Дифференциальные уравнения эллиптического рода многообразий Калаби-Яу

Валерий ГРИЦЕНКО

факультет математики и МЛЗС, НИУ ВШЭ//Лаборатория Пенлеве, Университет Лилля, Франция

Научная школа “Текущие достижения в геометрии”
Три лекции, Новосибирск, 26–28 августа 2025

А-1. Топология и автоморфные формы

Пусть M_d – компактное **комплексное** многообразие комплексной размерности d, с нулевым первым классом Черна (например, многообразие Калаби–Яу). Мы сопоставим M_d голоморфную модулярную форму от двух переменных, **слабую форму Якоби** веса 0 и индекса $\frac{d}{2}$ с целыми коэффициентами Фурье. Эта модулярная форма Якоби – **эллиптический род** многообразия M_d от двух переменных

$$EG(M_d) = \chi(M_d; \tau, z) \in J^{w,\mathbb{Z}}_{0,d/2}, \quad \tau = x + iy \in \mathbb{H},\ y > 0,\ z \in \mathbb{C}.$$

Значения этой функции и все её коэффициенты Фурье имеют геометрический (и струнный) смысл. Например,

$$\chi(M_d; \tau, 0) = e(M), \quad \chi(M_d; \tau, \frac{1}{2}) = sign(M, \tau).$$

А. Обзор теории модулярных форм Якоби.

V. Gritsenko. *Jacobi modular forms: 30 ans après.* 12 лекций и 10 семинаров, COURSERA и онлайн курсы НИУ ВШЭ.

M. Eichler, D. Zagier. *Jacobi modular forms.* 1985.

A-2. Тройное произведение тета-функции Якоби $\vartheta(\tau, z)$

Нечетная тета-функция Якоби $\vartheta(\tau, z)$ определена рядом

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{-4}{n}\right) q^{n^2/8}\zeta^{n/2} = -q^{1/8}\zeta^{-1/2}\prod_{n\geqslant 1}(1-q^{n-1}\zeta)(1-q^n\zeta^{-1})(1-q^n),$$

где $q = e^{2\pi i\tau}$, $\zeta = e^{2\pi iz}$, $\vartheta(\tau, -z) = -\vartheta(\tau, z)$ и

$$\frac{\partial\,\vartheta(\tau, z)}{\partial\, z}\Big|_{z=0} = 2\pi i\,\eta^3(\tau),$$

где

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}}\prod_{n\in\mathbb{N}}(1-q^n) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{12}{n}\right) q^{n^2/24}.$$

Важно: $z = 0$ – ноль первого порядка формы $\vartheta(\tau, z)$.

Модулярная форма Рамануджана

$$\Delta(\tau) = \eta(\tau)^{24} = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24} = \sum_{m\geq 1}\tau(m)q^m,$$

1) $\tau(nm) = \tau(n)\tau(m)$, если $(n, m) = 1$;   2) $|\tau(p)| < 2p^{11/2}$;

3) **Гипотеза Лемера** $\tau(n) \neq 0$ для любого натурального n.

А-3. Функциональные уравнения $\vartheta(\tau, z)$

Тета-функция Якоби $\vartheta(\tau, z)$ – важнейшая специальная функция в математической физике, алгебраической геометрии, в теории аффинных и лоренцевых алгебр Каца–Муди, в теории чисел.

1. *Дважды периодическая (абелева) функция по z*: $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{Z}$

$$\vartheta(\tau, z + \lambda\tau + \mu) = (-1)^{\lambda+\mu} \exp\left(-\pi i\left(\lambda^2\tau + 2\lambda z\right)\right)\vartheta(\tau, z)$$

2. *Периодическая по τ и "симметричная" при* $\tau \to -\frac{1}{\tau}$:

$$\vartheta(\tau + 1,\, z) = \exp\left(\frac{\pi i}{4}\right)\vartheta(\tau,\, z), \qquad \text{(ясно)}$$

$$\vartheta\left(-\frac{1}{\tau},\, \frac{z}{\tau}\right) = \exp\left(-\frac{3\pi i}{4}\right)\sqrt{\tau}\, \exp\left(\pi i\, \frac{z^2}{\tau}\right)\vartheta(\tau, z).$$

Последнее можно вывести из уравнения теплопроводности! Два последних уравнения показывают, что $\vartheta(\tau, z)$ хорошо ведет себя при действии $\tau \to \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$, где $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})$ на полуплоскости $\mathbb{H}$.

A-4. Определение модулярных форм

Пусть k – целое число. Функция $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ голоморфная на $\mathbb{H}$ и в ∞ называется *модулярной формой веса* k, если

$$f(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}) = (c\tau + d)^k f(\tau), \text{ где } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \text{ и } \tau \in \mathbb{H}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \langle\tau\rangle = \tau + 1, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \langle\tau\rangle = -\frac{1}{\tau}, \quad -\frac{1}{i\infty} = 0.$$

Голоморфность в бесконечности означает, что

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n, \quad q = e^{2\pi i\tau}.$$

Конечномерное линейное пространство модулярных форм веса k обозначается $M_k(SL_2(\mathbb{Z}))$. Форма $f(\tau) = \sum_{n\geq 0} a(n)q^n \in M_k$ называется параболической, если $f(i\infty) = a(0) = 0$. Например, $\Delta(\tau) = \eta(\tau)^{24}$ – первая параболическая форма веса 12.

1. Пусть $f_2(\tau) \in M_2(SL_2(\mathbb{Z}))$. Тогда $f(\tau)d\tau$ инвариантная дифференциальная форма на модулярной кривой $SL_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathbb{H}$. Имеем $d\tau = \frac{dq}{q}$. Следовательно, $f(\tau)d\tau$ продолжается в бесконечную точку $i\infty$ кривой $SL_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathbb{H}$ только при $a(0){=}0$. Но кривая $SL_2(\mathbb{Z}) \setminus (\mathbb{H} \cup i\infty)$ рациональная. Следовательно, на ней нет нетривиальных дифференциальных форм и параболических форм веса 2. (Легко доказать, что $M_2(SL_2(\mathbb{Z})) = \{0\}$. *Гипотеза Shimura–Taniyama* и $S_2(\Gamma_0(N))$.)

2. Пусть $\Gamma_\infty = \pm\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – (параболическая) подгруппа $SL_2(\mathbb{Z})$. При $2k \geq 4$ определен ряд Эйзенштейна веса $2k$

$$E_{2k}(\tau) = \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\setminus SL_2(\mathbb{Z})} \frac{1}{(c\tau+d)^{2k}} = \frac{1}{2}\sum_{(c,d)=1} \frac{1}{(c\tau+d)^{2k}} \in M_{2k}.$$

Имеем

$$E_4(\tau) = 1 + 240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^n, \qquad E_6(\tau) = 1 - 504\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_5(n)q^n,$$

где $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$.

Теорема. *Градуированная алгебра модулярных форм* $M_*(SL_2(\mathbb{Z})) = \bigoplus_k M_k(SL_2(\mathbb{Z}))$ *является свободной алгеброй над* $\mathbb{C}$ *с двумя образующими:* $M_*(SL_2(\mathbb{Z})) = \mathbb{C}[E_4, E_6]$, *где* $E_4(\tau)$ *и* $E_6(\tau)$ *ряды Эйзенштейна веса 4 и 6.*

Пример. $\Delta(\tau) = \eta(\tau)^{24} = \frac{1}{1728}(E_4^3 - E_6^2)$.

