Международная конференция по анализу и геометрии

30 авг. – 3 сент. 1999 г., Новосибирск, Россия

Тезисы докладов

Losev, Alexandr G.
Mazepa, Elena A.

Some Boundary Value Problems for the Stationary Shrödinger Equation on Non-compact Riemannian Manifolds

Лосев Александр Георгиевич, *Волгоградский государственный университет, Россия*; *email*: `losev@math.vgu.tsaritsyn.su`
Мазепа Елена Алексеевна, *Волгоградский педагогический колледж, Волгоградский государственный университет, Россия*; *email*: `losev@math.vgu.tsaritsyn.su`

О некоторых краевых задачах для стационарного уравнения Шредингера на некомпактных римановых многообразиях

В настоящей работе предлагается новый подход к постановке краевых задач для стационарного уравнения Шрёдингера

$$Lu \equiv \Delta u - c(x)u = 0, \qquad (1)$$

где $c(x)$ — гладкая неотрицательная функция, на некомпактных римановых многообразиях, основанный на введении нового понятия — класса $[f]$ эквивалентных на многообразии M непрерывных ограниченных функций. Заметим, что в условиях, когда существует геометрическая компактификация многообразия M, добавляющая границу на бесконечности, данный подход естественным образом приводит к постановке задачи Дирихле, как она понимается в работах [1], [2], [3] и др.

Пусть M — произвольное гладкое связное некомпактное риманово многообразие без края, $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — гладкое исчерпание многообразия M, то есть последовательность предкомпактных открытых подмножеств риманова многообразия M таких, что $\overline{B}_k \subset B_{k+1}$, $M = \cup_{k=1}^{\infty} B_k$, ∂B_k — гладкая.

Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывные ограниченные на M функции. Будем говорить, что функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ *эквивалентны на* M, если для некоторого исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ многообразия M выполнено $\lim_{k\to\infty} ||f_1(x) - f_2(x)||_{C(M\setminus B_k)} = 0$, где $||f(x)||_{C(G)} = \sup_G |f(x)|$.

Класс эквивалентных f функций будем обозначать через $[f]$. Пусть $B \subset M$ — произвольное компактное подмножество с гладкой границей и $B \subset B_k$ для всех k.

Будем говорить, что для уравнения (1) на M *разрешима краевая задача с граничными условиями из класса* $[f]$, если на M существует решение $u(x)$ уравнения (1) такое, что $u \in [f]$. Будем говорить, что для уравнения (1) на $M \setminus B$ *разрешима внешняя краевая задача с граничными условиями из класса* $[f]$, если для любой непрерывной на ∂B функции $\Phi(x)$ на $M \setminus B$ существует решение $u(x)$ уравнения (1) такое, что $u \in [f]$ и $u|_{\partial B} = \Phi|_{\partial B}$.

Обозначим v_k — решение уравнения (1) в $B_k \setminus B$, удовлетворяющее условиям $v_k|_{\partial B} = 1$, $v_k|_{\partial B_k} = 0$. Последовательность функций $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится на $M \setminus B$ к решению уравнения (1) $v = \lim_{k \to \infty} v_k$, $0 < v \leq 1$, $v|_{\partial B} = 1$. При этом функция v не зависит от выбора исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$. Функцию v будем назвать *L-потенциалом компакта B относительно многообразия M*. Для уравнения Лапласа–Бельтрами функция v есть не что иное, как емкостный потенциал компакта B относительно многообразия M (см. [4]).

Многообразие M будем называть *L-строгим* многообразием, если для некоторого компакта $G \subset M$ существует L-потенциал v такой, что $v \in [0]$, (если L=Δ, то многообразие будем называть *Δ-строгим*). Будем говорить, что многообразие M является *L-точным*, если на нем существует решение u уравнения (1), удовлетворяющее условию $u \in [1]$.

Теорема 1. *Пусть на $M \setminus B$ для уравнения* (1) *разрешима внешняя краевая задача с граничными условиями из класса* $[f]$. *Тогда на M для уравнения* (1) *разрешима краевая задача с граничными условиями из того же класса.*

Теорема 2. *Пусть на L-строгом многообразии M для уравнения* (1) *разрешима краевая задача с граничными условиями из класса* $[f]$. *Тогда на $M \setminus B$ разрешима внешняя краевая задача с граничными условиями из класса* $[f]$.

References

[1] D. Sullivan. The Dirichlet problem at infinity for a negatively curved manifolds. *J. Diff. Geom.*, **18**:723–732, 1983.

[2] M. T. Anderson. The Dirichlet problem at infinity for manifolds with negative curvature. *J. Diff. Geom.*, **18**:701–722, 1983.

[3] А. Г. Лосев, Е. А. Мазепа. О поведении ограниченных решений уравнения Шрёдингера на некомпактных римановых многообразиях. *Вестник ВолГУ. Сер. матем. физика*, **3**:32–43, 1998.
[4] А. А. Григорьян, Н. С. Надирашвили. Лиувиллевы теоремы и внешние краевые задачи. *Изв. вузов. Матем.*, (5): 25–33, 1987.