Международная конференция по анализу и геометрии

30 авг. – 3 сент. 1999 г., Новосибирск, Россия

Тезисы докладов

Mel'nikov, Evgeniĭ V.

On Well-Posedness of the Abstract Cauchy Problem in the Sense of Ultradistributions

Мельников Евгений Владимирович, *Омский государственный университет, Россия*; *email*: `melnikov@univer.omsk.su`

О корректности абстрактной задачи Коши в смысле ультрараспределений

Пусть E и X — отделимые секвенциально полные локально выпуклые пространства. Через $\operatorname{Spec} X$ обозначаем множество всех непрерывных полунорм на X, а через $L(X,E)$ — пространство всех непрерывных линейных отображений X в E, наделенное топологией равномерной сходимости на ограниченных подмножествах X. Пусть $\mathcal{D}(d)$ и $\mathcal{S}(d)$ $(d>1)$ — классы Жеврея (см.,например, [1]). Классу $\mathcal{F} \in \{\mathcal{D}(d),\ \mathcal{S}(d)\}$ соответствуют следующие пространства ультрараспределений: $\mathcal{F}'(X) := L(\mathcal{F}, X)$, $\quad \mathcal{F}'_a(X) := \{f \in \mathcal{F}'(X) \ : \ \operatorname{supp} f \geq a\}$, $\overline{\mathcal{F}}'_+(X) := \operatorname*{ind\,lim}_{a\to-\infty} \mathcal{F}'_a(X)$.

Пусть $P \in \mathcal{S}'_0(d; L(E,X))$ таково, что отображение $\mathcal{S}(d) \times E \ni (\varphi, e) \mapsto P(\varphi)e \in X$ непрерывно. Под задачей Коши для ультрараспределения P понимается задача нахождения решения уравнения $P * u = f$, где $f \in \overline{\mathcal{D}}'_+(d; X)$ — заданное, а $u \in \overline{\mathcal{D}}'_+(d; E)$ — искомое ультрараспределения, причем $\inf\operatorname{supp} u \geq \inf\operatorname{supp} f$.

Рассмотрены различные понятия обобщенной корректности указанной задачи и изучена связь между ними. Установлены достаточно общие условия на пространства E и X, гарантирующие обобщенную корректность задачи Коши в случае ее однозначной разрешимости (см. также [2]). При надлежащем понимании непрерывной зависимости u от f корректность равносильна существованию фундаментальной функции ультрараспределения P, т. е. такого ультрараспределения $T \in \mathcal{D}'_0(d; L(X,E))$, что $P * T = \delta \otimes I_X$, $T * P = \delta \otimes I_E$ и для любого компакта $K \subset \mathbb{R}$ отображение $\mathcal{D}_K(d) \times X \ni (\varphi, x) \mapsto T(\varphi)x \in E$ непрерывно.

Пусть Λ — замкнутая область в $\mathbb{C}$. Квазирезольвентой ультрараспределения P в Λ назовем непрерывное отображение $R : \Lambda \to L(X,E)$, аналитическое внутри Λ, если его правый и левый дефекты $H_+(\lambda) := P(\lambda)R(\lambda) - I_X$ и $H_-(\lambda) := R(\lambda)P(\lambda) - I_E$, где $P(\lambda)$ — преобразование Лапласа ультрараспределения P, для некоторого $a > 0$ удовлетворяет условиям:

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \ \forall\,p \in \operatorname{Spec} X\ \ \exists\,\overline{p} \in \operatorname{Spec} X\ \ \exists\,\delta > 0\ \ \forall\,\lambda \in \Lambda$$

$$\ln \|H_+(\lambda)\|_p^{\overline{p}} \le (\varepsilon - a)\operatorname{Re}\lambda + \delta M(\lambda),$$

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \ \forall\,q \in \operatorname{Spec} E\ \ \exists\,\overline{q} \in \operatorname{Spec} E\ \ \exists\,\delta > 0\ \ \forall\,\lambda \in \Lambda$$

$$\ln \|H_-(\lambda)\|_q^{\overline{q}} \le (\varepsilon - a)\operatorname{Re}\lambda + \delta M(\lambda),$$

где $M(\lambda) := \sup\limits_{n \ge 0} |\lambda^n n^{-nd}|$, $\|A\|_p^q := \sup\{\, p(Ax) \mid x \in \operatorname{dom} A,\ q(x) \le 1\,\}$. Следуя Шазарейну [1], d-областью назовем множество вида $\Lambda_{\alpha,\beta} := \{\, \lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}\lambda \ge \alpha|\lambda|^{1/d} + \beta\,\}$, $\alpha \ge 0$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Теорема. Для существования у P фундаментальной функции (т. е. для $\mathcal{D}'(d)$-корректности задачи Коши для P) необходимо и достаточно, чтобы в некоторой d-области Λ существовала квазирезольвента R ультрараспределения P такая, что

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \ \forall\,p \in \operatorname{Spec} E\ \ \exists\,q \in \operatorname{Spec} X\ \ \exists\,\delta > 0\ \ \forall\,\lambda \in \Lambda$$

$$\ln \|R(\lambda)\|_p^q \le \varepsilon \operatorname{Re}\lambda + \delta M(\lambda).$$

В случае, когда X и E — банаховы пространства, R является резольвентой, т. е. $H_\pm \equiv 0$.

Установлены также необходимые и достаточные условия корректности задачи Коши для возмущенного распределения, теоремы о порождении и возмущении различных классов полугрупп-ультрараспределений. Полученные результаты обобщают, в частности, соответствующие результаты Шазарейна [1] и Кочубея [3]. Методика исследований и разработанный автором аппарат дают возможность устанавливать подобные результаты для различных классов распределений (даже при достаточно широком понимании последних).

References

[1] J. Chazarain. Problemes de Cauchy Abstraits et Applications a Quelques Problemes Mixtes. *J. Funct. Anal.*, **7**:386–446, 1971.

[2] Е. В. Мельников. Теорема о замкнутом графике и обобщенная корректность абстрактной задачи Коши. *Сиб. мат. журн.*, **32**(2):180–183, 1991.

[3] А. Н. Кочубей. Дифференциально-операторные уравнения в пространствах ультрараспределений. *Дифф. уравнения*, **16**(3):405–413, 1980.