Международная конференция по анализу и геометрии

30 авг. – 3 сент. 1999 г., Новосибирск, Россия

Тезисы докладов

Turchaninov, Vladimir Yu.

Some Properties of Harmonic Mappings of Plane Domains

Турчанинов Владимир Юрьевич, *Тверской государственный университет, Россия*; *email*: a000110@tversu.ru

Некоторые свойства гармонических отображений плоских областей

Пусть $h(t)$ — действительная квазисимметрическая функция на $\mathbb{R}$, нормированная условиями $h(\pm\infty) = \pm\infty$, $\omega = (w-i)/(w+i)$ — преобразование Кэли верхней полуплоскости $H \subset \mathbb{C}_w$ на единичный круг $\Delta \subset \mathbb{C}_\omega$. Интеграл Пуассона

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\theta(t)} \frac{\operatorname{Im} z}{|z-t|^2}\, dt,$$

согласно [1], [2] является гармоническим квазиконфорным гомеоморфизмом полуплоскости H на круг Δ с граничным гомеоморфизмом $e^{i\theta(t)} = \frac{h(t)-i}{h(t)+i}$. Функция $f(z) = i\frac{1+F(z)}{1-F(z)}$ представляет квазиконформный гармонический относительно метрики $ds^2 = 4|w+i|^{-4}|dw|^2$ автоморфизм полуплоскости H с граничным гомеоморфизмом $h(t)$. Справедлива

Теорема 1. *Если квазисимметрическая функция $h(t)$ имеет конечное число точек разрыва производной, то точные значения коэффициентов квазиконформности отображений F и f можно вычислить по формуле $K(F) = K(f) = (1+k)(1-k)$, где*

$$k = ||\mu_F|\mathbb{R}||_\infty$$

$$= \left|\left|\left(iH\left(\frac{h'}{h-i}\right) - \frac{h'(x)}{(h(x)-i)^2}\right) \Big/ \left(iH\left(\frac{h'}{h+i}\right) - \frac{h'(x)}{(h(x)+i)^2}\right)\right|\right|_\infty,$$

здесь

$$H(\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t-x} dt$$

— *одномерное преобразование Гильберта функции* $\varphi(t)$ (*интеграл понимается в смысле главного значения по Коши*).

Следствием этой теоремы является

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *прямая* $\partial H = \mathbb{R}$ *представима как объединение замыканий дуг граничных траекторий и граничных ортогональных траекторий квадратичного дифференциала* $F_z \overline{F_{\overline{z}}} dz^2$ *в том и только том случае, когда*

$$v.p. \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cos(\theta(t) - \theta(x))\theta'(t)dt}{t - x} = 0$$

для почти всех $x \in \mathbb{R}$.

References

[1] В. Г. Шеретов. Экстремальные квазиконформные отображения с заданным граничным гомеоморфизмом. В кн.: *Метрические вопросы теории функций.* Киев, 1980. С. 140–146.

[2] С. Ю. Граф. О квазиконформности гармонического продолжения квазисимметрической функции. В кн.: *Применение функционального анализа в теории приближений.* Тверь: Тверск. гос. ун-т, 1998. С. 40–45.

[3] С. Ю. Граф. *Квазиконформные и гармонические экстремали функционалов на гомотопических классах деформаций и вложений римановых поверхностей.* Дисс. …канд. физ.-мат. наук. Тверь, 1998.