Международная конференция по анализу и геометрии

30 авг. – 3 сент. 1999 г., Новосибирск, Россия

Тезисы докладов

Losev, Alexandr G.
Mazepa, Elena A.

Bounded Solutions of the Shrödinger Equation on Riemannian Manifolds

Лосев Александр Георгиевич, *Волгоградский государственный университет, Россия*; *email*: `losev@math.vgu.tsaritsyn.su`
Мазепа Елена Алексеевна, *Волгоградский педагогический колледж, Волгоградский государственный университет, Россия*; *email*: `losev@math.vgu.tsaritsyn.su`

Ограниченные решения уравнения Шрёдингера на римановых произведениях

Данная работа посвящена проблеме существования нетривиальных ограниченных решений стационарного уравнения Шрёдингера

$$Lu \equiv \Delta u - c(x)u = 0, \tag{1}$$

где $c(x)$ — гладкая неотрицательная функция, в связи с геометрией многообразия. Подобные задачи для линейных эллиптических уравнений второго порядка решались рядом авторов в [1]–[6]. В данной работе рассматриваются ограниченные решения уравнения (1) на римановых многообразиях следующего вида. Пусть M — полное риманово многообразие, представимое в виде $M = B \cup D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_p$, где B — некоторый компакт, а каждая область D_i изометрична прямому произведению $\mathrm{R}_+ \times S_{i1} \times S_{i2} \ldots \times S_{ik}$ (где $\mathrm{R}_+ = (0, +\infty)$, а S_{ij} — компактные римановы многообразия без края) с метрикой $ds^2 = h_i^2(r)dr^2 + g_{i1}^2(r)d\theta_{i1}^2 + \cdots + g_{ik}^2(r)d\theta_{ik}^2$. Здесь $h_i(r)$ и $g_{ij}(r)$ — положительные, гладкие на R_+ функции, а $d\theta_{ij}^2$ — метрика на S_{ij}. Пусть $\dim S_{ij} = n_{ij}$. В дальнейшем будем считать, что в каждой области D_i выполнено условие $c(r, \theta_{i1}, \theta_{i2}, \ldots, \theta_{ik}) \equiv c_i(r)$.

Введем обозначения: $s_i(t) = g_{i1}^{n_{i1}}(t) \cdots g_{ik}^{n_{ik}}(t)$, $q_{ij} = \frac{h_i(t)s_i(t)}{g_{ij}^2(t)}$,

$$I_i = \int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{h_i(t)}{s_i(t)} \left(\int\limits_{r_0}^{t} c_i(z)h_i(z)s_i(z)dz \right) dt,$$

$$J_{ij} = \int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{h_i(t)}{s_i(t)} \left(\int\limits_{r_0}^{t} q_{ij}(z)dz \right) dt, \qquad K_i = \int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{h_i(t)}{s_i(t)} dt,$$

где $r_0 > 0$, $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, ik$.

Ясно, что в случае $c(x) \not\equiv 0$ на каждой области D_i выполнено в точности одно из условий:

$\alpha)$ $J_{ij} = \infty$ при $j \leq s$, где $0 \leq s < k$,
$J_{ij} < \infty$ при $j = s+1, \dots, k$, $I_i < \infty$;
$\beta)$ $J_{ij} = \infty$, для всех j, $I_i < \infty$;
$\gamma)$ $K_i = \infty$; $\delta)$ $I_i = \infty$, $K_i < \infty$.

Будем называть область D_i областью типа α (соответственно β, γ, δ), если для этой области выполнены условия пункта α (соответственно β, γ, δ).

Теорема 1. *Пусть риманово многообразие M имеет l областей D_i типа α и m областей D_i типа β, где $l + m \geq 1$. Тогда для любого заданного набора $(\Psi_1, \dots, \Psi_l, C_{l+1}, \dots, C_{l+m})$, где $\Psi_i = \Psi_i(\theta_{is+1}, \dots, \theta_{ik})$ — непрерывные на $S_{i1} \times S_{i2} \dots \times S_{ik}$ функции, а C_i — произвольные константы, существует единственное ограниченное решение уравнения* (1) *$u(x)$ такое, что*

$$\lim_{r\to\infty} u(r, \theta_{i1}, \dots, \theta_{ik}) = \Psi_i(\theta_{is+1}, \dots, \theta_{ik}) \quad \text{по области } D_i \text{ типа } \alpha,$$

$$\lim_{r\to\infty} u(r, \theta_{1i}, \dots, \theta_{ik}) = C_i \quad \textit{по области } D_i \textit{ типа } \beta.$$

Теорема 2. *Если риманово многообразие M таково, что не существует областей D_i типа α и β, то всякое ограниченное решение уравнения* (1) *тождественно равно нулю (и, если $c(x) \equiv 0$, то всякое ограниченное решение является тождественной константой).*

References

[1] D. Sullivan. The Dirichlet problem at infinity for a negatively curved manifolds. *J. Diff. Geom.*, **18**:723–732, 1983.

[2] M. T. Anderson. The Dirichlet problem at infinity for manifolds with negative curvature. *J. Diff. Geom.*, **18**:701–722, 1983.

[3] А. Г. Лосев. О некоторых лиувиллевых теоремах на некомпактных римановых многообразиях. *Сиб. мат. журнал*, **39**(1):87–93, 1998.

[4] А. Г. Лосев, Е. А. Мазепа. О поведении ограниченных решений уравнения Шрёдингера на некомпактных римановых многообразиях. *Вестник ВолГУ. Сер. матем. физика*, **3**:32–43, 1998.

[5] А. А. Григорьян, Н. С. Надирашвили. Лиувиллевы теоремы и внешние краевые задачи. *Изв. вузов. Матем.*, (5): 25–33, 1987.

[6] А. А. Григорьян. Ограниченные решения уравнения Шрёдингера на некомпактных римановых многообразиях. *Труды семинара И. Г. Петровского*, **4**:66–77, 1989.