Эта-функция Дедекинда $\eta(\tau)$ (бесконечномерный определитель!) является модулярной формой веса $\frac{1}{2}$. Для любой $M \in SL_2(\mathbb{Z})$

$$\eta\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = v_{24}(M)(c\tau + d)^{\frac{1}{2}}\eta(\tau), \quad v_{24}(M)^{24} = 1.$$

3. Приложение к арифметике. Пусть E_8 – четная унимодулярная квадратичная решетка ранга 8. Тогда

$$\Theta_{E_8}(\tau) = \sum_{\ell \in E_8} e^{\pi i(\ell,\ell)\tau} = \sum_{n \geq 0} R_{E_8}(2n)q^n = E_4(\tau),$$

где $R_{E_8}(2n)$ число представлений решеткой.

Пусть $\tau \in \mathbb{H}$ и $z \in \mathbb{C}$. Тогда голоморфная функция $\varphi(\tau, z)$ есть **слабая форма Якоби веса** $k \in \mathbb{Z}$ и **индекса** $m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}$, если

- $$\varphi\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^k \exp(2\pi i\, m \frac{cz^2}{c\tau+d})\varphi(\tau, z)$$
- $\varphi(\tau, z+\lambda\tau+\mu) = (-1)^{2m(\lambda+\mu)} e^{-2\pi i\, m\,(\lambda^2\tau+2\lambda z)}\varphi(\tau, z), \ \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{Z}$
- $$\varphi(\tau, z) = \sum_{n \geqslant 0} \sum_{l \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}} a(n, l) q^n \zeta^l.$$

Замечание. Если $\varphi_{k,m} \in J^w_{k,m}$, то $\varphi_{k,m}(\tau, 0) = \varphi_k(\tau) \in M_k$.

Форма Якоби называется *голоморфной (параболической)* в бесконечности, если $a(n, l) \neq 0$ только, если $4nm - l^2 \geq 0$ $(4nm - l^2 > 0)$. Тета-функция Якоби – голоморфная форма Якоби, имеющая более сложный тип. Ее вес полуцелый $= \frac{1}{2}$:

$$\vartheta(\tau, z) \in J_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(v_\eta^3), \quad \text{и} \quad a(n, l) \neq 0 \Rightarrow 2n - l^2 = 0.$$

A-8. Первые слабые формы Якоби: дискриминанты

$$\varphi_{-2,1}(\tau, z) = \frac{\vartheta(\tau, z)^2}{\eta(\tau)^6} = \zeta - 2 + \zeta^{-1} + q(\dots)$$

$$\varphi_{-1,\frac{1}{2}}(\tau, z) = \frac{\vartheta(\tau, z)}{\eta^3(\tau)}, \ \varphi_{-1,2}(\tau, z) = \frac{\vartheta(\tau, 2z)}{\eta^3(\tau)}, \ \varphi_{0,\frac{3}{2}}(\tau, z) = \frac{\vartheta(\tau, 2z)}{\vartheta(\tau, z)}.$$

Ещё две важнейшие спецфункции, получаемые из ϑ,

$$\frac{\partial^2 \log \vartheta(\tau, z)}{\partial z^2} = -\wp(\tau, z) - \frac{8}{24}\pi^2 E_2(\tau),$$

где $\wp(\tau, z) \in J_{2,0}^{(mer)}$ – функция Вейерштрасса с полюсом второго порядка в $z = 0$

$$\wp\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{z}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^2 \wp(\tau, z)$$

и $E_2(\tau) = 1 - 24\sum_{n\geq 1} \sigma_1(n) q^n$ *квазимодулярный ряд Эйзенштейна веса* 2. Это дает еще один важнейший пример без нуля в $z = 0$

$$\varphi_{0,1}(\tau, z) = -\frac{3}{\pi^2}\wp(\tau, z)\varphi_{-2,1}(\tau, z) = \zeta + 10 + \zeta^{-1} + q(\dots).$$

A-9. Нули форм Якоби индекса m

Пусть $\varphi_{k,m} \in J^w_{k,m}$. Тогда $\varphi_{k,m}(\tau, 0) = \varphi_k(\tau) \in M_k(SL_2(\mathbb{Z}))$.

Теорема. *Для фиксированного $\tau \in \mathbb{H}$, функция $z \to \varphi(\tau, z)$, если она не постоянная, имеет ровно $2m$ нулей, подсчитанных с их кратностью, в любой фундаментальной области $\mathcal{F}$ действия решетки $\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$ на $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Факт сразу следует из вычисления контурного интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\mathcal{F}} \frac{\varphi_z(\tau, z)}{\varphi(\tau, z)} dz = 2m$$

Выражение под интегралом инвариантно при замене $z \to z + 1$ и изменяется на $2m$ при замене $z \to z + \tau$.

Следствие. 1) $J^w_{k,m} = \{0\}$, если $m < 0$, т.е. нет слабых форм Якоби отрицательного индекса.
2) Слабая форма Якоби индекса 0 есть обычная модулярная форма, не зависящая от z, т.е. $J^w_{k,0} = M_k(SL_2(\mathbb{Z}))$.

A-10. Биградуированная алгебра слабых форм Якоби

Пространство $J^w_{*,*/2}$ является биградуированным кольцом

$$\varphi_{k_1,m_1}\cdot\varphi_{k_2,m_2}\in J^w_{k_1+k_2,m_1+m_2}.$$

Теорема. *Биградуированное кольцо $J^w_{2*,*}$ слабых форм Якоби чётного веса и целого индекса является чисто полиномиальным, а именно, это свободная алгебра над $\mathbb{C}$ с четырьмя образующими*

$$J^w_{2*,*}=\bigoplus_{k\in\mathbb{Z},\ m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} J^w_{2k,m}=\mathbb{C}[E_4(\tau),E_6(\tau),\varphi_{-2,1},\varphi_{0,1}].$$

или $J^w_{2*,*}=M_*[\varphi_{-2,1},\varphi_{0,1}]$.

Замечание. $\varphi_{k,m}(\tau,-z)=(-1)^k\varphi_{k,m}(\tau,z)$. Формы Якоби из $J^w_{2*,*}$ являются $W(A_1)$-инвариантными формами!

Вся алгебра получается добавлением ещё трех форм:

$$J^w_{*,*}=J^w_{2*,*}[\varphi_{-1,2}],\qquad J^w_{*,*/2}=J^w_{*,*}[\varphi_{-1,\frac{1}{2}},\varphi_{0,\frac{3}{2}}].$$

А-11. Доказательство теоремы.

Доказательство проведем индукцией по индексу.

1. База: $m = 0$, k любое.
$J^w_{2*,0} = \sum_{k\geq 0} J^w_{2k,0} = \sum_{k\geq 0} M_{2k}(SL_2(\mathbb{Z})) = \mathbb{C}[E_4(\tau), E_6(\tau)]$.

2. $\varphi_{0,1}(\tau, 0) = 12$. Если $\varphi_{2k,m}(\tau, 0) = f_{2k}(\tau) \in M_{2k}$, то положим

$$\psi_{2k,m}(\tau, z) = \varphi_{2k,m}(\tau, z) - \frac{1}{(12)^m} f_{2k}(\tau)\varphi^m_{0,1}(\tau, z).$$

Тогда $\psi_{2k,m}(\tau, 0) = 0$ и порядок нуля не меньше двух. Следовательно,

$$\frac{\psi_{2k,m}(\tau, z)}{\varphi_{-2,1}(\tau, z)} \in J^w_{2k+2,m-1}.$$

Например,

$$\varphi_{2k,1}(\tau, z) = f_{2k+2}(\tau)\varphi_{-2,1} + \frac{1}{12}\varphi_{2k,1}(\tau, 0)\varphi_{0,1},$$

где $f_{2k+2}(\tau)$ – $SL_2(\mathbb{Z})$-модулярная формы веса $2k + 2$.

