Международная конференция по анализу и геометрии

30 авг. – 3 сент. 1999 г., Новосибирск, Россия

Тезисы докладов

Shmyrev, Gennadii A.

An Integral Representation for a Class of Hypoelliptic Operators

Шмырев Геннадий Александрович, *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия*

Интегральное представление для одного класса гипоэллиптических операторов

Рассматривается вопрос о представлении функций через результат применения к ним некоторых дифференциальных операторов $L(D_x) = \sum_{\gamma\in\Gamma_P} a_\gamma D^\gamma$. Здесь $\Gamma = \Gamma_P$ — определенный конечный набор мультииндексов $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, $D^\gamma = D_1^{\gamma_1} \ldots D_n^{\gamma_n}$, $D_j = -i\partial/\partial x_j$. Известно, что дифференциальные свойства оператора $P(D_x)$ во многом определяются алгебраическими свойствами многочлена $P(\xi) = \sum_{\gamma\in\Gamma_P} a_\gamma \xi^\gamma$, $\xi^\gamma = \xi_1^{\gamma_1} \cdots \xi_n^{\gamma_n}$, который получается, если в операторе $P(D)$ заменить D_j на ξ_j, $j = 1, \ldots, n$. Далее полагаем, что коэффициенты $a_\gamma, \gamma \in \Gamma_P$, рассматриваемого оператора $P(D)$ (многочлена $P(\xi)$) являются вещественными числами. В предположении, что многогранник Ньютона или характеристический многогранник $N(\Gamma_P)$ многочлена $P(\xi)$ [1, 2] (т. е. выпуклая оболочка множества $\Gamma_P \bigcup\{0\}$) удовлетворяет некоторым геометрическим условиям, получено интегральное представление

$$u(x) = \Pi u(x)$$
$$+ \lim_{h\to 0} \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_h^{h^{-1}} \int\limits_{R_n} \int\limits_{R_n} e^{(x-y)\xi} e^{-(vP(\xi))^k} k(vP(\xi))^{k-1} P(D_y) u(y)\, d\xi\, dy\, dv,$$

аналогичное представлению С. В. Успенского [3], построенному им для квазиэллиптических операторов $P(D)$. Здесь k — некоторое достаточно большое четное число, Πu — проектор на некоторое пространство многочленов (на некоторое подпространство ядра оператора $P(d)$), определяемое налагаемыми на функцию $u(x)$ требованиями поведения на бесконечности. В частности, если $u(x) \to 0$ при

$|x| \to \infty$, или $u \in L_p(R_n)$, то $\Pi u(x) \equiv 0$.

Заметим, что полученное представление может быть использовано для изучения классов локально суммируемых функций, имеющих конечную полунорму $\sum_{\gamma\in\Gamma} \|D^\gamma u\|_p$, где $D^\gamma u$ — обобщенные производные функции $u(x)$, Γ — некоторый конечный набор мультииндексов, в частности, для исследования поведения функций данных классов на бесконечности, для изучения рассмотренной В. П. Ильиным задачи нахождения мультииндексов $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n$ и числа $q \geq p$ таких, что справедливо неравенство $\|D^\rho u\|_q \leq c \sum_{\gamma\in\Gamma} \|D^\gamma u\|_p$.

Применение дифференциальных операторов при исследовании функциональных пространств объясняется, как отмечал С. Л. Соболев в своей монографии "Введение в теорию кубатурных формул", тем "что оно позволяет воспользоваться хорошо разработанными методами теории уравнений в частных производных". Эта же идея была применена Ю. Г. Решетняком, использовавшим системы дифференциальных уравнений первого порядка для получения интегрального представления через операторы с условием полной интегрируемости [4], и т. д.

Для того, чтобы сформулировать условия на рассматриваемый класс многочленов $P(\xi)$ (операторов $P(D)$)), введем, следуя работам [1, 2], следующие понятия и обозначения: Назовем главными гранями многогранника $N(\Gamma_P)$ те его $(n-1)$-мерные грани Γ_i^{n-1}, $i = 1, \dots, N_{n-1}$, внешние нормали $m^{(i)}$ к которым содержат хотя бы одну положительную координату. Точки многогранника $N(\Gamma_P)$, лежащие на главных гранях (замкнутых), будем называть главными точками. Полином $\pi P(\xi) = \sum_{\gamma\in\pi\Gamma_P} a_\gamma \xi^\gamma$, где $\pi\Gamma_P$ обозначает множество точек из Γ_P, являющихся главными, назовем главной частью полинома $P(\xi)$. Будем предполагать, что полином $P(\xi)$ удовлетворяет следующим условиям: 1) $P(\xi) = \pi P(\xi)$, т. е. совпадает со своей главной частью; 2) $P(\xi) > 0$ при $\xi \neq 0$; 3) многогранник $N(\Gamma_P)$ — полный, т. е. точка $0 = (0, \dots, 0$ не является главной; 4) многочлен $P(\xi)$ невырожденный, т. е. многочлены $P_{\Gamma_i^k}(\xi) = \sum_{\gamma\in\Gamma_i^k} a_\gamma \xi^\gamma$, где Γ_i^k обозначает i-ю k-мерную грань многогранника $N(\Gamma_p)$, могут обращаться в нуль лишь на координатных гиперплоскостях. Как показано в [1, 2], следствием условий 1)– 4) является гипоэллиптичность полинома $P(\xi)$ и двусторонняя оценка $c_1 \sum_{\gamma\in V_P} |\xi^\gamma| \leq |P(\xi)| \leq c_2 \sum_{\gamma\in V_P} |\xi^\gamma|$, где V_P обозначает множество вершин многогранника $N(\Gamma_P)$, являющихся главными точками.

References

[1] В. П. Михайлов. О поведении на бесконечности одного класса многочленов. *Тр. Мат. ин-та АН СССР*, **91**:59–80, 1967.

[2] Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин. Об одном классе гипоэллиптических полиномов. *Мат. сб.*, **75**(3):400–416, 1968.

[3] С. В. Успенский. О представлении функций, определяемых одним классом гипоэллиптических операторов. *Тр. Мат. ин-та АН СССР*, **117**:292–299, 1972.

[4] Ю. Г. Решетняк. Некоторые интегральные представления дифференцируемых функций. *Сиб. мат. журн.*, **12**(2):420–432, 1971.