# Международная конференция по анализу и геометрии

**30 авг. – 3 сент. 1999 г., Новосибирск, Россия**

## Тезисы докладов

PROKHOROV, DMITRI V.

**On Boundedness of Fractional Riemann-Liouville Integrals**

ПРОХОРОВ ДМИТРИЙ ВЛАДИМИРОВИЧ, *Вычислительный центр ДВО РАН, Хабаровск, Россия*; *email*: prohorov@as.dv.khv.ru

**Об ограниченности дробных интегралов Римана-Лиувилля**

Для $0 < p < \infty$ пусть

$$\|f\|_{pq,\mu}\colon = \begin{cases} \left(\int_0^\infty q\, t^{q-1}(\mu\{x\colon |f(x)| > t\})^{\frac{q}{p}}\, dt\right)^{\frac{1}{q}}, & \text{если } 0 < q < \infty; \\ \sup_{t>0} t(\mu\{x\colon |f(x)| > t\})^{\frac{1}{p}}, & \text{если } q = \infty. \end{cases}$$

и $L^{pq}(\mu)$ обозначает пространство Лоренца всех измеримых функций на $\mathbb{R}^+$ таких, что $\|f\|_{pq,\mu} < \infty$, $L^{pq} \equiv L^{pq}(\mu)$ в том случае, когда $\mu$ — мера Лебега.

**Теорема 1.** *Пусть $\alpha > 0$, $\max(\frac{1}{\alpha}, 1) < r < \infty$, $1 \le s, q \le \infty$, $1 < p < \infty$ и $\max(r, s) \le \min(p, q)$. Тогда для ограниченности дробного интеграла Римана-Лиувилля вида $T_\alpha f(x) = v(x)x^{-\alpha}\int_0^x (x-y)^{\alpha-1} f(y)\, dy$ из $L^{rs}$ в $L^{pq}(\mu)$ необходимо и достаточно*

$$A\colon = \sup_{k\in\mathbb{Z}} \left\| v(x)x^{-\frac{1}{r}}\chi_{[2^k,\, 2^{k+1})}(x)\right\|_{pq,\mu} < \infty.$$

*Более того,* $\|T_\alpha\|_{L^{rs}\to L^{pq}(\mu)} \approx A \approx \sup_{t>0} t^{\frac{1}{r'}} \left\|v(x)x^{-1}\chi_{[t,\,\infty)}(x)\right\|_{pq,\mu}$.

Теорема 1 обобщает или дополняет некоторые результаты работ [1–4].

Пусть ядро $k(x,y) \ge 0$ оператора

$$Kf(x) = v(x)\int_0^x k(x,y)u(y)f(y)\, dy, \quad x > 0,$$

удовлетворяет условию $k(x,y) \approx k(x, \frac{1}{2}x)$, $0 \le y \le \frac{1}{2}x$. Определим для $n \in \mathbb{N}$, $0 \le j < n$, $k \in \mathbb{Z}$ $\Delta_{k,j}\colon = [a_{k,j},\, a_{k,j+1})$, $\Delta_k\colon = [2^k,\, 2^{k+1})$,

$$\sigma_{k,n}(y)\colon = \sum_{i=k-1}^{k}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\mathrm{sign} u(y)}{|\Delta_{i,j}|^{\frac{1}{p}}}\chi_{\Delta_{i,j}}(y),$$

$$\rho_{k,n}(x) := \int_{2^{k-1}}^{x} k(x,y)u(y)\sigma_{k,n}(y)\,dy, \quad x \in \Delta_k.$$

Тогда $\mathbb{R}^+ = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Delta_k$, $\Delta_k = \bigcup_{j=0}^{n-1} \Delta_{k,j}$, $\|\sigma_{k,n}\|_p^p = 2n$.

**Теорема 2.** *Пусть* $1 < p \le q < \infty$. *Тогда* $\|K\|_{L^p\to L^q} \approx A_0 + A_1$, *где*

$$A_0 := \sup_{t>0} \left( \int_t^{\infty} |v(x)k(x, \tfrac{1}{2}x)|^q \,dx \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_0^{\frac{t}{2}} |u(x)|^{p'} \,dx \right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$A_1 := \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\in\mathbb{Z}} \sup_{\Delta_k = \bigcup_{j=0}^{n-1} \Delta_{k,j}} \left\{ n^{-\frac{1}{p}} \left( \int_{\Delta_k} |v(x)|^q \rho_{k,n}^q(x)\,dx \right)^{\frac{1}{q}} \right\}.$$

**Теорема 3.** *Пусть* $0 < q < p < \infty$, $p \ge 1$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$. *Тогда* $\|K\|_{L^p\to L^q} \approx B_0 + B_1$, *где*

$$B_1 = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{\mathbb{R}^+ = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \bigcup_{j=0}^{n-1} \Delta_{k,j}} \left\{ n^{-\frac{1}{p}} \left( \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left( \int_{\Delta_k} |v(x)|^q \rho_{k,n}^q(x)\,dx \right)^{\frac{r}{q}} \right)^{\frac{1}{r}} \right\};$$

$$B_0 = \Big( \int_0^{\infty} \Big( \int_t^{\infty} |v(x)k(x, \frac{1}{2}x)|^q \,dx \Big)^{\frac{r}{p}} \Big( \int_0^{\frac{t}{2}} |u(x)|^{p'} \,dx \Big)^{\frac{r}{p'}} |v(t)k(t, \frac{1}{2}t)|^q \,dt \Big)^{\frac{1}{r}},$$

*если* $p > 1$;

$$B_0 = \left( \int_0^{\infty} \left( \int_t^{\infty} |v(x)k(x, \tfrac{1}{2}x)|^q dx \right)^{\frac{q}{1-q}} \left( \operatorname*{ess\,inf}_{0<x<\frac{t}{2}} |u^{-1}(x)| \right)^{\frac{q}{q-1}} |v(t)k(t, \tfrac{1}{2}t)|^q dt \right)^{\frac{1-q}{q}},$$

*если* $p = 1$.

Теоремы 2 и 3, в частности, дают критерий ограниченности интегралов Римана-Лиувилля $T_\alpha$ при $0 < \alpha < 1$. Случаи $\alpha = 1, \alpha > 1$ рассмотрены в [5] и [6,7], соответственно.

Работа поддержана грантом РФФИ 97–01–00604 и Мин. Образования РФ 10.98 ГР.

**References**

[1] D. E. Edmunds, P. Gurka, L. Pick. Compactness of Hardy type integral operators in weighted Banach function spaces. *Studia Math.*, **109**:73–90, 1994.

[2] E. N. Lomakina, V. D. Stepanov. On the compactness and approximation numbers of Hardy-type integral operators in Lorentz spaces. *J. London Math. Soc.*, **53**:369–382, 1996.

[3] A. Meskhi. Solution of some weight problems for the Riemann-Liouville and Weyl operators. *Georgian Math. J.*, **5**:565–574, 1998.

[4] D. V. Prokhorov. On the boundedness and compactness of a class of integral operators. *J. London Math. Soc.*, (в печати).

[5] В. Г. Мазья. *Пространства С. Л. Соболева.* Л.: Издательство ЛГУ, 1985.

[6] F. J. Martín-Reyes, E. Sawyer. Weighted inequalities for Riemann-Liouville fractional integrals of order one and greater. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **106**:727–733, 1989.

[7] V. D. Stepanov. *Two-weighted estimates for Riemann-Liouville integrals.* Report N 39, Ceskoslovenska Akademie Ved, Matematicky Ustav, Praha, 1988.