А-12. SL_2-модулярный дифференциальный оператор D_k

Положим $D = q\dfrac{d}{dq} = \dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{d}{d\tau}$, где $q = e^{2\pi i\tau}$. Тогда

$$D : \sum a(n)q^n \to \sum na(n)q^n, \quad D(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{(c\tau+d)^2}.$$

Следовательно, из любой мероморфной модулярной формы $f(\tau)$ веса 0 получаем форму веса 2: $D(f) \in M_2^{(mer)}(SL_2(\mathbb{Z}))$. Для любого веса k получаем оператор

$$D_k : M_k(SL_2(\mathbb{Z})) \to M_{k+2}(SL_2(\mathbb{Z})),$$

$$D_k(f) = \eta^{2k}D(\frac{f}{\eta^{2k}}) = D(f) - 2k\frac{D(\eta)}{\eta}f = D(f) - \frac{k}{12}E_2 \cdot f,$$

где

$$24\frac{D(\eta)}{\eta} = 1 - 24\sum_{n\geq 1}\sigma_1(n)q^n = E_2(\tau) = \frac{\Delta'(\tau)}{\Delta(\tau)}$$

квазимодулярный рад Эйзештейна веса 2.

А-13. Квазимодулярные формы

Функциональное уравнение ряда $E_2(\tau)$

$$E_2\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^2 E_2(\tau) + \frac{6}{\pi i} c(c\tau+d).$$

Ряд $E_2(\tau)$ удовлетворяет нелинейному дифференциальному уравнению : $y''' = 2yy'' - 3(y')^2$ (**Chazy equation**).

Введём *кольцо квазимодулярных форм* $\mathbb{C}[E_2, E_4, E_6]$, которое инвариантно относительно дифференцирования D.
Выполняется следующая система диф. уравнений Рамануджана

$$\begin{cases} D(E_2) &= \frac{1}{12}(E_2^2 - E_4) \\ D(E_4) &= \frac{1}{3}(E_2E_4 - E_6) \\ D(E_6) &= \frac{1}{2}(E_2E_6 - E_4^2). \end{cases}$$

A-14. Автоморфная коррекция форм Якоби

Теорема. *Пусть $\phi \in J^{w}_{k,m}$. Ее коэффициенты Тейлора при разложении по z являются квазимодулярными формами.*

Доказательство. Определим **автоморфную коррекцию** формы Якоби

$$\Phi_\phi(\tau, z) = e^{\frac{\pi^2 m}{3} E_2(\tau)\, z^2}\, \phi(\tau, z).$$

Тогда

$$\Phi_\phi\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^k \Phi_\phi(\tau, z)$$

Из функционального уравнения для $\Phi_\phi(\tau, z)$ следует, что коэффициенты Тейлора $\Phi_\phi(\tau, z) = \sum_{n\geq 0} f_{k+n}(\tau)\, z^n$. преобразуются как модулярные формы веса $k+n$. Получаем

$$\phi(\tau, z) = e^{-\frac{\pi^2 m}{3} E_2(\tau)\, z^2} \sum_{n\geq 0} f_{k+n}(\tau)\, z^n.$$

Отметим, что справа виден порядок нуля в $z = 0$.

B-15. Комплексные многообразия

Пусть даны гладкое многообразие X, его когомологии де Рама

$H^k(X,\mathbb{R}) = (\mathrm{Ker}\ d|_{\Omega^k}) \,/\, (\mathrm{Im}\ d|_{\Omega^{k-1}}) =$ классы замкнутых k-форм,

числа Бетти $b_k = \dim_{\mathbb{R}} H^k(X,\mathbb{R})$ и эйлерова характеристика $e(X) = \sum_{k=0}^{dim X} (-1)^k b_k$.
В курсе мы рассматриваем компактные **комплексные** многообразия X, имеющие атлас $X = \cup_i U_\alpha$, $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^n$ с голоморфными функциями перехода $\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Тогда $\dim_{\mathbb{R}} T_X = 2n$. В кокасательном расслоении $T_X^* \otimes \mathbb{C}$ имеется базис $(dz_1, \dots, dz_n, d\bar{z}_1, \dots, d\bar{z}_n)$ и двойственный ему базис в касательном расслоении $T_X \otimes \mathbb{C}$

$$\frac{\partial}{\partial z_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} - i\frac{\partial}{\partial y_i}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} + i\frac{\partial}{\partial y_i}\right)$$

Напомним, что функция $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ голоморфная, если её дифференциал df $\mathbb{C}$-линейный. Для $n = 1$ это эквивалентно выполнению уравнения Коши-Римана $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

B-16. Когомологии Дольбо (Dolbeault)

$T^*_X \otimes C = T^{1,0}_X \oplus T^{0,1}_X = \langle dz_1, \ldots, dz_n \rangle \oplus \langle d\bar{z}_1, \ldots, d\bar{z}_n \rangle$. Любую k-дифференциальную форму на X можно разложить в сумму $\omega = \sum_{i=0}^{k} \omega_{k-i,i}$, где

$$\omega_{p,q} = \sum f_{IJ}(z) dz_I \wedge d\bar{z}_J, \; dz_I = dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p}, d\bar{z}_J = d\bar{z}_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{j_q}.$$

Имеем $d\omega_{p,q} = \partial\omega_{p,q} + \bar{\partial}\omega_{p,q}$, где первое слагаемое имеет тип $(p+1, q)$, а второе $(p, q+1)$. Определим

$$H^{p,q}(X) = H^{p,q}_{\bar{\partial}}(X) = H^q(X, \Omega^p), \quad H^k_{dR}(X, \mathbb{C}) = \sum_{p+q=k} H^q(X, \Omega^p),$$

где Ω^p пучок сечений голоморфных p-форм $\wedge^p (T_X \otimes \mathbb{C})^{1,0}$ на комплексном многообразии X. Определим **голоморфную эйлерову характеристику** X

$$\chi(X, \Omega^p_X) = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q \dim H^q(X, \Omega^p_X) = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q h^{p,q}.$$

Эту сумму можно вычислить при помощи интегрирования (RRH-integral) классов дифференциальных форм.

Пусть $\pi : E \to X$ – комплексное расслоение ранга k над X. Тогда $\pi^{-1}(U_\alpha) \cong U_\alpha \times \mathbb{C}^k$ и функции перехода голоморфные.

Тогда определены его **характеристические классы** со следующими свойствами

1) $c_i(E) \in H^{2i}(X, \mathbb{Z})$, $c_0(E) = 1$ и $c_i(E) = 0$ для $i > k$ и

$$c(E) := \sum_i c_i(E) \in H^*(X, \mathbb{Z}).$$

2) $c(E \oplus F) = c(E) \cdot c(F)$.

3) $c(E)$ хорошо себя ведет по отношению к отображениям $f : Y \to X$: $c(f^*E) = f^*(c(E))$.

4) Явно задан класс тавтологического расслоения H на $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$: $c(H) = 1 - g$, где g двойственный по Пуанкаре классу гомологий гиперплоскости $P^{n-1}(\mathbb{C})$ в $P^n(\mathbb{C})$.

Пример. $c(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) = (1 + g)^{n+1}$.

B-18. Принцип разложения

Можно свести все вычисления с классами к случаю суммы одномерных расслоений $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_k$, где $\mathrm{rk}\, E_j = 1$ и $c_1(E_j) = x_j \in H^2(X, \mathbb{Z})$. Тогда

$$c(E) = c(E_1) \cdot \ldots \cdot c(E_k) = \prod_{j=1}^{k} (1 + x_j),$$

или $c_1(E) = x_1 + \ldots + x_k$, $c_2 = \sum x_i \cdot x_j$ и т.д.

Определим **характер Черна**

$$ch(E) := \sum_i e^{x_i} = k + \sum x_i + \frac{1}{2} \sum x_i^2 + \ldots =$$

$$= k + c_1(E) + \frac{1}{2}(c_1(E)^2 - 2c_2(E)) + \ldots \in H^*(X, \mathbb{Q}).$$

Тогда $ch(E \otimes F) = ch(E) \cdot ch(F)$.

