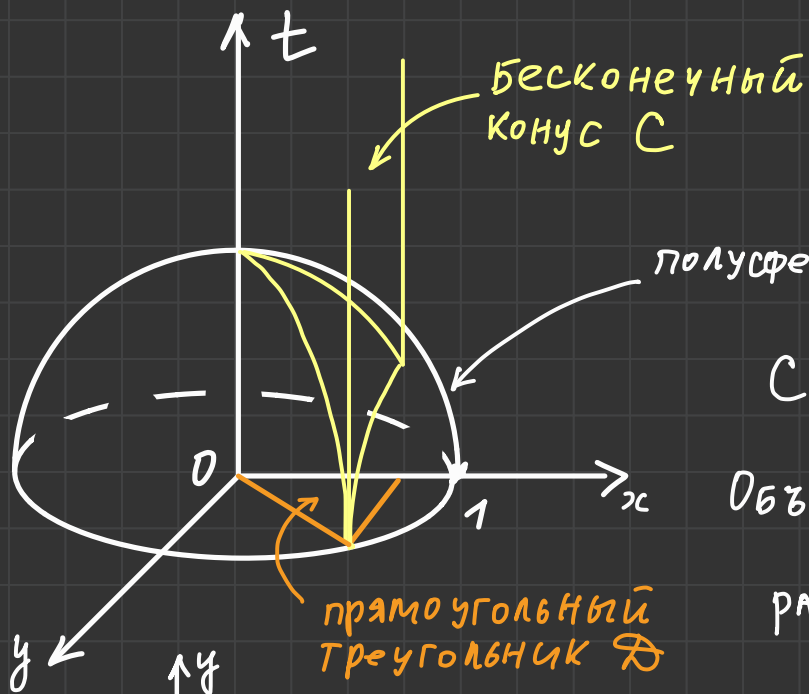
(3) если  , то $\alpha + \beta + \gamma + \delta < 2\pi$

Для тетраэдра и треугольной призмы нужны дополнительные условия.

Идеальный тетраэдр это тетраэдр в \mathbb{H}^3 , у которого все вершины лежат на абсолюте.

Рассмотрим модель \mathbb{H}^3 в верхнем полупространстве

$$\mathbb{H}^3 = \{ (x, y, t) \in \mathbb{R}^3 : t > 0 \}, \quad ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dt^2}{t^2}, \quad dV = \frac{dx \cdot dy \cdot dt}{t^3} \quad \text{ЭЛЕМЕНТ ОБЪЕМА}$$



полусфера $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, пусть $(x, y) \in \mathcal{D}$

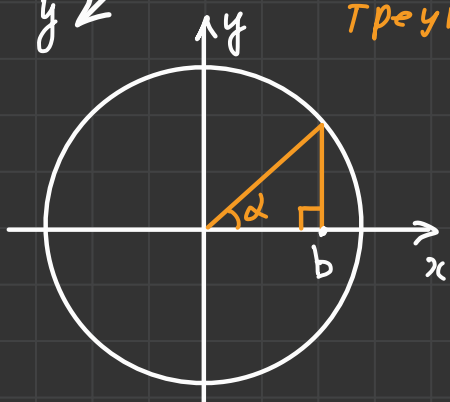
$$C = \{ (x, y, t) : t \geq f(x, y), \text{ где } (x, y) \in \mathcal{D} \}$$

Объем бесконечного конуса над графиком функции $f(x, y) = t$

равен $V(C) = \int_C dV = \int_C \frac{dx dy dt}{t^3} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \frac{dx dy}{1 - x^2 - y^2} \quad \textcircled{=}$

$$\mathcal{D} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq b, 0 \leq y \leq b \cdot \operatorname{tg} \alpha \}$$

$$\textcircled{=} \frac{1}{2} \int_0^b dx \int_0^{x \operatorname{tg} \alpha} \frac{dy}{1 - x^2 - y^2}$$



$$\int_0^c \frac{dy}{a^2 - y^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+c}{a-c} \Rightarrow \int_0^{x \operatorname{tg} \alpha} \frac{dy}{1-x^2-y^2} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{\sqrt{1-x^2} + x \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1-x^2} - x \operatorname{tg} \alpha} \Rightarrow$$

$$V(C) = \frac{1}{4} \int_0^b \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{\sqrt{1-x^2} + x \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1-x^2} - x \operatorname{tg} \alpha} dx$$

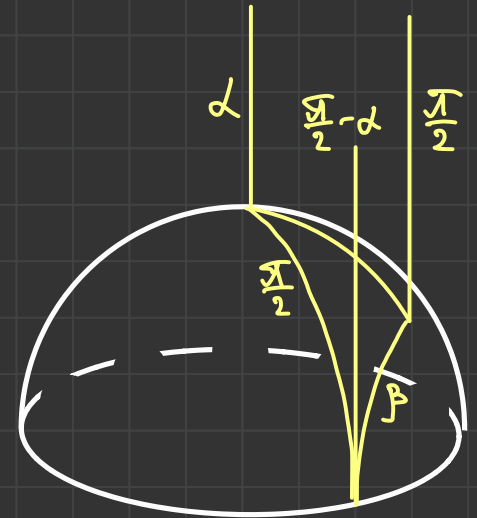
замена переменной $x = \cos \theta$ при $\beta \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, где $\cos \beta = b \Rightarrow \sin \theta = \sqrt{1-x^2}$
и $d\theta = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow V(C) = \frac{1}{4} \int_{\beta}^{\pi/2} \ln \frac{\sin(\theta+\alpha)}{\sin(\theta-\alpha)} d\theta$

