Международная конференция по анализу и геометрии

30 авг. – 3 сент. 1999 г., Новосибирск, Россия

Тезисы докладов

Rodionov, Eugene D.
Slavskii, Victor V.

On the Conformal Class of a Metric with 2-Planes of Zero Curvature on a Compact Riemannian Manifold

Родионов Евгений Дмитриевич, *Барнаульский государственный педагогический университет, Россия*;
email: EugeneRodionov@bspu.secna.ru
Славский Виктор Владимирович, *Алтайский государственный университет*; *email*: slav@math.dcn-asu.ru

О конформном классе метрики с площадками нулевой кривизны на компактном римановом многообразии

Теорема 1. *Пусть на компактном многообразии M^n определена риманова метрика $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ имеющая в каждой точке $x \in M^n$ двумерную площадку нулевой секционной кривизны. Тогда для любой конформной деформации метрики $d\tilde{s}^2 = e^{-2\sigma(x)} g_{ij} dx^i dx^j$, найдется точка и двумерная площадка в этой точке имеющая неположительную секционную кривизну, а также точка и двумерная площадка в этой точке имеющая неотрицательную секционную кривизну.*

Следствие 1. *Если метрика, конформно-эквивалентная левоинвариантной метрике, на компактной группе Ли имеет положительную секционную кривизну, то группа Ли локально изоморфна группе $SU(2)$.*

Следствие 2. *Пусть многообразие (M^n, ds^2) есть прямое произведение компактных римановых многообразий. Тогда, для любой метрики $d\tilde{s}^2$ конформно эквивалентной метрике ds^2, найдется точка и двумерная площадка в этой точке имеющая неположительную секционную кривизну, а также точка и двумерная площадка в этой точке имеющая неотрицательную секционную кривизну.*

Замечание 1. Следствие 2 дает положительное решение проблемы Хопфа для метрик, конформно эквивалентных метрике прямого произведения.

Определим тензор формулой

$$A_{ij} = \frac{1}{n-2}\left(R_{ij} - \frac{Rg_{ij}}{2(n-1)}\right),$$

где R_{ij} — тензор Риччи, R — скалярная кривизна метрики ds^2. Одномерной секционной кривизной назовем величину

$$K(\xi) = \langle A\xi, \xi\rangle = A_{ij}\xi^i\xi^j,$$

где ξ^i — единичный вектор задающий одномерную площадку.

Теорема 2. *Пусть на компактном многообразии M^n определена риманова метрика $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$, одномерная секционная кривизна которой удовлетворяет неравенству*

$$K(\xi) \geq k_0\,(\leq),$$

причем в каждой точке $x \in M$ имеется одномерное направление ξ для которого $K(\xi) = k_0$. Тогда, для любой конформной деформации метрики $d\tilde{s}^2 = e^{-2\sigma(x)}g_{ij}dx^i dx^j$, найдется точка $x_0 \in M$ и одномерное направление в этой точке ξ_0 для которого выполняется неравенство

$$K_{x_0}(\xi_0) \leq k_0 e^{2\sigma(x_0)}\,(\geq).$$

Замечание 2. Если кривизна Риччи неотрицательна и в некоторой точке положительна, то исходная метрика конформно эквивалентна метрике строго положительной кривизны Риччи [1].

Следствие 3. *Если метрика, конформно-эквивалентная левоинвариантной метрике на компактной группе Ли, имеет неотрицательную одномерную секционную кривизну, то алгебра Ли этой группы типа K* [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 99–01–00543, 96–15–96291). Данные исследования поддержаны грантовым центром при Санкт-Петербургском государственном университете (код проекта 97–0–1.3–63).

References

[1] Paul Ehrlich. Conformal deformations and extremal path in space of Riemannian metrics. *Math. Nachr.*, **72**:137–140, 1977.

[2] Goto Morikuni, Ulsu Kagumi. Lie groups with left invariant metrics of nonnegative curvature. *Memoirs of the Faculty of Science, Kyushi University*, **35**(1):33-38, 1981.