F. Hirzebruch. *Manifolds and Modular Forms*. 1992.

Корни Черна многообразия определяются его касательным расслоением

$$c(X) = c(T_X) = \prod_{i=1}^{n}(1 + x_i), \quad x_i \in H^2(X, \mathbb{Z}).$$

Пример. Пусть $c_n(X) = c_n(T_X) \in H^{2n}(X, \mathbb{Z})$, $[X]$ – фундаментальный цикл многообразия . Тогда

$$\int_X c_n(X) = c_n(X)[X] = e(X).$$

Определим класс Тодда многообразия

$$\mathrm{td}(X) = \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1 - e^{-x_i}} = 1 + \frac{1}{2}c_1(X) + \frac{1}{12}(c_1^2(X) + c_2(X)) + \ldots \in H^*(X, \mathbb{Q}).$$

Теорема-RRH. *Имеет место следующее равенство*

$$\chi(X, E) = \sum_{i=0}^{rk\,E} (-1)^i \dim_{\mathbb{C}} H^i(X, E) =$$

$$\int_X \mathrm{ch}(E)\,\mathrm{td}(X) = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{ch}_{n-j}(E) \wedge \mathrm{td}_j(X)[X].$$

Правила вычисления характеристических классов:
1) $c(E^*) = \prod_{i=1}^{rkE}(1 - x_i)$;
2) $c(\wedge^k E) = \prod_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq r}(1 + (x_{i_1} + \ldots + x_{i_p}))$, где $\wedge^k$ – k-я внешняя степень
3) $c(S^k E) = \prod_{1\leq i_1\leq\ldots\leq i_k\leq r}(1 + (x_{i_1} + \ldots + x_{i_k}))$, S^k – k-я симметрическая степень.
Положим

$$\bigwedge\nolimits_t E = \sum_{k\geqslant 0}(\wedge^k E)t^k, \quad S_t E = \sum_{k\geqslant 0}(S^k E)t^k,$$

где $\wedge^k$ – k-я внешняя степень, а S^k – k-я симметрическая степень. Тогда

$$ch(\wedge_t E) = \prod_{i=1}^{r}(1 + te^{x_i}), \quad ch(S_t E) = \prod_{i=1}^{r}\frac{1}{(1 - te^{x_i})}.$$

Пусть M – (почти) комплексное компактное многообразие размерности m, $q=e^{2\pi i\tau}$ и $\zeta=e^{2\pi i z}$. Определим формальный ряд (имитация произведения Якоби!)

$$\mathbb{E}_{q,\zeta}=\bigotimes_{n=0}^{\infty}\bigwedge\nolimits_{-\zeta^{-1}q^n}T_M^*\otimes\bigotimes_{n=1}^{\infty}\bigwedge\nolimits_{-\zeta q^n}T_M\otimes\bigotimes_{n=0}^{\infty}S_{q^n}T_M^*\otimes\bigotimes_{n=0}^{\infty}S_{q^n}T_M=$$

$$=\sum_{n\geq 0}\sum_{l}E_{n,l}q^n\zeta^l\in K(M)[q,\zeta].$$

Введем **эллиптический род** многообразия M с $\dim_{\mathbb{C}}M=m$

$$\chi(M;\tau,z)=\zeta^{\frac{m}{2}}\int_M \mathrm{ch}(\mathbb{E}_{q,\zeta})\mathrm{td}(T_M).$$

Подробнее имеем

$$\chi(M;\tau,z)=\zeta^{\frac{m}{2}}\sum_{n\geq 0,\, l\in\mathbb{Z}}\int_M \mathrm{ch}(E_{n,l})\mathrm{td}(T_M)q^n\zeta^l=\sum_{n\geq 0,\, l\in\mathbb{Z}}a(n,l)\,q^n\zeta^l,$$

где

$$a(n,l)=\chi(M,E_{n,l-\frac{m}{2}})=\mathrm{index}\,(D|E_{n,l-\frac{m}{2}})\in\mathbb{Z}.$$

B-22. Автоморфность в случае $c_1(M) = 0$

Легко найти q^0-член ряда $\chi(M;\tau,z)$, который является простой модификаций χ_y-рода Хирцебруха $\sum_{p=0}^m \chi^p(M)y^p$ многообразия

$$\chi(M;\tau,z) = \sum_{p=0}^{m} (-1)^p \chi^p(M)\zeta^{m/2-p} + q(\dots),$$

где $\chi^p(M) = \chi(M,\Omega^p) = \sum_{q=0}^m (-1)^q h^{p,q}(M)$, или

$$q^0[\chi(M;\tau,z)] = \zeta^{\frac{m}{2}} \chi_{-\zeta^{-1}}(M)$$

Теорема. *Пусть* $\dim_{\mathbb{C}} M = m$ *и* $c_1(M) = 0$ *(над* $\mathbb{R}$*). Тогда эллиптический род* $\chi(M;\tau,z)$ *есть слабая форма Якоби веса* 0 *и индекса* $m/2$ *с целыми коэффициентами Фурье.*

Kawai-Yamada-Yang (1994), **Gritsenko** (1999), **Totaro** (2000).

Напоминание из A7 и A2

Слабая форма Якоби веса 0 и индекса $\frac{m}{2} \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}$ удовлетворяет двум функциональным уравнениям

$$\varphi\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d}\right) = \exp\left(\pi i\, m \frac{cz^2}{c\tau+d}\right)\varphi(\tau, z)$$

и

$$\varphi(\tau, z+\lambda\tau+\mu) = (-1)^{m(\lambda+\mu)} e^{-\pi i\, m\,(\lambda^2\tau+2\lambda z)}\varphi(\tau, z), \quad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{Z}$$

$$\varphi(\tau, z) = \sum_{n\geqslant 0}\sum_{l\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}} a(n, l) q^n \zeta^l.$$

Тройное произведение Якоби для нечетной $\vartheta(\tau, z)$

$$\vartheta(\tau, z) = -q^{1/8}\zeta^{-1/2}\prod_{n\geqslant 1}(1-q^{n-1}\zeta)(1-q^n\zeta^{-1})(1-q^n).$$

B-23. Доказательство теоремы

Мы уже убедились, что все коэффициенты ряда $\chi(M;\tau,z)$ целые. Заметим, что $\mathbb{E}_{q,\zeta}$ есть $K(M)$-имитация тройного произведения Якоби. Для этого перепишем подынтегральное выражение, используя приведённые выше формулы для корней Черна. Получим

$$\operatorname{ch}(\mathbb{E}_{q,\zeta})\operatorname{td}(T_M)=\prod_{n=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{m}\frac{(1-q^{n-1}\zeta^{-1}e^{-x_i})(1-q^n\zeta e^{x_i})}{(1-q^{n-1}e^{-x_i})(1-q^n e^{x_i})}x_i=(A)$$

После перенормировки $x_i=2\pi i\xi_i$ получим

$$(A)=\prod_{i=1}^{m}\frac{\vartheta(\tau,z+\xi_i)}{\eta(\tau)}\prod_{j=1}^{m}\frac{\eta(\tau)}{\vartheta(\tau,\xi_i)}(2\pi i\xi_i)$$

Для интегрирования надо собрать одночлены по ξ_i степени m.

