Международная конференция по анализу и геометрии

30 авг. – 3 сент. 1999 г., Новосибирск, Россия

Тезисы докладов

Markina, Irina G.

On Coincidence of p-Module and p-Capacity in the Geometry of Vectors Fields Satisfying the Hörmander Hypoellipticity Condition

Маркина Ирина Генриховна, *Новосибирскский государственный университет, Россия*; *email*: markina@math.nsc.ru

О совпадении p-модуля и p-емкости в геометрии векторных полей, удовлетворяющих условию гипоэллиптичности Хёрмандера

Вопрос о связи емкости и модуля семейства кривых изучался многими авторами. В частности, В. А. Шлык доказал в [1], что в $\mathbb{R}^n$ для достаточного общего класса конденсаторов эти две величины равны. Мы рассматриваем ситуацию, когда векторные поля, определенные в некоторой окрестности ограниченной области из $\mathbb{R}^n$ удовлетворяют условию гипоэллиптичности Хёрмандера. Дадим точные определения.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_k$ — семейство вещественных векторных полей класса C^∞, определенных в некоторой окрестности U замыкания $\overline{\Omega}$ ограниченной области Ω из $\mathbb{R}^n$, $n > 2$. Под областью мы понимаем далее открытое связное множество. Для мультииндекса $\alpha = (i_1, i_2, \ldots, i_m)$ обозначим через X_α коммутатор

$$[X_{i_1}, [X_{i_2}, \ldots, [X_{i_{m-1}}, X_{i_m}] \ldots]]$$

длины $|\alpha| = m$. Предполагается, что семейство векторных полей удовлетворяет в области Ω условию гипоэллиптичности Хёрмандера: существует целое положительное число s такое, что коммутаторы векторных полей порядка $|\alpha| = s$ образуют касательное пространство в каждой точке замыкания области Ω.

Введем векторные поля

$$X^{(1)} = \{X_1, X_2, \ldots, X_k\}, X^{(2)} = \{[X_1, X_2], \ldots, [X_{k-1}, X_k]\}, \ldots$$

таким образом, чтобы компоненты набора $X^{(p)}$ были коммутаторами длины p. Обозначим через $Z_1, Z_2, \ldots, Z_q$ некоторую нумерацию векторных полей, входящих в совокупность $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(s)}$. Если Z_i — элемент $X^{(j)}$, то будем говорить, что Z_i имеет формальную степень $d(Z_i) = j$ или короче $d(Z_i) = d_i = j$.

Определим, следуя [2], метрику, ассоциированную с семейством векторных полей. Пусть $C(\delta)$ обозначает класс абсолютно непрерывных отображений $\varphi : [0;1] \to \Omega$, почти всюду удовлетворяющих дифференциальному уравнению

$$\varphi'(t) = \sum_{j=1}^{q} a_j(t) Z_j(\varphi(t)), \qquad |a_j(t)| < \delta^{d_j}.$$

Тогда величина $\rho(x,y) = \inf\{\delta > 0 \mid$ существует такое отображение $\varphi \in C(\delta)$, что $\varphi(0) = x$, $\varphi(1) = y\}$ есть метрика на Ω. Метрический шар есть множество точек $B(x,\delta) = \{y \in \Omega : \rho(x,y) < \delta\}$. Расстояние между множествами определяется естественным образом.

Пусть Ω — ограниченная открытая область в $\mathbb{R}^n$, а F_0 и F_1 — замкнутые непустые и непересекающиеся множества в $\overline{\Omega}$. Пусть $\Gamma(F_0, F_1; \Omega)$ — множество кривых $\gamma : I \to \Omega$, где I — открытый интервал, и множества $\overline{\gamma(I)} \cap F_0$ и $\overline{\gamma(I)} \cap F_1$ не пусты. Обозначим через $\mathcal{F}(\Gamma(F_0, F_1; \Omega))$ множество борелевских функций $\rho : \Omega \to [0, \infty]$ таких, что для любой локально спрямляемой кривой $\gamma \in \Gamma(F_0, F_1; \Omega)$ выполняется неравенство

$$\int\limits_{\gamma} \rho\, ds = \int\limits_{I} \rho(t)\, dt \geq 1.$$

Совокупность $\mathcal{F}(\Gamma(F_0, F_1; \Omega))$ будем называть множеством допустимых функций для семейства кривых $\Gamma(F_0, F_1; \Omega)$.

Определение 1. Для $p \in (1, \infty)$ p-модулем семейства кривых $\Gamma(F_0, F_1; \Omega)$ называется величина

$$M_p(\Gamma(F_0, F_1; \Omega)) = \inf \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^p\, dx,$$

где нижняя грань берется по всем допустимым функциям

$$\rho \in \mathcal{F}(\Gamma(F_0, F_1; \Omega)).$$

Для функции $\varphi \in C^\infty(D)$, где область $D \subset \Omega$ может совпадать с Ω, полагаем

$$\left\| \varphi \mid L_p^1(D) \right\| = \left(\int\limits_D |\nabla_{\mathcal{L}} \varphi|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Пространство $L_p^1(D)$ определяется как пополнение класса

$$\left\{ \varphi \in C^\infty(D) : \left\| \varphi \mid L_p^1(D) \right\| < \infty \right\}$$

относительно полунормы $\left\| \varphi \mid L_p^1(D) \right\|$.

Обозначим через $\mathcal{A}(F_0, F_1; \Omega)$ множество непрерывных функций $u \in L_p^1(\Omega)$ таких, что $u = 0$ в некоторой окрестности компакта F_0 и $u = 1$ в некоторой окрестности компакта F_1.

Определение 2. Для $p \in (1, \infty)$ p-емкостью конденсатора $(F_0, F_1; \Omega)$ называется величина

$$\operatorname{cap}_p(F_0, F_1; \Omega) = \inf \int\limits_\Omega |\nabla_{\mathcal{L}} u|^p \, dx,$$

где нижняя грань берется по всем допустимым функциям

$$u \in \mathcal{A}(F_0, F_1; \Omega).$$

Свойства емкости смотри в [3].

Теорема. *Имеет место равенство.*

$$\operatorname{cap}_p(F_0, F_1; \Omega) = M_p(\Gamma(F_0, F_1; \Omega)).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 97–01–01092, 96–15–96291).

References

[1] В. А. Шлык. О равестве p-емкости и p-модуля. *Сиб. мат. журн.*, **34**(6):216–221, 1993.

[2] A. Nagel, E. M. Stein, S. Waingler. Balls and metrics defined by vector fields. I. Basic properties. *Acta. Math.*, **155**(1–2):103–147, 1985.

[3] С. К. Водопьянов, В. М. Черников. Пространства Соболева и гипоэллиптические уравнения. В кн.: *Тр. Ин-та математики РАН.* Т. **29**. Сиб. отд-ние. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 1995. С. 3–64.