Международная конференция по анализу и геометрии

30 авг. – 3 сент. 1999 г., Новосибирск, Россия

Тезисы докладов

Korolyova, Olga E.
Sheretov, Vladimir G.

Analogs of Ahlfors's Coefficient Inequality for Schlicht Functions of the Classes $S^{(2)}$ and $S_k^{(2)}(\infty)$

Королёва Ольга Евгеньевна, *Тверской государственный университет, Россия*
Шеретов Владимир Георгиевич, *Тверской государственный университет, Россия*; *email*: `Vladimir.Sheretov@tversu.ru`

Аналоги коэффициентного неравенства Альфорса для однолистных функций классов $S^{(2)}$ и $S_k^{(2)}(\infty)$

Получены некоторые аналоги известного неравенства Альфорса $|a_4| \le \left(1 - \frac{1}{15}(4 - |a_2|^2)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$ для тейлоровских коэффициентов $a_2 = a_2(f)$ и $a_4 = a_4(f)$ однолистных функций f класса S [1].

Символом $S^{(2)}$ обозначим подкласс класса S, образуемый нечетными функциями

$$F(z) = z + \alpha_3 z^3 + \alpha_5 z^5 + \alpha_7 z^7 + \dots .$$

Обозначим через $S_k^{(2)}(\infty)$ класс всех k-квазиконформных автоморфизмов F римановой сферы $\bar{\mathbb{C}}$, нормированных условием $F(\infty) = \infty$ и таких, что ограничения F на единичный круг $\Delta = \{z \in \bar{\mathbb{C}} : |z| < 1\}$ принадлежат классу $S^{(2)}$.

Теорема 1. *Для коэффициентов α_3 и α_7 произвольной функции класса $S_k^{(2)}(\infty)$ выполняется неравенство, аналогичное неравенству Альфорса,*

$$|\alpha_7| \le \frac{1}{3}\left(k - |\alpha_3| + (1 + 2|\alpha_3|^2)\sqrt{|\alpha_3|^2 + \frac{27}{8}(k^2 - |\alpha_3|^2)}\right).$$

Теорема 2. *Коэффициенты α_3 и α_7 произвольной функции* *класса $S^{(2)}$ связаны точным неравенством типа Альфорса*

$$|\alpha_7| \le \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}|\alpha_3|^2\right)\sqrt{\frac{27}{8} - \frac{19}{8}|\alpha_3|^2}, \tag{1}$$

с экстремальными функциями вида $F_\theta(z) = z(1 + e^{i\theta}z^2)^{-1}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Л. де Бранж [3] доказал гипотезу Бибербаха о том, что в классе S $|a_n| \le n$, $n \in \mathbb{N}$. Аналогичные оценки для класса $S^{(2)}$ не получены, причём ситуация здесь сложнее, чем в классе S. Действительно, ещё в 1933 г. Фекете и Сегё [4] получили на $S^{(2)}$ точную оценку $|\alpha_5| \le \frac{1}{2} + e^{-\frac{2}{3}} > 1$, в которой экстремальные функции отличны от $F_\theta(z)$. Из (1) следует оценка $|\alpha_7| \le \frac{73\sqrt{219}}{1026} \approx 1,05$.

References

[1] Л. Альфорс. Неравенство между коэффициентами a_2 и a_4 однолистной функции. В кн.: *Некоторые вопросы математики и механики.* Л.: Наука, 1970. С. 71–74.

[2] В. Г. Шеретов. *Аналитические функции с квазиконформным продолжением.* Тверь, 1991.

[3] L. de Branges. Proof of the Bieberbach Conjecture. *Acta Math.*, **154**:137–152, 1985.

[4] M. Fekete, G. Szegö. Eine Bemerkung uber ungerade schlichte Funktionen. *J. London Math. Soc.*, **8**:85–89, 1933.