Международная конференция по анализу и геометрии

30 авг. – 3 сент. 1999 г., Новосибирск, Россия

Тезисы докладов

Greshnov, Alexandre V.

The Corkscrew Condition and Metric Balls on Carnot Groups

Грешнов Александр Валерьевич, *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия*;
email: greshnov@math.nsc.ru

Условие внешней спирали и метрические шары на группах Карно

В 1981 г. Джерисоном и Кенигом [1] был введен класс NTA-областей (non-tangentially accessible domain), для которого они доказали ряд теорем, касающихся граничного поведения гармонических функций и свойств гармонических мер; в частности, было установлено, что множество точек NTA-области $\mathcal{D}$, где гармоническая функция u (определенная в $\mathcal{D}$) некасательно ограничена снизу, эквивалентно почти всюду по отношению к гармонической мере множеству тех точек, где u имеет некасательный предел. В дальнейшем для NTA-областей, принадлежащих $\mathbb{R}^n$, исследовалось граничное поведение решений эллиптических уравнений общего типа (см., например, [2, 3]).

Следуя [1], введем понятие NTA-области для метрического пространства $\mathbb{X}$ с внутренней метрикой d. Метрика d называется *внутренней* метрикой пространства $\mathbb{X}$, если для любых двух точек x_1, x_2, принадлежащих $\mathbb{X}$, расстояние $d(x_1, x_2)$ есть точная нижняя грань длин кривых, соединяющих x_1 и x_2. Полагаем, что для любых двух точек x_1, x_2 существует *кратчайшая* в $\mathbb{X}$, т. е. кривая, длина которой равна $d(x_1, x_2)$.

Пусть $\mathcal{D}$ — некоторая область, принадлежащая $\mathbb{X}$. Шар $B(x, r)$, принадлежащий $\mathcal{D}$, называется M*-некасательным*, если расстояние $d(B(x, r), \partial\mathcal{D})$ сравнимо с радиусом r:

$$Mr > d(B(x, r), \partial\mathcal{D}) > M^{-1}r.$$

Для любых двух точек y_1, y_2 из $\mathcal{D}$ *цепочкой Гарнака* назовем последовательность M-некасательных шаров таких, что первый шар содержит y_1, последний шар содержит y_2, а соседние имеют непустое пересечение.

Определение. Область $\mathcal{D} \subset \mathbb{X}$ называется *NTA-областью*, если существуют константы M и r_0 такие, что выполняются следующие условия:

1) *Условие внутренней спирали.* Для любой точки $x \in \partial\mathcal{D}$, $r < r_0$, найдется M-некасательный шар $B(y, C_1 r)$ такой, что $B(y, C_1 r) \subset (\mathcal{D} \cap B(x, r))$, где константа C_1 зависит только от M.

2) *Условие внешней спирали.* Множество $\mathcal{D}^c = \mathbb{X} \setminus \mathcal{D}$ удовлетворяет условию внутренней спирали.

3) *Условие цепочки Гарнака.* Если точки y_1, y_2 принадлежат $\mathcal{D}$ и выполняются неравенства

$$d(y_i, \partial\mathcal{D}) > \varepsilon, \quad d(y_1, y_2) < C\varepsilon,$$

то существует цепочка Гарнака для y_1, y_2, длина которой зависит только от C.

Развитие квазиконформного анализа и теории уравнений в частных производных на многообразиях M, касательное пространство которых порождается векторными полями, удовлетворяющими условию Хёрмандера, с метрикой Карно–Каратеодори, естественным образом привело к постановке задач о регулярности решений уравнений эллиптического типа и соответственно рассмотрению NTA-областей на M (см., например, [2, 3]). Особое место в этих исследованиях занимают группы Карно. *Группой Карно* [4] называется связная односвязная нильпотентная группа Ли $\mathbb{G}$, алгебра Ли V которой разлагается в прямую сумму $V_1 \oplus \ldots \oplus V_m$ векторных пространств таких, что $[V_1, V_k] = V_{k+1}$ для $1 \leq k \leq m-1$ и $[V_1, V_m] = \{0\}$. Отождествим элементы $g \in \mathbb{G}$ с элементами $x \in \mathbb{R}^N$, $N = \sum\limits_{i=1}^{m} \dim V_i$, $x = (x_{ij})$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq \dim V_i$, посредством экспоненциального отображения. Абсолютно непрерывная кривая $\sigma(s)$, $s \in [0, s_0]$, называется *горизонтальной*, если ее производная $\dot\sigma(s)$ почти в каждой точке принадлежит пространству V_1. Длина горизонтальной кривой определяется по формуле

$$l(\sigma) = \int\limits_0^{s_0} \Big(\sum_{i=1}^{m_1} \dot\sigma_{1i}^2(s)\Big)^{1/2} ds.$$

Известно [4], что любые две точки группы Карно можно соединить горизонтальной кривой конечной длины. Определим на $\mathbb{G}$ *метрику Карно–Каратеодори* d, полагая, что для любых двух точек x, y группы Карно расстояние $d(x,y)$ есть точная нижняя грань длин горизонтальных кривых, соединяющих x и y. Можно показать, что любые два элемента x, y группы Карно соединяются (см., например, [5]) абсолютно непрерывной горизонтальной кратчайшей.

Класс NTA-областей в евклидовом пространстве достаточно широк. В частности [6], любой достаточно малый метрический шар, принадлежащий гладкому многообразию M с аффинной связностью является NTA-областью. Однако на пространствах Карно–Каратеодори ситуация иная. Известно [3, 6], что в простейшем случае групп Карно — групп Гейзенберга $\mathbb{H}^1$ ($m = 2$, $\dim V_1 = 2$, $\dim V_2 = 1$), метрические шары в метрике Карно–Каратеодори не являются NTA-областями; для них не выполняется условие внешней спирали. В связи с этим в работе [3] был поставлен вопрос: являются ли метрические шары в метрике Карно–Каратеодори NTA-областями на общих группах Карно. Нами получен следующий результат.

Теорема 1. *На двухступенчатых ($m = 2$) группах Карно, для которых $\dim V_2 = 1$, метрические шары в метрике Карно–Каратеодори не являются NTA-областями.*

Как и на группах Гейзенберга, на таких двухступенчатых группах Карно метрические шары в метрике Карно–Каратеодори не удовлетворяют условию внешней спирали.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 96–15–962911, 97–01–01092).

References

[1] D. Jerison, C. Kenig. Boundary behavior of harmonic functions in non-tangentially accessible domain. *Adv. Math.*, **47**(1):80–147, 1982.

[2] R. Wittmann. A non-tangential limit theorem. *Osaka J. Math.*, **24**(1):61–76, 1987.

[3] L. Capogna, N. Garofalo. Nontangentially accessible domains for Carnot-Caratheodory metrics and a Fatou type theorem. *C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I Math.*, **321**(12):1565–1570, 1995.

[4] M. Gromov. *Carnot-Caratheodory spaces seen from within.* Preprint

IHES/94/6. Bures–sur–Yette, 1994.

[5] R. Strichards. Sub-Reimannian geometry. *J. Differential Geometry.*, **24**(2):221–262, 1986.

[6] А. В. Грешнов. Области, удовлетворяющие условию внутренней и внешней спирали, на метрических пространствах. В кн.: *Тр.* 12 *Сибирской школы "Алгебра, геометрия и математическая физика".* Новосибирск, изд-во Института математики СО РАН, 1999 (в печати).