B-24. Продолжение доказательства теоремы

Исследуем разложение Тейлора подынтегральной функции по ξ_i

$$\Psi(\tau, z; \xi_1, \dots, \xi_m) = \zeta^{\frac{m}{2}} \mathrm{ch}\,(\mathbb{E}_{q,\zeta})\,\mathrm{td}\,(T_M) = \prod_{i=1}^{m} \frac{\vartheta(\tau, z+\xi_i)}{\vartheta(\tau, \xi_i)}(2\pi i \xi_i).$$

Для произвольного $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ получаем

$$\frac{\vartheta(\gamma\langle\tau\rangle, \frac{z+\xi}{c\tau+d})}{\vartheta(\tau, \frac{\xi_i}{c\tau+d})} \cdot \frac{2\pi i \xi}{c\tau+d} = (c\tau+d)^{-1} e^{\pi i c \frac{z^2+2z\xi}{c\tau+d}} \frac{\vartheta(\tau, z+\xi)}{\vartheta(\tau, \xi)}(2\pi i \xi).$$

При сдвигах имеем

$$\frac{\vartheta(\tau, z+\lambda\tau+\mu+\xi)}{\vartheta(\tau, \xi)}(2\pi i \xi) = (-1)^{\lambda+\mu} e^{-\pi i(\lambda^2\tau + 2\lambda(z+\xi))} \frac{\vartheta(\tau, z+\xi)}{\vartheta(\tau, \xi)}(2\pi i \xi)$$

Добавим, что $\dfrac{2\pi i \xi}{\vartheta(\tau, \xi)} = \eta(\tau)^{-3} + \xi(\dots).$

У нас имеются лишние коэффициенты в функциональных уравнениях. После произведения по ξ_i получим два фактора

$$(c\tau+d)^{-m}\exp(\pi i c\frac{mz^2}{c\tau+d}+2z\frac{\sum_i \xi_i}{c\tau+d}), \quad e^{-\pi i\, m(\lambda^2\tau+2\lambda z+2\sum_i \xi_i)}$$

Если $\sum_i \xi_i = 0$, то мы видим, что функция $\Psi(\tau, z; \xi_1, \ldots, \xi_m)$ преобразуется как форма Якоби веса $-m$ и индекса $\frac{m}{2}$ по переменным τ и z. Следовательно, в разложении Тейлора

$$\Psi(\tau, z; \xi_1, \ldots, \xi_m) = \left(\frac{\vartheta(\tau, z)}{\eta^3(\tau)}\right)^m + \sum_{k_1, \ldots, k_m \geq 0} \psi_{s_k - m}(\tau, z)\xi_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot \xi_m^{k_m}$$

коэффициент $\psi_{s_k-m}(\tau, z)$ есть форма Якоби веса $s_k - m$, где $s_k = k_1 + \ldots + k_m > 0$. Для RRH-интегрирования требуется старший когомологический класс с $k_1 + \ldots + k_m = m$. Следовательно результат интегрирования есть форма Якоби веса 0. **Теорема доказана.**

B-26. Значения в $z = 0, 1/2$

Для любой слабой формы Якоби $\varphi_{0,m/2}$ веса 0 её значение в $z = 0$ $(\zeta = 1)$ есть голоморфная $SL_2(\mathbb{Z})$-форма веса 0, т.е. константа: $\varphi_{0,m/2}(\tau, 0) = q^0[\varphi_{0,m/2}](\zeta = 1)$. Для эллиптического рода

$$\chi(M; \tau, z) = \sum_{p=0}^{m} (-1)^p \chi^p(M) \zeta^{m/2-p} + q(\dots),$$

где $\chi^p(M) = \chi(M, \Omega^p) = \sum_{q=0}^{m} (-1)^q h^{p,q}(M)$. Следовательно,

$$\chi(M; \tau, 0) = \sum_{p,q} (-1)^{p+q} h^{p,q}(M) = e(M).$$

Можно показать, что в случае четной размерности

$$\chi(M_{2m}; \tau, \frac{1}{2}) = (-1)^m \mathrm{sign}(M_{2m}) + q(\dots) \in M_0(\Gamma_0(2), v_2).$$

Примеры.

1) Двумерный комплексный тор.

2) **K3-поверхности** (связная односвязная компактная комплексная поверхность, допускающая нигде не вырожденную голоморфную дифференциальную форму степени два).

3) **Поверхности Энриквеса** – факторы поверхностей $K3$ по группам порядка 2 (каноническое линейное расслоение нетривиально, но его квадрат тривиален).

Эллиптический род любой из этих поверхностей – форма Якоби веса 0 и индекса 1.

$$J_{0,1}^{\mathbb{Z}} = \langle \varphi_{0,1} \rangle_{\mathbb{Z}}, \quad \varphi_{0,1} = \zeta + 10 + \zeta^{-1} + q(\dots).$$

Получаем

$$\chi(T^2; \tau, z) = 0, \quad \chi(\mathrm{K3}; \tau, z) = 2\varphi_{0,1}(\tau, z), \quad \chi(\mathrm{Enr}; \tau, z) = \varphi_{0,1}(\tau, z).$$

Это опять случай одномерных пространств форм Якоби

$$J^{\mathbb{Z}}_{0,\frac{3}{2}} = \langle \varphi_{0,\frac{3}{2}} \rangle_{\mathbb{Z}}, \quad J^{\mathbb{Z}}_{0,\frac{5}{2}} = \langle \varphi_{0,\frac{5}{2}} \rangle_{\mathbb{Z}},$$

где

$$\varphi_{0,1} = \zeta + 10 + \zeta^{-1} + q(\dots), \quad \varphi_{0,\frac{3}{2}} = \frac{\vartheta(\tau, 2z)}{\vartheta(\tau, z)} = \zeta^{\frac{1}{2}} + \zeta^{-\frac{1}{2}} + q(\dots),$$

$$\varphi_{0,\frac{5}{2}} = \varphi_{0,1}\varphi_{0,\frac{3}{2}} = \zeta^{\frac{3}{2}} + 11\zeta^{\frac{1}{2}} + 11\zeta^{-\frac{1}{2}} + \zeta^{-\frac{3}{2}} + q(\dots).$$

Получаем

$$\chi(CY_3; \tau, z) = \frac{e(M_3)}{2}(\zeta^{\frac{1}{2}} + \zeta^{-\frac{1}{2}} + q(\dots)).$$

$$\chi(CY_5; \tau, z) = \frac{e(M_5)}{24}(\zeta^{\pm\frac{3}{2}} + 11\zeta^{\pm\frac{1}{2}} + q(\dots)).$$

Следствие [Gr-1999]. 1) Эйлерова характеристика 5-мерного M_5 с тривиальным первым классом Черна делится на 24.

2) $\chi^1(CY_5) = \frac{1}{24}e(CY_5)$, $\chi^2(CY_5) = \frac{11}{24}e(CY_5)$,

$$11(h^{1,1} - h^{1,4}) = h^{2,2} - h^{2,3} + 10(h^{2,1} - h^{3,1}).$$

Теорема [Gr-1999]. Пусть $\varphi_{0,m} = \sum_{n\ge 0,l} a(n,l) q^n \zeta^l \in J_{0,m}$, m целое. Тогда

$$m\sum_l a(0,l) - 6\sum_l l^2 a(0,l) = 0.$$

Следствие. Для для многообразия M_d четной размерности с тривиальным классом Черна

$$\frac{e(M_d)d}{24} = \sum_p (-1)^p \chi^p(M_d)(d/2-p)^2.$$

Доказательство Теоремы. Мы уже установили (стр. 14)

$$\varphi_{0,m}(\tau,z) e^{\frac{\pi^2 m}{3} E_2(\tau)\, z^2} = \sum_{n\ge 0} f_n(\tau)\, z^n,$$

где $f_n(\tau) \in M_n(SL_2(\mathbb{Z}))$. Но $M_2(SL_2(\mathbb{Z})) = \{0\}$. Выражение в Теореме есть первый коэффициент Фурье $f_2(\tau)$.

