Международная конференция по анализу и геометрии

30 авг. – 3 сент. 1999 г., Новосибирск, Россия

Тезисы докладов

Kouznetsova, Olga S.

On Interrelation Between the Complex Moments of Hele-Shaw Domains and Their Geometric Properties

Кузнецова Ольга Святославовна, *Волгоградский государственный университет, Россия*; *email*: tkachev@math.vgu.tsaritsyn.su

О связи комплексных моментов семейства областей Хеле-Шоу с его геометрическими свойствами

Обозначим через $B = \{z \in \mathbf{C} : |z| \leq 1\}$ замкнутый единичный круг. Пусть $w(z,t)$ — однолистная голоморфная по переменной z в круге B и дифференцируемая по параметру t, $t \geq 0$, функция является решением следующего нелинейного уравнения

$$\frac{\partial w(z,t)}{\partial t} = \frac{w'_z}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(e^{i\zeta},t) \frac{e^{i\zeta}+z}{e^{i\zeta}-z}\, d\zeta, \qquad w(0,t)=0, \qquad w'_z(0,t)>0, \tag{1}$$

называемого уравнением Хеле-Шоу. Тогда образ при отображении $w(z,t)$, $z \in B$, обозначаемый Ω_t (плоская ячейка Хеле-Шоу), описывает динамику начальной области Ω_0, при закачивании несжимаемой жидкости через источник постоянной мощности, расположенный в начале координат $0 \in \Omega_t$.

В работе Ричардсона [1] показано, что интегральные комплексные моменты области

$$M_n(\Omega_t) = \int\!\!\int_{\Omega_t} z^n \, dx\, dy,$$

при всех $n \geq 1$ не зависят от значения параметра $t \in [0; T_0)$, причем нулевой момент $M_0(\Omega_t)$ зависит от t линейным образом $M_0(\Omega_t) = M_0(\Omega_0) + 2\pi t$.

В настоящем докладе обсуждаются различные геометрические и асимптотические свойства решений уравнения Хеле-Шоу. Следующее утверждение обобщает теорему Ричардсона о линейности нулевого момента.

Пусть $w(z;t)$ — решение уравнения Хеле-Шоу и $\zeta_k \equiv w(e^{i\theta_k};0)$, $k = 1,2$, — две точки на границе начальной области $\partial\Omega_0$. Пусть $\zeta(t) \equiv w(e^{i\theta_k};t)$, $t \in [0;T_0)$ описывает траектории точек ζ_k и $\Omega_t(\zeta_1,\zeta_2)$ — сектор, вырезаемый данными траекториями из кольца $\Omega_t \setminus \Omega_0$.

Теорема 1. *Площадь сектора* Area $\Omega_t(\zeta_1;\zeta_2)$ *растет линейно по* t:

$$\text{Area}\,\Omega_t(\zeta_1;\zeta_2) = (\theta_2 - \theta_1)\cdot t = c(\zeta_1;\zeta_2)\cdot t.$$

Назовем *голоморфным параметром* односвязной области Ω с аналитической жордановой границей единственную голоморфную в окрестности $\partial\Omega$ функцию $g_\Omega(z)$ такую, что $\bar{\zeta} = g_\Omega(\zeta)$, $\zeta \in \partial\Omega$. Ричардсон показал, что голоморфный параметр естественным образом связан с семейством моментов области Ω. Сама задача отыскания голоморфного параметра для данной области и его связи с её геометрией является сложной и нерешенной. В этом направлении нами получен следующий критерий звездности области Ω в терминах её голоморфного параметра (а, следовательно, в терминах её комплексных моментов).

Теорема 2. *Пусть* $w(z)$ — *однолистное отображение внутренности круга* B *на область* Ω, $w^*(z) = zw'(z)/w(z)$ *и* $g_\Omega(z)$ — *голоморфный параметр. Тогда*

$$-g^*_\Omega(w(z)) = e^{-2i\arg\, w^*(z)}, \qquad z \in \partial\Omega.$$

В частности, область Ω *будет звездной относительно начала координат тогда и только тогда, когда* $\arg g^*(\zeta) \in (-\pi;\pi)$.

В докладе также обсуждается связь комплексных моментов данной области с некоторыми метрическими характеристиками.

References

1 S. Richardson. Hele-Shaw flows with a free boundary produced by the injection of fluid into a narrow channel. *J. Fluid Mech.*, **56**(4): 609–618, 1972.