Международная конференция по анализу и геометрии

30 авг. – 3 сент. 1999 г., Новосибирск, Россия

Тезисы докладов

Sitnikov, Valerij N.

An Estimate for the Capacity of an Irregular Bounded Domain.

Ситников Валерий Николаевич, *Тюменская архитектурно-строительная академия, Россия*

Оценка емкости нерегулярной ограниченной области.

Рассмотрим пространство Лебега $L_p(G)$ функций, определенных на $G \subset R^n$ с конечной нормой $\|f(x), L_p(G)\| = \left(\int_G |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}$ и пространство Соболева $W_p^l(G)$ функций, определенных на G с конечной нормой $\left\|f(x), W_p^l(G)\right\| = \sum_{i=1}^n \left\|D_i^l f(x), L_p(G)\right\|$, где $D_i^l f(x)$ — обобщенная производная l-го порядка по i-ой переменной x_i.

Определение 1. Функция $f(x)$ из пространства Соболева $W_p^l(G)$ называется *допустимой* для двусвязной области G, если на одной из компонент границы она принимает значение 1, а на другой — 0.

Определение 2. *Емкостью* двусвязной ограниченной области G называется инфимум нормы допустимых для области G функций из пространства Соболева $W_p^l(G)$

$$\mathrm{Cap}(G) = \inf \left\|f(x), W_p^l(G)\right\|.$$

В теории квазиконформных отображений емкость области является важным инвариантом, поэтому вопросу о вычислении емкости и оценках ее сверху и снизу уделяется достаточно много внимания. Однако точное значение емкости двусвязной области (аналитическая формула) существует только для кольцевой области, а оценки получаются из монотонности емкости относительно вложений областей и оценок эллиптических интегралов. При оценке емкости нерегулярных областей (областей, граница которых не удовлетворяет условию Гельдера: нулевые углы и т. д.) подобные оценки малопригодны, т. к. дают слишком большую погрешность. Автором написан пакет программ, который на основе метода конечных элементов позволяет вычислить экстремальную функцию и емкость произвольной двусвязной области с любой наперед заданной точностью. В качестве примера рассматривается двусвязная плоская область G — концентрические квадрат с вырезанным кругом. Для этой области протабулировано значение емкости с малым шагом и построена функция $\mathrm{Cap}(G, x)$ зависимости емкости области $\mathrm{Cap}(G)$ от стороны квадрата x (радиус круга без умаления общности можно полагать равным 1). Автором подобрана оптимальная аналитическая формула и методом наименьших квадратов для функции $\mathrm{Cap}(G, x)$ найдены коэффициенты, соответствующие выбранной точности вычисления -0.00001. Полученная формула имеет вид

$$\mathrm{Cap}(G, x) = \sqrt{\frac{2\pi}{a \cdot \ln x + b}},$$

где x — сторона квадрата, а коэффициенты a, b равны соответственно $a = 1.03237$, $b = 0.00439$. Предложенная методика позволяет подбирать аналитическую формулу для произвольного однопараметрического семейства ограниченных двусвязных областей.