Теорема. [Gr-1999]

$$J_{0,*}^{\mathbb{Z}} = \bigoplus_{m\in\mathbb{N}} J_{0,m}^{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}[\varphi_{0,1}, \varphi_{0,2}, \varphi_{0,3}, \varphi_{0,4}],$$

где первые три формы Якоби $\varphi_{0,1} = \zeta^{\pm 1} + 10 + \dots$, $\varphi_{0,2} = \zeta^{\pm 1} + 4 + \dots$, $\varphi_{0,3} = \varphi_{0,\frac{3}{2}}^2 = \zeta^{\pm 1} + 2 + \dots$ алгебраически независимы, а для $\varphi_{0,4} = \vartheta(\tau, 3z)/\vartheta(\tau, z) = \zeta^{\pm 1} + 1 + \dots$ имеем

$$4\varphi_{0,4} = \varphi_{0,1}\varphi_{0,3} - \varphi_{0,2}^2.$$

Следствие. Пусть M_d комплексное многообразие четной размерности d и $c_1(M_d) = 0$ в $H^2(M_d, \mathbb{R})$. Тогда

$$d \cdot e(M_d) \equiv 0 \mod 24.$$

Более того, если $c_1(M_d) = 0$ в $H^2(M_d, \mathbb{Z})$, то

$$e(M_d) \equiv 0 \mod 8, \quad \text{если } d \equiv 2 \mod 8.$$

T. Kawai, Y. Yamada, S. K. Yang, *Elliptic Genera and $N = 2$ Superconformal Field Theory.* Nucl. Phys. B414 (1994), 191–212.

V. Gritsenko, *Elliptic genus of Calabi–Yau manifolds and Jacobi and Siegel modular forms.* St. Petersburg Math. J. 11 (1999) 781–804.

B. Totaro, *Chern numbers for singular varieties and elliptic homology,* Ann. Math. (2) 151 (2000) 757–791.

V. Gritsenko, *Modified Elliptic Genus*, in Partition Functions and Automorphic Forms. Moscow Lectures vol. 5, 2021, pp. 87–119, Springer.

С-32. Модулярные дифференциальные уравнения для форм Якоби

Цикл совместных статей с Дмитрием Адлером

[AG2025] Modular differential equations of minimal degrees of the elliptic genus of Calabi–Yau varieties. (To appear)

[AG2023] Modular differential equations of the elliptic genus of Calabi-Yau fourfolds. Journal of Geometry and Physics, 2023, Volume 194, Article 104995

[AG2022] Elliptic genus and modular differential equations. Journal of Geometry and Physics vol. 181 (2022), No. 104662, 12 pp.

[AG2024] Modular differential equations of $W(D_n)$-invariant Jacobi forms. Journal of Geometry and Physics. 2024. Vol. 206. Article 105339.

[AG2020] The D_8-tower of weak Jacobi forms and applications. Jour. of Geometry and Physics 150 (2020), 103616.

С-33. $\vartheta(\tau, z)$ и оператор теплопроводности

Нечетная тета-фунция Якоби $\vartheta(\tau, z)$ определена рядом

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{-4}{n}\right) q^{n^2/8}\zeta^{n/2} = -q^{1/8}\zeta^{-1/2}\prod_{n\geqslant 1}(1-q^{n-1}\zeta)(1-q^n\zeta^{-1})(1-q^n),$$

где $q = e^{2\pi i\tau}$, $\zeta = e^{2\pi iz}$, $\vartheta(\tau, -z) = -\vartheta(\tau, z)$ и

Она лежит в ядре оператора теплопроводности

$$\left(4\pi i\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\vartheta(\tau, z) = 0.$$

В конструкции модулярного дифференциального оператора

$$D_k(f(\tau)) = D(f) - \frac{k}{12}E_2(\tau)\cdot f, \quad D_k : M_k \to M_{k+2}$$

заменим $D = \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{d\tau}$ на оператор теплопроводности

$$H^{(m)} = \frac{3}{m}\frac{1}{(2\pi i)^2}\left(8\pi i m\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) = 12q\frac{d}{dq} - \frac{3}{m}\left(\zeta\frac{d}{d\zeta}\right)^2$$

Его действие : $\quad H^{(m)}(a(n,l)q^n\zeta^l) = \dfrac{3}{m}(4nm - l^2)a(n,l)q^n\zeta^l.$

Как и для D_k, строим модулярную коррекцию оператора $H^{(m)}$:

$$H_k : J^w_{k,m} \to J^w_{k+2,m}, \quad H_k(\varphi_{k,m}) = H^{(m)}(\varphi_{k,m}) - \frac{(2k-1)}{2}E_2(\tau)\cdot\varphi_{k,m}.$$

Диф. операторы D_k и H_k согласованы

$$H_{k_1+k_2}(f_{k_1}\cdot\varphi_{k_2,m}) = 12D_{k_1}(f_{k_1})\varphi_{k_2,m} + f_{k_1}H_{k_2}(\varphi_{k_2,m})$$

где $f_{k_1}(\tau) \in M_{k_1}(SL_2(\mathbb{Z}))$ и $\varphi_{k_2,m}(\tau,z) \in J^w_{k_2,m}$.

ТЕОРЕМА 1. Для эллиптического рода CY_3 выполняется простейшее МДУ степени 1 относительно оператора теплопроводности

$$\chi(CY_3;\tau,z)=\frac{1}{2}e(CY_3)\,\varphi_{0,\frac{3}{2}}=\frac{e(CY_3)}{2}\left(\zeta^{\frac{1}{2}}+\zeta^{-\frac{1}{2}}+q(\dots)\right),$$

$$\mathbf{CY}_3:\quad H_0(\varphi_{0,\frac{3}{2}})=0\quad\text{или}\quad H(\varphi_{0,\frac{3}{2}})+\frac{1}{2}E_2\cdot\varphi_{0,\frac{3}{2}}=0.$$

Доказательство. После домножения на $\eta(\tau)$ получаем голоморфную форму Якоби (сингулярного) веса $\frac{1}{2}$

$$\eta(\tau)\frac{\vartheta(\tau,2z)}{\vartheta(\tau,z)}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{12}{n}\right)q^{n^2/24}\zeta^{n/2}\in J^{hol}_{\frac{1}{2},\frac{3}{2}}(v_\eta\times v_H).$$

Этот тета-ряд (**quintiple product**!) лежит в ядре оператора теплопроводности.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\varphi \in J^w_{k,m}$ – слабая форма Якоби целого веса и целого или полуцелого индекса. Если $H_k(\varphi_{k,m}) = 0$, то

$$\varphi_{k,m} = \begin{cases} \varphi_{0,\frac{3}{2}}(\tau, az) \cdot \Delta(\tau)^n = \dfrac{\vartheta(\tau, 2az)}{\vartheta(\tau, az)}\Delta(\tau)^n, \\ \varphi_{-1,\frac{1}{2}}(\tau, az) \cdot \Delta(\tau)^n = \dfrac{\vartheta(\tau, az)}{\eta^3(\tau)}\Delta(\tau)^n, \end{cases}$$

где $\varphi_{-1,\frac{1}{2}}(\tau, z) = \frac{\vartheta(\tau,z)}{\eta^3(\tau)}$, $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Доказательство.
1) Замена z на az $(a \in \mathbb{N})$ умножает индекс на a^2.
2) Можно умножать на $\Delta(\tau)$, так как $D_{12k}(\Delta(\tau)^k) = 0$.
3) Можно показать, что многочлен $q^0[\phi]$ должен быть очень простым, "одночленным". $\square$

Напомним, что $J^w_{2*,*} = M_*[\varphi_{-2,1}, \varphi_{0,1}]$. В частности, $J^w_{0,1} = \mathbb{C}\varphi_{0,1}$ и $J^w_{2,1} = \mathbb{C}E_4\varphi_{-2,1}$ одномерны.

