Международная конференция по анализу и геометрии

30 авг. – 3 сент. 1999 г., Новосибирск, Россия

Тезисы докладов

Trotsenko, Dmitrii A.

On Extension of Planar Quasi-Symmetric Maps

Троценко Дмитрий Александрович, *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия*;
email: trotsenk@math.nsc.ru

Продолжение плоских ориентированных квазисимметрий

В известной теореме об устойчивости пространственных квазиконформных отображений замкнутой области Ю. Г. Решетняк доказал возможность аппроксимации мебиусовыми отображениями квазиконформных отображений областей с условием Ф. Джона.
О. Мартио и Дж. Сарвас ввели классы однородных областей. Отображения этих областей после суперпозиции с мебиусовым отображением аппроксимируются подобиями на каждом шаре. Отсюда следует возможность квазиконформного продолжения отображения на все пространство. Геометрические свойства квазиконформных отображений послужили толчком для исследования квазисимметрических отображений, введенных финскими математиками, и h-подобий, введенных автором.

Пусть A, A' — метрические пространства с метрикой $|x-y|$, $f : A \to A'$ — инъективное отображение.

Определения. Пусть $\eta : [0,\infty) \to [0,\infty)$ — непрерывная неубывающая функция. Отображение f называется *η-квазисимметрией* (η-QS), если для любой тройки $x, y, z \in A$, $x \neq z$, выполнено неравенство $\dfrac{|f(x)-f(y)|}{|f(x)-f(z)|} \le \eta\left(\dfrac{|x-y|}{|x-z|}\right)$. Если $\eta(t) = M\max\{t^\alpha, t^{1/\alpha}\}$, то f называется *(M,α)-квазисимметрией* ($(M,\alpha)-QS$).

Пусть $A, A' \in R^n$. Отображение f назовем *h-подобием*, если по любому шару $B(x_0, r)$ можно указать подобие $T = T_{x_0,r} : R^n \to R^n$ такое, что $|Tf(x) - x| \le hr$ для всех $x \in A \cap B(x_0, r)$. Отображение f назовем *ориентированным h-подобием* ($h-OS$), если все подобия $T_{x_0,r}$ можно выбрать одинаково ориентированными.

Рассмотрим отображения $F : R^n \to R^n$. Хорошо известно, что

классы
1. K-квазиконформных отображений при K, близких к 1,
2. (M,α)-QS при M и α, близких к 1,
3. h-OS при h, близких к 0
асимптотически эквивалентны. Поэтому в задачах продолжения отображений $f : A \to R^n$ до квазиконформных отображений продолжаемые отображения также должны быть (M,α)-QS и h-OS.

Метрическое пространство A назовем λ-*относительно связным* (λ-RC), если любые пары (x,x') и (y,y') различных точек из A можно соединить конечной последовательностью
$x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N\}$ такой, что $x = x_0$, $x' = x_1$, $y = x_{N-1}$, $y' = x_N$, причем $\lambda^{-1} \le \frac{|x_{i-1}-x_i|}{|x_i-x_{i+1}|} \le \lambda$ при $i = 1,\ldots,N-1$.

Теорема 1. *Пусть $A \subset R^2$ — λ-RC. Тогда найдутся $h_0 = h_0(\lambda)$ и $C = C(\lambda)$ такие, что любое h-OS отображение $f : A \to R^2$ при $h \le h_0$ продолжается до $F : R^2 \to R^2$, являющегося Ch-OS (следовательно, K-квазиконформным, $K = (1+h)/(1-h)$).*

Теорема 2 (обратная). *Если $A \subset R^n$ не является λ-RC ни при каком $\lambda < \infty$, то по любому $h > 0$ можно указать $f : A \to R^n$, являющееся h-OS, но не являющееся (M,α)-QS ни при каких $M,\alpha < \infty$ и, следовательно, не продолжающееся до квазиконформного отображения пространства.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований. Код проекта 99–01–00607.