Международная конференция по анализу и геометрии

30 авг. – 3 сент. 1999 г., Новосибирск, Россия

Тезисы докладов

Romanov, Alexandre S.

Capacity and Moduli Associated with Sobolev Classes on a Metric Space.

Романов Александр Сергеевич, *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия*;
email: asrom@math.nsc.ru

Емкость и модули, связанные с соболевскими классами на метрических пространствах

Пусть (X,d) — метрическое пространство с конечным диаметром, μ — конечная борелевская мера, $1 < p \leq \infty$. Следуя работе [1], соболевское пространство $L^1_p(X,d,\mu)$ определим условием:

$$L^1_p(X,d,\mu) = \{f : X \to R \mid \exists E \subset X, \mu(E) = 0, \exists g \in L_p(\mu),$$

$$|f(x) - f(y)| \leq d(x,y)(g(x) + g(y)), \quad \forall x, y \in X \setminus E\}.$$

Емкость, связанная с пространством $L^1_p(X,d,\mu)$, определяется естественным образом и обладает стандартными свойствами обобщенной емкости в смысле Шоке. Однако получение оценок вариационной емкости даже для концентрического сферического кольца оказывается не столь тривиальным как в евклидовом случае. Поэтому представляется полезным установление взаимосвязи между емкостью и модулями различных семейств шаров.

Будем говорить, что цепочка шаров

$$\{B_i = B(x_i, r_i)\}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n,$$

соединяет непересекающиеся компакты $K_0, K_1 \subset X$, если $x_0 \in K_0$, $x_n \in K_1$ и $B_i \cap B_{i+1} \neq \emptyset$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Цепочку шаров, соединяющую компакты K_0 и K_1, будем называть двоичной, если $\mu(B_i \cup B_{i+1}) \leq 2\mu(B_i \cap B_{i+1})$. Среднее значение интегрируемой функции g на шаре B_i обозначим через g_{B_i}. Введем три семейства допустимых функций:

$M_1 = \{g \in L_p(\mu) \mid \exists \delta = \delta(g) > 0,$ что $\sum_{i=0}^{n} r_i g_{B_i} \geq 1$ для всякой двоичной цепочки шаров с $r_0, r_n < \delta$, соединяющей K_0 и $K_1\}$,

$M_2 = \{g \in L_p(\mu) \mid \sum_{i=0}^{n} r_i g_{B_i} \geq 1$ для произвольной цепочки шаров, соединяющей K_0 и $K_1\}$.

Будем говорить, что функция g принадлежит семейству M_0, если $g \in L_p(\mu)$ и существуют множество $E \subset X, \mu(E) = 0$ и окрестности $U_0 \supset K_0, U_1 \supset K_1$ такие, что неравенство

$$\sum_{i=0}^{n-1} d(x_i, x_{i+1})(g(x_i) + g(x_{i+1})) \geq 1$$

выполняется для любого набора точек $\{x_i\} \subset X \setminus E, x_0 \in U_0, x_n \in U_1$.

Соответствующие модули определим равенством

$$\mathrm{Mod}_i(K_0, K_1) = \inf_{M_i} ||g \mid L_p||^p.$$

Если мера μ удовлетворяет "условию удвоения": $\mu(B(x, 2r)) \leq C_d \mu(B(x, r))$, то существуют постоянные C_1 и C_2 такие, что

$$C_1 \mathrm{Mod}_1(K_0, K_1) \leq \mathrm{Mod}_0(K_0, K_1) = \mathrm{cap}_p(K_0, K_1) \leq C_2 \mathrm{Mod}_2(K_0, K_1).$$

В случае, когда мера сферического кольца $K_\varepsilon = B(x, r + \varepsilon) \setminus B(x, r)$ допускает оценку $\mu(K_\varepsilon) \sim \frac{\varepsilon}{r} \mu(B(x, r))$, удается получить некоторые оценки вариационной емкости, аналогичные известным в евклидовом случае, при этом роль размерности пространства играет показатель $n = \log_2 C_d$, где C_d — постоянная из "условия удвоения".

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 99–01–0051).

References

[1] P. Hajłasz. Sobolev spaces on an arbitrary metric spaces. *Potential Analysis.* **5**(4):403–415, 1996.