Из одномерности $J^w_{0,1}$ и $J^w_{2,1}$ получаем $H_{-2}(\varphi_{-2,1}) = (-\frac{1}{2})\varphi_{0,1}$ и
$$H_0 \circ H_{-2}(\varphi_{-2,1}) - \frac{5}{4}E_4\varphi_{-2,1} = 0.$$

Это аналог уравнения **Канеко–Загира** для модулярных форм
$$f''(\tau) - \frac{k+1}{6}E_2(\tau)f'(\tau) + \frac{k(k+1)}{12}E_2'(\tau)f(\tau) = 0,$$
которое эквивалентно МДУ порядка 2
$$D_{k+2}D_k(f) - \frac{k(k+2)}{144}E_4 \cdot f = 0.$$

Это уравнение и его обобщения высших порядков имеют множество приложений в теории чисел, теории вертексных алгебр и конформной теории поля (Kaneko, Sakai, Zagier). В N = 2 суперконформной теории поля эллиптические роды являются естественным обобщением **киральных характеров** (Ch. Keller). Эллиптический род можно вычислить геометрически в терминах **инвариантов Громова–Виттена** в двойственной струнной компактификации (G. Oberdieck, A. Pixton и др.).

С-38. МДУ для эллиптического рода $K3$ поверхности

Для $CY_2 = K3$-поверхность мы нашли ее эллиптический род

$$EG(K3; \tau, z) = 2\varphi_{0,1}(\tau, z) = 2(\zeta^{-1} + 10 + \zeta) + 2q(\ldots).$$

Положим $H_0^{[3]} = H_4 \circ H_2 \circ H_0$, тогда в [AG2022] доказано

$$H_0^{[3]}(\varphi_{0,1}) - \tfrac{101}{4} E_4 H_0(\varphi_{0,1}) + 10 E_6 \varphi_{0,1} = 0$$

или

$$\left(H^3 - \frac{9}{2} E_2 H^2 + \frac{9}{2}(6E_2' - 5E_4)H + 27(E_2'' - \frac{5}{4} E_4')\right)(\varphi_{0,1}) = 0.$$

Это модулярное дифференциальное уравнение степени 3 относительно H. Для CY_5 получается похожее уравнение

$$\left(H_0^{[3]} - \tfrac{611}{25} E_4(\tau) H_0 + \tfrac{88}{25} E_6(\tau)\right)(EG(CY_5)) = 0.$$

Как находить такие уравнения?

Идея вычисления с МДУ.
Для голоморфных (в $i\infty$) форм Якоби получать модулярные дифференциальные уравнения достаточно сложно, а для слабых форм Якоби все можно свести к вычислению с многочленами!
Все три слагаемых уравнения для $\varphi_{0,1}(\tau, z)$

$$H_0^{[3]}(\varphi_{0,1}) - \frac{101}{4} E_4 H_0(\varphi_{0,1}) + 10 E_6 \varphi_{0,1} = 0$$

лежат в $J^w_{6,1}$. Простые вычисления показывают, что q^0-член этой формы $\psi_{6,1}$ равен 0. Получаем

$$\Delta^{-1}\psi_{6,1} \in J^w_{-6,1} = \{0\}.$$

Последнее следует из полиномиальности кольца или из того, что порядок 0 в $z = 0$ любой формы в $J^w_{-6,1}$ не меньше пяти, что невозможно.

$$\psi_{-6,1}(\tau, z) = e^{-\frac{\pi^2 m}{3} E_2(\tau)\, z^2} \left(f_{-6}(\tau) + f_{-4}(\tau) z^2 + f_{-2}(\tau) z^4 + C \cdot z^6 + \dots\right)$$

(См. формулу автоморфной коррекции.)

С-40. EG и χ_y-род Хирцебруха

Предложение (Gr-1999). *Слабые формы Якоби веса 0 с нулевым q^0-коэффициентом Фурье образуют главный идеал*

$$J^w_{0,*}(q) = \xi_{0,6} J^w_{0,*}, \quad \xi_{0,6}(\tau, z) = \Delta(\tau)\varphi^6_{-2,1} = \frac{\vartheta(\tau,z)^{12}}{\eta(\tau)^{12}}.$$

Следствие. Эллиптический род многообразия (с условием $c_1(M) = 0$) однозначно определяется его q^0-коэффициентом, т.е. его χ_y-родом Хирцебруха в случаях размерностей $d < 12$ и $d = 13$.

Замечание. Форма Якоби $\varphi_{0,1}(\tau, z)$ является не только эллиптическим родом, но и **производящей функции кратностей всех положительных корней** одной из базисных лоренцевых алгебр Каца–Муди из классификации Гриценко–Никулина. Автоморфное произведение, заданное $\varphi_{0,1}$, найденное в рамках этой классификации, было протрактовано как **the second quantized genus of K3 surface** (R. Dijkgraaf, G. Moore, E. Verlinde, H. Verlinde).

ТЕОРЕМА 2. 1) **CY3**. Пусть $\varphi_{0,\frac{3}{2}}(\tau,z)=\sum_{n,l}a(n,l)q^n\zeta^l$. Тогда

$$\left(12n-\tfrac{l^2-1}{2}\right)a(n,l)=\sum_{s=1}^{n}12\sigma_1(s)a(n-s,l).$$

2) **K3**. Коэффициенты Фурье $a(n,l)$ эллиптического рода K3 поверхности удовлетворяют соотношению

$$(4n-l^2)\left((4n-l^2)(4n-l^2-\frac{3}{2})-\frac{5}{2}\right)a(n,l)=$$

$$24\sum_{s=1}^{n}a(n-s,l)\Big[(4n-4s-l^2)(3s\sigma_1(s)+25\sigma_3(s))+s^2\sigma_1(s)+\frac{25}{2}s\sigma_3(s))\Big].$$

Аналогичное соотношение выполняется для коэффициентов эллиптического рода CY_5.

Примеры форм Якоби, удовлетворяющих уравнениям типа Канеко–Загира: $\vartheta^2(\tau, z)$, $\vartheta^3(\tau, z)$, $\vartheta^2(\tau, z)\vartheta(\tau, 2z)$. По каждому решению можно построить бесконечную серию примеров (Д. Адлер).

ТЕОРЕМА 3. *Уравнение*

$$H_2 H_0(\varphi_{0,m}) = \lambda E_4 \cdot \varphi_{0,m}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

имеет только "тривиальные" решения в пространстве слабых форм Якоби веса 0*, для которых* $H_0(\varphi_{0,m}) = 0$.

Следствие. Пусть M_{2d} – (строгое) многообразие Калаби–Яу размерности $2d$ ($h^{p,0}(M_{2d}) = 0$ для всех $0 < p < 2d$ и $h^{0,0} = h^{2d,0} = 1$). Тогда эллиптический род M_{2d} не удовлетворяет МДУ степени 1 или 2.

Замечание. ϑ^4, ϑ^5 удовлетворяют МДУ-3,

ϑ^6, ϑ^7 удовлетворяют МДУ-4, ϑ^8 удовлетворяют МДУ-5.

Вопрос: Найти формы Якоби, удовлетворяющие МДУ наименьшей степени? Для индекса 2 и 3 ответы есть.

ТЕОРЕМА 5. "Generic" форма Якоби веса 0 и индекса 2 **удовлетворяет МДУ степени 5**. При этом есть ровно **три** формы Якоби индекса 2, удовлетворяющих МДУ степени 3, **одна** форма с МДУ степени 4, и **одна** – с МДУ степени 6.

