Международная конференция по анализу и геометрии

30 авг. – 3 сент. 1999 г., Новосибирск, Россия

Тезисы докладов

Vasil'chik, Michael Yu.

On the Dirichlet Problem for the Biharmonic Equation in a Plane Domain with a Cusp

Васильчик Михаил Юлианович, *Новосибирский государственный технический университет, Россия*; *email*: `chm@first.nstu.ru`

О задаче Дирихле для бигармонического уравнения в плоской области с пиком

Пусть ζ — положительная измеримая на интервале (a,b) функция. Для $p \in [1,\infty)$ обозначим через $L_{p,\zeta}(a,b)$ множество измеримых на (a,b) функций f, для которых конечна норма

$$\|f\|_{L_{p,\zeta}(a,b)} = \left\{ \int_a^b |f(t)|^p \zeta(t)\, dt \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Если функция f определена на интервале (a,b), то обозначим через $\Delta(f,s,t)$ величину, равную разности $f(s)-f(t)$, если $[s,t] \subset (a,b)$, и равную нулю в противном случае. Пусть $\beta > 0$ — нецелое число, $m = [\beta]$ — целая часть β, $r = \beta - m$. Через $B^{\beta}_{p,\zeta}(a,b)$ обозначим класс функций, имеющих на (a,b) обобщенные производные $f^{(j)} = \frac{d^j f}{dx^j}$, $j = 0,1,2,\ldots,m$, для которых конечна величина

$$\|f\|_{B^{\beta}_{p,\zeta}(a,b)} = \sum_{j=0}^{m} \|f^{(j)}\|_{L_{p,\zeta}(a,b)} + \left\{ \int_a^b ds \int_0^{\zeta(s)} \frac{|\Delta(f^{(m)}, s+\tau, s)|^p}{\tau^{rp+1}}\, d\tau \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Если $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ — кривая, задаваемая параметризацией

$$\lambda : t \to (x(t), y(t)), \qquad a < t < b,$$

$x,\ y \in C^{m+1}([a,b])$, то полагаем $f \in B^{\beta}_{p,\zeta}(\Gamma)$, если $f \circ \lambda \in B^{\beta}_{p,\zeta}(a,b)$.

Пусть $\varphi \in C^4([0,1])$ — функция, для которой выполнены условия $\lim_{x\to+0} \varphi^{(j)}(x) = 0$, $j = 0,1$, $\varphi''(x) > 0$ при $x \in (0,1)$. Рассмотрим область

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\, 0 < y < \varphi(x)\}.$$

Через Γ_0 и Γ_1 обозначим части границы G: $\Gamma_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\, y = 0\}$, $\Gamma_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\, y = \varphi(x)\}$. Через n_i обозначим единичный вектор внутренней нормали, определенный на Γ_i, $i = 0,1$. Пусть на Γ_i заданы функции $\mu_{(i)j}$, $i = 0,1$, $j = 0,1$, такие, что

$$\mu_{(i)j} \in B_{2,\varphi}^{\frac{7}{2}-j}(\Gamma_i), \quad i = 0,1, \quad j = 0,1, \tag{1}$$

$$\Lambda = \sum_{k=0}^{1} \left\{ \sum_{i=0}^{1} \|\mu_{(i)k}\|_{B_{2,\varphi}^{\frac{7}{2}-k}(\Gamma_i)} + E_k \right\} < \infty, \tag{2}$$

где $E_k = \sum_{i=0}^{3-k} \|\varphi^{k+i-4}\mathfrak{M}_{k,i}\|_{L_{2,\varphi}(0,1)}$. Для $0 \le k+i \le 3$ величина $\mathfrak{M}_{k,i}$ определена в [1] и линейно зависит от функций $\mu_{(l)j}$ и их производных. Отметим, что величина Λ из (2) появляется при описании следов функций из пространств Соболева на границе плоской области с пиком (см. [1]).

Рассмотрим в области G задачу Дирихле

$$\Delta^2 u \equiv \Delta(\Delta u) = f \in L_2(G), \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial n_i^k}\right|_{\Gamma_i} = \mu_{(i)k}, \quad i,k = 0,1. \tag{4}$$

Мы считаем, что функции f и $\mu_{(i)k}$ равны нулю при $x > x_0$, где $x_0 \in (0,1)$ — некоторое фиксированное число.

Теорема. *Если функции $\mu_{(i)k}$, $i,k = 0,1$, удовлетворяют условиям (1)–(2), то краевая задача (3)–(4) имеет единственное решение u в пространстве Соболева $W_2^4(G)$, причем справедлива оценка*

$$\|u\|_{W_2^4(G)} \le C\left[\|f\|_{L_2(G)} + \Lambda + \|u\|_{L_2(G)}\right].$$

References

[1] М. Ю. Васильчик. Обратимая характеристика следов функций из пространств Соболева на кусочно-гладкой границе плоской области. В кн.: *Пространства Соболева и смежные вопросы анализа*. Новосибирск: Изд-во Института математики, 1996. С. 40–57.