Международная конференция по анализу и геометрии

30 авг. – 3 сент. 1999 г., Новосибирск, Россия

Тезисы докладов

Kudryavtseva, Natasha A.

A Theorem of the Weak Jacobian on Carnot Groups

Кудрявцева Наталья Анатольевна, *Сибирский государственный университет телекоммуникации и информатики, Новосибирск, Россия*; *email*: alex@itam.nsc.ru

Теорема о слабом якобиане на группах Карно

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — открытое ограниченное множество, отображение $u : \Omega \to \mathbb{R}^2$, $u = (u_1, u_2)$. Якобиан u в точке x равен

$$J(x, u) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(x)\frac{\partial u_2}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}(x)\frac{\partial u_2}{\partial x_1}(x).$$

В вопросах существования решений уравнений нелинейной теории упругости часто бывает важно, чтобы якобиан был представлен в дивергентном виде, например

$$\operatorname{Det} Du = \frac{\partial}{\partial x_1}(u_1\frac{\partial u_2}{\partial x_2}) - \frac{\partial}{\partial x_2}(u_1\frac{\partial u_2}{\partial x_2}).$$

Болл [1] предположил что $J(x, u) = \operatorname{Det} Du(x)$, если $\operatorname{Det} Du$ — функция класса L^1. Мюллер [2] доказал это предположение в более общей форме. Цель настоящей работы состоит в распространении результата Мюллера на группы Карно.

Стратифицированной однородной группой или, в другой терминологии, *группой Карно* называется связная односвязная нильпотентная группа Ли $\mathbb{G}$, алгебра Ли V которой разлагается в прямую сумму $V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$ векторных пространств таких, что $\dim V_1 \geq 2$, $[V_1, V_k] = V_{k+1}$ для $1 \leq k \leq m - 1$ и $[V_1, V_m] = \{0\}$. Отождествим элементы $g \in \mathbb{G}$ с элементами $x \in \mathbb{R}^N$, $N = \sum\limits_{i=1}^{m} \dim V_i$, $x = (x_{ij})$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq \dim V_i$, посредством экспоненциального отображения $\exp\bigl(\sum x_{ij}X_{ij}\bigr) = g$, где X_{ij}, $1 \leq j \leq n_i = \dim V_i$ — базис в V_i, образованный коммутаторами полей $X_k = X_{1k} \subset V_1$ порядка i. Число $\nu = \sum\limits_{i=1}^{m} i \dim V_i$ называется однородной размерностью группы $\mathbb{G}$.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{G}$ — *область,* $1 \le p < \nu$, v — *функция,* $v : \Omega \to \mathbb{R}$, $v \in W^1_p(\Omega)$ $(v \in HW^1_p(\Omega))$, $\sigma : \Omega \to \mathbb{R}^n$, — *векторное поле,* $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, $\sigma \in L^q(\Omega)$, *и* $\operatorname{div}\sigma = X_1\sigma_1 + X_2\sigma_2 + \ldots + X_n\sigma_n \in L^1(\Omega)$. *Пусть числа* p *и* q *таковы, что* $1/p - 1/\nu + 1/q \le 1$. *Положим* $d = \operatorname{div}(v\sigma)$ *и пусть* $d \in L^1(\Omega)$. *Тогда справедливо равенство* $d(x) = \nabla_{\mathcal{L}} v(x)\sigma(x) + v(x)\operatorname{div}\sigma(x)$ *для почти всех* $x \in \Omega$.

В доказательстве этой теоремы существенно используется обобщение теоремы Зигмунда–Кальдерона на группы Карно из [3]. Следствием теоремы является равенство сильного и слабого якобианов на группах Карно.

Определим слабый якобиан на группе Карно. Пусть $\Omega \subset \mathbb{G}$ — область, отображение $\varphi : \Omega \to \mathbb{G}$. Матрица $\operatorname{adj}_H D\varphi(x)$ определяется из условия $D_H\varphi(x)\operatorname{adj}_H D\varphi(x) = J(x,\varphi)\mathrm{Id}$, где $D_H\varphi = (X_1\varphi, \dots, X_n\varphi)$ — формальный горизонтальный дифференциал.

Положим

$$\operatorname{Det}_H D\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} X_j(\varphi_{11}(x)(\operatorname{adj}_H D\varphi(x))_{j1}).$$

Предложение. *Пусть* $\varphi : \Omega \to \mathbb{G}$ — *непрерывное отображение,* $\varphi \in W^1_{\nu^2/(\nu+1)}(\Omega)$, $\operatorname{Det}_H D\varphi \in L^1$ *и пусть*

$$\sum_{j=1}^{n} X_j(\operatorname{adj}_H Df(x))_{j1} = 0.$$

Тогда $J(x,\varphi) = \operatorname{Det}_H D\varphi(x)$ *для почти всех* $x \in \Omega$.

Для группы Гейзенберга в [4] доказано, что если $f : \Omega \to \mathbb{G}$ — непрерывное отображение класса $W^1_{\nu-1}(\Omega)$, то столбцы матрицы $\operatorname{adj}_H Df$ являются дивергентно свободными.

Работа выполнена совместно с С. К. Водопьяновым при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 97–01–01092, 98–01–00705).

References

[1] J. M. Ball. Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **63**:337–403, 1977.

[2] S. Müller. *A remark on the distributional determinant.* Carnegie Mellon University. Research Report No. 90–76, 1990.

[3] С. К. Водопьянов. Отображения с ограниченным и с конечным искажением на группах Карно. *Сиб. мат. журн.*, **40**(4):764–804, 1999.

[4] Н. С. Даирбеков. Отображения с ограниченным искажением на группах Гейзенберга. *Сиб. мат. журн.*, (в печати).