Международная конференция по анализу и геометрии

30 авг. – 3 сент. 1999 г., Новосибирск, Россия

Тезисы докладов

Novikov, Dmitrii P.

On Commuting Differential Operators of Rank 2 over Hyperelliptic Curves

Новиков Дмитрий Петрович, *Омский государственный университет, Россия*; *email*: novikov@math.omsu.omskreg.ru

О коммутирующих дифференциальных операторах ранга 2 над гиперэллиптическими кривыми

Коммутирующие обыкновенные линейные дифференциальные операторы $L_n = D^n + \dots$ и $L_m = D^m + \dots$: $[L_n, L_m] = 0$, $D = \frac{d}{dx}$, по теореме Берчналла-Чонди имеют общие собственные функции $\psi(x,\lambda)$, являющиеся решениями системы $L_n\psi = \lambda\psi$, $L_m\psi = \mu\psi$. Как следствие, существует полином Q от двух переменных такой, что $Q(L_n, L_m) = 0$ и $Q(\lambda, \mu) = 0$. Каждой точке алгебраической кривой Γ, заданной уравнением $Q(\lambda,\mu) = 0$, соответствует r-мерное линейное пространство собственных функций ψ указанных операторов. Число r называется рангом пары (L_n, L_m) и делит n и m (сведения из [1]). Случай ранга 1 хорошо изучен ([1]). Для ранга > 1 известно, что общее решение уравнения коммутации параметризуется $r-1$ произвольной функцией. Явные соотношения между коэффициентами операторов при этом очень сложны. В данной работе изучается частный случай: для оператора $L_4 = (D^2 + 2A)^2 - 2u$ найдены достаточные условия вхождения в пару (L_4, L_{4n+2}) ранга 2, где $n \geq 1$, и получено уравнение 2-го порядка для нахождения общих собственных функций этих операторов. Здесь A, u — функции от x.

Следуя матричной схеме алгебро-геометрического интегрирования из [2], перепишем уравнение $L_4\psi = \lambda\psi$:

$$\vec{\psi}_x = \begin{pmatrix} \psi \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2A & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda + 2u & 0 & -2A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = U\vec{\psi},$$

матрица U подобрана J-кососимметричной: $UJ + JU^T = 0$, где J —

кососимметрическая матрица, у которой на побочной диагонали, чередуясь, расположены 1 и -1, а остальные элементы равны нулю. Условие $L_{4n+2}\psi = \mu\psi$ переписывается в матричной форме $W\vec{\psi} = \mu\vec{\psi}$. Согласно [2], W — многочлен по λ, и в случае операторов ранга r характеристический многочлен матрицы W имеет r-кратные собственные числа. Оказывается, что для оператора L_4 указанного вида матрицу W можно выбрать в специальном виде, со свойствами $WJ = JW^T$ и $\operatorname{tr} W = 0$:

$$W = \begin{pmatrix} b & a & p & 0 \\ c & -b & 0 & p \\ d & 0 & -b & -a \\ 0 & d & -c & b \end{pmatrix}.$$

Условие $[L_4, L_{4n+2}] = 0$ равносильно равенству $W_x = [U, W]$.

Теорема. *Оператор $L_4 = (D^2 + 2A)^2 - 2u$ входит в пару (L_4, L_{4n+2}) ранга 2, если для многочлена $p = \lambda^n + \dots$ от λ из (1), вместе с функциями $A(x)$ и $u(x)$, справедливо соотношение*

$$\frac{1}{2}pp^{IV} - \frac{1}{2}p'p''' + \frac{1}{4}p''^2 + 4A(pp'' - \frac{1}{2}p'^2) + 2A'pp' + (\lambda + 2u)p^2 = \mu^2.$$

Если при этом функция ψ является решением уравнения $p\psi'' - p'\psi' + (-\mu + 2Ap + \frac{1}{2}p'')\psi = 0$, то $L_4\psi = \lambda\psi$, $L_{4n+2} = \mu\psi$.

Из (2) при каждом $n \in \mathbb{N}$ следует дифференциальное соотношение между функциями $A(x)$ и $u(x)$, т. е. каждый полученный класс операторов ранга 2 зависит от одной произвольной функции. Кривая Берчналла-Чонди Γ задается уравнением $\mu^2 = P_{2n+1}(\lambda)$, где $P_{2n+1} = \lambda^{2n+1} + \dots$ — многочлен, т. е. Γ гиперэллиптична.

References

[1] И. М. Кричевер. Коммутативные кольца обыкновенных линейных дифференциальных операторов. *Функц. анализ и его прилож.*, **12**(3):20–31, 1978.

[2] Б. А. Дубровин, И. М. Кричевер, С. П. Новиков. Интегрируемые системы. I. *Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.* Т. 4. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1985. С. 179–284.