Введем функцию $\Lambda(\theta) = -\int_0^{\theta} \ln |2 \sin x| dx$, определенную для $\theta \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\int \ln \frac{\sin(\theta+\alpha)}{\sin(\theta-\alpha)} d\theta = \Lambda(\theta-\alpha) - \Lambda(\theta+\alpha)$$

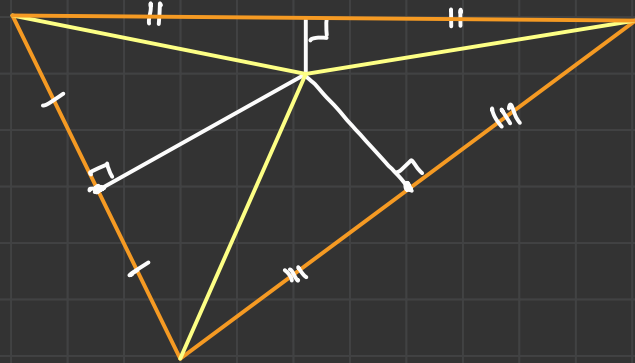
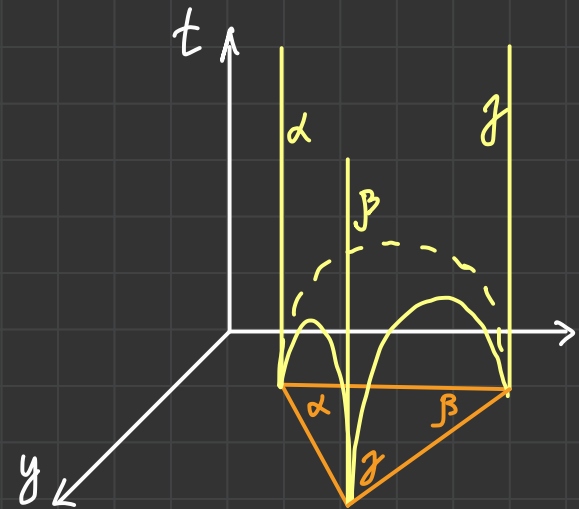
$$\Rightarrow V(C) = \frac{1}{4} [\Lambda(\frac{\pi}{2}-\alpha) - \Lambda(\frac{\pi}{2}+\alpha) - \Lambda(\beta-\alpha) + \Lambda(\beta+\alpha)]$$

\square - это тетраэдр в \mathbb{H}^3



Теорема: Пусть $T(\alpha, \beta, \gamma)$ - идеальный тетраэдр в \mathbb{H}^3 . Его объем равен $V(T(\alpha, \beta, \gamma)) = \underline{\Lambda}(\alpha) + \underline{\Lambda}(\beta) + \underline{\Lambda}(\gamma)$.

Док-во: Предположим, что углы $\alpha, \beta, \gamma \leq \frac{\pi}{2}$ (острые). Т.к. $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то треугольник с такими углами \exists на $E^2 = \{(x, y, t) : t = 0\}$.



Его можно разбить на 6 прямоугольных треугольников:

$$\text{два } \left\{ \alpha, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - \alpha \right\},$$

$$\text{два } \left\{ \beta, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - \beta \right\},$$

$$\text{два } \left\{ \gamma, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - \gamma \right\}.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow V(T(\alpha, \beta, \gamma)) &= 2V(T(\alpha, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - \alpha, \alpha, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) + \\ &+ 2V(T(\beta, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - \beta, \beta, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) + \\ &+ 2V(T(\gamma, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - \gamma, \gamma, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) = \underline{\Lambda}(\alpha) + \underline{\Lambda}(\beta) + \underline{\Lambda}(\gamma) \quad \square \end{aligned}$$

Вопрос: Гиперболическая окружность в проективной модели является ли евклидовой окружностью?

1) Рассмотрим гиперболическую окружность в модели H_0 (это евклидова окружность)

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \quad (A \neq 0)$$

2) Берем ее образ при стереографической проекции на H_e — это снова евклидова окружность, т.к. лежит в сечении сферы Римана

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \zeta = 0$$

$$\xi = \frac{x}{1+|z|^2}, \quad \eta = \frac{y}{1+|z|^2}, \quad \zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}$$

плоскостью $B\xi + C\eta + (A-D)\zeta + D = 0$, (*)

т.е. \forall гиперболическая окружность в модели H_e — это евклидова окружность

на плоскости (*) \Rightarrow эта гиперболическая окружность в модели K = евклидов эллипс.

