Международная конференция по анализу и геометрии

30 авг. – 3 сент. 1999 г., Новосибирск, Россия

Тезисы докладов

Balandin, Alexander V.

Lax Representation of Nonlinear Sigma-Models

Баландин Александр Владимирович, *Нижегородский государственный университет, Россия*; *email*: balandin@mm.unn.ac.ru

Представление Лакса нелинейных сигма-моделей

В настоящей работе указывается некоторый класс нелинейных сигма-моделей, ассоциированных с полупростыми группами Ли, допускающих представление Лакса.

Нелинейными сигма-моделями принято называть системы дифференциальных уравнений, которые являются уравнениями Эйлера для лагранжиана $L = g_{\mu\nu}U_x^\mu U_y^\nu + a_{\mu\nu}U_x^\mu U_y^\nu + Q$, где $g_{\mu\nu}$ — невырожденная симметрическая матрица, $a_{\mu\nu}$ — кососимметрическая матрица, Q — некоторая функция, зависящие только от переменных $U^1, \ldots, U^n$; греческие индексы принимают значения от 1 до n. При этом сама система дифференциальных уравнений имеет вид:

$$U_{xy}^\sigma + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma U_y^\nu U_x^\mu + Q^\sigma = 0.$$

Представление Лакса или представление нулевой кривизны системы дифференциальных уравнений, следуя [1], будем понимать как набор псевдопотенциалов, т. е. инвариантных дифференциальных форм $\overline{\Theta}^i$, $i = \overline{1,m}$, $m \geq n$, некоторой группы Ли такой, что система уравнений $\overline{\Theta}^i = A^i dx + B^i dy$ вполне интегрируема на решениях системы (1).

Теорема. *Пусть $U^1, U^2, \ldots, U^n$ — локальная система координат на полупростой группе Ли G, $C_{\mu\nu}^\lambda$ — структурные константы относительно данной системы координат, θ^λ — левоинвариантные формы на группе G, а $g_{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}^0$ — метрики Киллинга, соответственно, на группе G и на ее алгебре. Тогда система уравнений Эйлера для лагранжиана L допускает представление Лакса, если дифференциальная форма $\psi = a_{\mu\nu}dU^\mu \wedge dU^\nu$ удовлетворяет равенству $d\psi = \frac{2}{3}g_{\lambda\alpha}^0 C_{\mu\nu}^\lambda \theta^\alpha \wedge \theta^\mu \wedge \theta^\nu$, а функция Q имеет вид*: $Q = g_{\alpha\beta}^0 X^\alpha Y^\beta$, *где*

$X = (X^\alpha)$ *и* $Y = (Y^\alpha)$ — *левоинвариантное и правоинвариантное векторные поля на группе* G.

Примером такой системы, ассоциированной с группой $SO(3)$, является система уравнений для лагранжиана $L = U_x^1 U_y^1 + U_x^2 U_y^2 + U_x^3 U_y^3 + 2\cos U^3 U_y^1 U_x^2 + p\cos U^3$, где p — некоторая константа.

Нетрудно видеть, что тогда система обыкновенных дифференциальных уравнений Эйлера для лагранжиана $L_1 = (\dot{U}^1)^2 + (\dot{U}^2)^2 + (\dot{U}^3)^2 + 2\cos U^3 \dot{U}^1 \dot{U}^2 + p\,\cos U^3$ также допускает представление Лакса.

Заметим, что последняя система сводится к случаю Лагранжа уравнений движения твердого тела.

References

[1] H. D. Wahlquist, F. B. Estabrook. Prolongation structures of nonlinear evolution equations. *J. Math. Phys.*, **16**(1):1–7, 1975.