Международная конференция по анализу и геометрии

30 авг. – 3 сент. 1999 г., Новосибирск, Россия

Тезисы докладов

Rylov, Anatolii I.

Influence of Compressibility on the Geometrical Properties of Potential Gas Flows

Рылов Анатолий Игоревич, *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия*;
email: rylov@math.nsc.ru

Влияние сжимаемости на геометрические свойства потенциальных течений газа

Параметрами плоского потенциального течения газа являются число Маха M, которое характеризует сжимаемость (в несжимаемых течениях $M = 0$), давление $p = p(M)$, модуль вектора скорости $q = q(M)$, угол наклона вектора скорости θ, а также углы W, ϕ, ω, которые, соответственно, характеристика, изобара (линия $p = \mathrm{const}$) и изоклина (линия $\theta = \mathrm{const}$) образуют с вектором скорости. Угол Маха $W = \arcsin M^{-1}$ определен лишь при $M \geq 1$. Данное течение описывается следующей однородной системой:

$$(1 - M^2)q_L + q\theta_N = 0, \quad q_N - q\theta_L = 0, \tag{1}$$

где нижние индексы L и N обозначают дифференцирование, соответственно, вдоль линии тока и по ее левой нормали.

Для несжимаемых течений после очевидной замены $\lambda = \ln q$ система (1) сводится к системе типа Коши–Римана.

Установлен ряд новых фактов, характеризующих взаимосвязь между указанными параметрами как в дозвуковой ($M < 1$), так и сверхзвуковой ($M \geq 1$) областях.

Теорема 1. *Углы ϕ, ω, а при $M \geq 1$, и W связаны соотношением*

$$\tan\phi\tan\omega = (M^2 - 1)^{-1} = \tan^2 W,$$

которое при $M \geq 1$ допускает наглядную формулировку:

Тангенс угла Маха W есть среднее геометрическое тангенсов углов ϕ и ω, образуемых изобарой и изоклиной с вектором скорости.

Теорема 2. *Для угла между изобарой и изоклиной, равного $\phi - \omega$, имеет место соотношение*

$$(1 - M^2)\sin^2(\phi - \omega) = (1 - M^2 \sin^2 \phi)(1 - M^2 \sin^2 \omega),$$

которое при $M \leq 1$ может быть заменено достаточно простым неравенством

$$\cos^2(\phi - \omega) \leq M^2,$$

демонстрирующим влияние сжимаемости (числа Маха M) на степень отклонения сетки изобар и изоклин от ортогональной, реализующейся при $M = 0$.

Теорема 3. *Вся область плоского потенциального течения, как при $M \leq 1$, так и при $M \geq 1$, состоит лишь из областей общего типа F^+, F^-, определяемых знаком якобиана $J = p_x\theta_y - p_y\theta_x$, и областей F^0, содержащих простые волны и (или) течения с постоянными параметрами, в которых $J = 0$. Внутри каждой из областей F^+ и F^- сетка изобар и изоклин является невырожденной (отсутствует касание изобар и изоклин), функции q и θ (также как p и θ и M и θ) обладают свойством монотонности, согласно которому каждая из них монотонна вдоль линии уровня другой функции, и, как следствие, функции q, p, M и θ удовлетворяют принципу максимума. В частности, одна из областей F^+ включает в себя всю область дозвукового течения (при $M < 1$, как известно, $J \geq 0$) и сопряженную с ней через звуковую линию сверхзвуковую подобласть, в которой $J > 0$. Указанная эллиптико-гиперболическая область обладает свойствами, характерными для эллиптических областей, а именно — свойством монотонности и принципом максимума функций q, p, M и θ и невырожденностью сетки изобар и изоклин.*

Границами между областями F^+ и F^- являются характеристики, в каждой точке которых имеет место касание изобар, изоклин и характеристик противоположного семейства, и, как следствие, вдоль которых $J = 0$, либо характеристики, по обе стороны которых якобиан J имеет разный знак.

Также рассмотрены плоские вихревые течения с зависимыми переменными p и θ, осесимметричные потенциальные течения с зависимыми переменными $\alpha = u$ и $\beta = y\rho v$ (x, y — цилиндрические координаты, u и v — компоненты вектора скорости, ρ — плотность) и плоские потенциальные течения с зависимыми переменными U и V, являющимися рациональными функциями продольной F и поперечной G компонент вектора ускорения:

$$U = -\rho q^3 F(G^2 + (1 - M^2)F^2)^{-1}, \qquad V = q^3 G(G^2 + (1 - M^2)F^2)^{-1}.$$

Перечисленные течения описываются следующими системами уравнений:

$$(1 - M^2)p_L - \rho q^2 \theta_N = 0, \quad p_N + \rho q^2 \theta_L = 0, \tag{2}$$

$$y\rho(1 - M^2)\alpha_L + \beta_N = 0, \quad y\rho\alpha_N - \beta_L = 0, \tag{3}$$

$$(1 - M^2)U_L + \rho V_N = 0, \quad U_N - \rho V_L = 0. \tag{4}$$

Практически полная идентичность систем (1–4) предопределяет перенос результатов теорем 1 и 2, а частично и теоремы 3 на решения и линии уровня решений систем (2–4).

Приведенные результаты существенно расширяют возможности метода линий уровня, ранее развитого для дозвуковых плоских течений (А. А. Никольский и Г. И. Таганов, ПММ 1946, А. И. Рылов, ПММ 1991–99).

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 97–01–00833).