Пример. Пусть A_4 – гиперкэлеровое многообразие типа $\mathrm{Kum}^2(A)$. Тогда его эллиптический род $\Psi = \chi(A_4; \tau, z) = 3\zeta^{\pm 2} + 6\zeta^{\pm 1} + 90 + q(\dots)$ удовлетворяет МДУ степени 5

$$\Big(H_0^{[5]} - \frac{13775}{106} E_4 H_0^{[3]} + \frac{114865}{212} E_6 H_0^{[2]} + \frac{1848045}{848} E_4^2 H_0 - \frac{381975}{848} E_4 E_6\Big)(\Psi) = 0.$$

Для многообразия K_4 типа $\mathrm{Hilb}^2(\mathrm{K3})$ имеем $EG(K_4; \tau, z) = = 3\zeta^{\pm 2} + 42\zeta^{\pm 1} + 234 + q(\dots)$ и

$$\Big(H_0^{[5]} - \frac{815}{6} H_0^{[3]} + \frac{1885}{4} E_6 H_0^{[2]} + \frac{99455}{48} E_4^2 H_0 - \frac{20845}{48} E_4 E_6\Big)(EG(K_4)) = 0.$$

C-44 или B-29. Свойство коэффициентов Фурье

Теорема [Gr-1999]. Пусть $\varphi_{0,m} = \sum_{n\ge 0,l} a(n,l)q^n\zeta^l \in J_{0,m}$, m целое. Тогда

$$m\sum_l a(0,l) - 6\sum_l l^2 a(0,l) = 0.$$

Доказательство. Мы уже установили (стр. A-14)

$$\varphi_{0,m}(\tau,z)e^{\frac{\pi^2 m}{3}E_2(\tau)\,z^2} = \sum_{n\ge 0} f_n(\tau)\,z^n,$$

где $f_n(\tau) \in M_n(SL_2(\mathbb{Z}))$. Но $M_2(SL_2(\mathbb{Z})) = \{0\}$. Выражение в Теореме есть первый коэффициент Фурье $f_2(\tau)$.

Замечание. Это соотношение дает нам нетривиальное соотношение между числами Ходжа многообразия с тривиальным первым классом Черна!

Из трех форм Якоби веса 0 и индекса 2, удовлетворяющих МДУ степени 3, только две могут дать эллиптический род CY_4 в строгом смысле

$$2\psi_{0,2}(\tau, z) = 2(\zeta^{\pm 2} + 22) + 2q(\dots)$$

$$\rho_{0,2}(\tau, z) = (2\zeta^{\pm 2} - 11\zeta^{\pm 1}) + q(\dots)$$

Теорема. 1) $\chi(CY_4, \tau, z) = 2\psi_{0,2}(\tau, z)$ т. и т. т., когда $e(CY_4) = 48$.

2) $\chi(CY_4, \tau, z) = \rho_{0,2}(\tau, z)$ т. и т. т., когда $e(CY_4) = -18$.

3) Выполняются МДУ степени 3

$$(H_4 H_2 H_0 - \tfrac{263}{4} E_4 H_0 + \tfrac{121}{4} E_6)(\psi_{0,2}) = 0,$$

$$(H_4 H_2 H_0 - \tfrac{335}{4} E_4 H_0 - \tfrac{275}{4} E_6)(\rho_{0,2}) = 0.$$

Доказательство. 1) и 2) следуют их соотношений с предыдущей страницы. МДУ из 3) получаются алгоритмом со стр. C-39.

ПРИЛОЖЕНИЕ. Только для любого (строгого) четырёхмерного многообразия Калаби-Яу M_4 с $e(M_4)=48$ его эллиптический род $\chi(M_4;\tau,z)=\psi_{0,2}=2(\zeta^{-2}+22+\zeta^2)+q(\dots)$

1) $\psi_{0,2}$ удовлетворяет МДУ степени 3, в квазимодулярной H-версии которого нет ряда Эйзенштейна $E_6(\tau)$

$$\mathbf{K3}:\ \Big(H^3-\frac{9}{2}E_2H^2+\frac{9}{2}(6E_2'-5E_4)H+27(E_2''-\frac{5}{4}E_4')\Big)(\varphi_{0,1})=0,$$

$$\mathbf{M_4}:\ \Big(H^3-\frac{9}{2}E_2H^2+9(3E_2'-7E_4)H+27(E_2''-\frac{7}{2}E_4')\Big)(\psi_{0,2})=0.$$

2) EG(K3) и EG(M_4) являются производящими функциями всех положительных корней лоренцевых алгебр Каца–Муди (из классификации Гриценко–Никулина) с тремя простыми вещественными корнями.

3) SQEG(K3)$^{-1}$ и SQEG(M_4)$^{-1}$ являются базисными параболическими формами для $Sp_2(\mathbb{Z})$ и парамодулярной групп Зигеля $\Gamma_{(1,2)}$ соответственно.

Теорема [AG-2025]. Пусть $\varphi_{k,m} \in J^w_{k,m}$ решение МДУ степени 3

$$(H_k^{[3]} + \lambda E_4 H_k + \mu E_6)(\varphi_{k,m}) = 0.$$

Тогда возвратный многочлен $q^0[\varphi_{k,m}](\zeta^{\pm 1})$ содержит не более трех ненулевых коэффициентов Фурье $a(0,l)$ с попарно различными l^2. Если имеется ровно три коэффициента, то

1) $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = -\frac{2k+1}{2}m$.

2) Вес k отрицателен и ограничен $-5 \le k < 0$.

3) q^0-многочлен имеет следующий вид для четного и нечетного веса k

$$q^0[\varphi_{k,m}] = \begin{cases} a(\zeta^{l_1} + \zeta^{-l_1}) + b(\zeta^{l_2} + \zeta^{-l_2}) - (a+b)(\zeta^{l_3} + \zeta^{-l_3}), \\ a(\zeta^{l_1} - \zeta^{-l_1}) + b(\zeta^{l_2} - \zeta^{-l_2}) + c(\zeta^{l_3} - \zeta^{-l_3}. \end{cases}$$

Пусть $\dim_{\mathbb{C}}(M_6) = 6$ и $c_1(M_6) = 0$. Тогда $\chi(M_6; \tau, z) \in J^w_{0,3}$. Известно, что

$$J^w_{0,3} = \{aE_6(\tau)\varphi^3_{-2,1} + bE_4(\tau)\varphi_{0,1}\varphi^2_{-2,1} + c\varphi^3_{0,1}, \quad a, b, c \in \mathbb{C}\}.$$

Теорема. [AG-2025]
1) Общая форма $\varphi \in J^w_{0,3}$ удовлетворяет МДУ степени 7.

2) Особые формы $\psi \in J^w_{0,3}$ образуют плоскую кубику в пространстве коэффициентов $(a, b, c) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

3) В $J^w_{0,3}$ нет решений МДУ степеней 1, 2 и 3.

4) В $J^w_{0,3}$ имеется ровно 10 форм Якоби, удовлетворяющих МДУ степени 4. Среди них имеется три кандидата быть эллиптическим родом строгих CY_6.

Следствие. *Минимальная возможная степень МДУ для эллиптического рода строгого CY_6 равна 4.*

С-49. ИТОГИ: Adler-Gr. 2022, 2023, 2025

1. $EG(CY_3)$ удовлетворяет МДУ степени 1:

$$H(EG(CY_3;\tau,z)) + \frac{1}{2}E_2(\tau)\cdot EG(CY_3;\tau,z) = 0.$$

2. $EG(CY_{2d};\tau,z)$ многообразия Калаби–Яу в строгом смысле ($h^{p,0}(CY_{2d}) = 0$ для всех $0 < p < 2d$, $h^{2d,0} = h^{0,0} = 1$) не удовлетворяет никакому МДУ степени 2.

3. Для $2 \le d \le 10$ имеется ровно четыре типа многообразий таких, что их эллиптический род удовлетворяет МДУ степени три. Это $K3$-поверхности, два строгих CY_4 с $e(CY_4) = 48$, -18 и любое CY_5 с $e(CY_5) \neq 0$.

4. "Generic" форма Якоби из $J^w_{0,2}$ (соотв. $J^w_{0,3}$) удовлетворяет некоторому МДУ степени 5 (соотв. 7). Например, это верно для эллиптического рода 4-мерных голоморфных симплектических многообразий $\mathrm{Hilb}^{[2]}(K3)$, $\mathrm{Kum}^2(A)$ и 6-мерных $\mathrm{Hilb}^{[3]}(K3)$, $\mathrm{Kum}^3(A)$ и $OG'6$.