Международная конференция по анализу и геометрии

30 авг. – 3 сент. 1999 г., Новосибирск, Россия

Тезисы докладов

Bezborodov, Pavel A.

A Counterexample to Simon's Conjecture

Безбородов Павел Алексеевич, *Волгоградский государственный университет, Россия*; *email*: tkachev@math.vgu.tsaritsyn.su

Контрпример к гипотезе Саймона

Одним из актуальных направлений современной теории уравнений в частных производных является качественное исследование свойств целых (т. е. определенных во всем пространстве $\mathbf{R}^n$) решений. Особое место в этой теории занимает изучение вопросов, связанных с аналогами теоремы Бернштейна для уравнений определенного класса. В классической формулировке эта теорема утверждает, что единственными целыми решениями уравнения минимальных поверхностей являются линейные функции.

В своей недавней работе [1] Л. Саймон поставил задачу нахождения класса квазилинейных уравнений, для которых выполнено так называемое свойство Бернштейна, т. е. любые целые решения которых обязательно являются линейными. В той же статье Саймон высказал гипотезу о том, что свойство Бернштейна выполняется для квазилинейного уравнения

$$(1+u_x^2)u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + (1+u_y^2)u_{yy} = 0. \tag{1}$$

Рассмотрим класс квазилинейных уравнений в частных производных эллиптического типа вида

$$A(u_x)u_{xx} + B(u_x, u_y)u_{xy} + C(u_y)u_{yy} = 0. \tag{2}$$

Заметим, что уравнение (1), предложенное Саймоном, содержится в классе (2). Мы доказываем, что для этого класса уравнений при некоторых ограничениях на коэффициенты справедлива следующая

Теорема. *Пусть уравнение имеет вид* (2) *и пусть его коэффициенты $A(\xi)$ и $C(\eta)$ являются аналитическими функциями сво-*

их аргументов и удовлетворяют условиям

$$\begin{array}{ll} \int_0^{+\infty} A(\xi)d\xi = +\infty, & \int_{-\infty}^0 A(\xi)d\xi = +\infty, \\ \int_0^{+\infty} C(\eta)d\eta = +\infty, & \int_{-\infty}^0 C(\eta)d\eta = +\infty. \end{array}$$

Тогда уравнение (2) *имеет целые аналитические решения, отличные от линейных.*

Таким образом, мы выделяем класс уравнений, которые заведомо не обладают свойством Бернштейна. Как следствие, получаем опровержение гипотезы Саймона о справедливости теоремы Бернштейна для уравнения (1).

Получены также формулы для приведения произвольного квазилинейного уравнения с коэффициентами, зависящими только от градиента решения

$$A(u_x, u_y)u_{xx} + B(u_x, u_y)u_{xy} + C(u_y, u_y)u_{yy} = 0,$$

к дивергентной форме $\mathrm{div}(a(u_x, u_y), b(u_x, u_y)) = 0$, путем умножения на некоторую функцию $D(u_x, u_y)$, которая находится из линейного уравнения

$$\begin{array}{c} AD_{\eta\eta} - BD_{\xi\eta} + CD_{\xi\xi} + (2A_\eta - B_\xi)D_\eta \\ +(2C_\xi - B_\eta)D_\xi + (A_{\eta\eta} - B_{\xi\eta} + C_{\xi\xi})D = 0, \end{array}$$

где через ξ и η обозначены u_x и u_y соответственно. Эти формулы имеют вид:

$$a = \int D(\xi, \eta)A(\xi, \eta)d\xi, b = \int D(\xi, \eta)C(\xi, \eta)d\eta.$$

References

[1] L. Simon. Asymptotics for exterior solutions of quasilinear elliptic equations. In: *Geometry from Pac. Rim.* Berlin – New York, de Gruyter, 1997. P. 343–362.