Международная конференция по анализу и геометрии

30 авг. – 3 сент. 1999 г., Новосибирск, Россия

Тезисы докладов

Vorobjeva, Ekaterina V.

On Stability of Solutions of the Mixed Problem for a Hyperbolic System in the Plane

Воробьева Екатерина Валентиновна, *Омский государственный технический университет, Россия*

Об устойчивости решений смешанной задачи для гиперболической системы на плоскости

Пусть $A(x)$ — гладкая матрица-функция вида

$$A(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) P_k,$$

где $a_1 > \ldots > a_m > 0 > a_{m+1} > \ldots > a_n$, $P_k^2 = P_k$, $P_k^* = P_k$, $\sum P_k = I$. Обозначим $P_+ = \sum_{k \le m} P_k$, $P_- = I - P_+$. Рассмотрим в полосе $\Pi = \{(x,t) : 0 \le x \le 1, t \ge 0\}$ краевую задачу

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} + A(x)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x)u + f(x,u) = 0, & u(x,0) = h(x), \\ (P_+ - \Gamma_0(t))\, u(0,t) = (P_- - \Gamma_1(t))\, u(1,t) = 0. & \end{array} \right. \tag{1}$$

Здесь $f, h, B, \Gamma_0, \Gamma_1$ — гладкие векторы и матрицы, при этом h удовлетворяет условиям согласования первого порядка,

$$|f| \le \varepsilon |u|^2 \ \ (\varepsilon > 0), \ P_+\Gamma_0 = \Gamma_0, \ P_-\Gamma_1 = \Gamma_1, \ \ \Gamma_0 P_+ = \Gamma_1 P_- = 0.$$

Пусть $\|\cdot\|$ — норма в пространстве $L^2[0,1]$. Будем говорить, что решение $u = 0$ задачи (1) (отвечающее $h = 0$) экспоненциально устойчиво, если существует такое $\Delta > 0$, что при $\|h\| \le \Delta$ соответствующее решение $u(x,t)$ определено при $t > 0$ и

$$\|u(x,t)\| \le \mu e^{-\nu t} \|h\| \ \ (\mu, \nu = \text{const} > 0; \ \ t > 0).$$

Построим по произвольно фиксированной матрице $G(x)$ со свойствами

$$G \in C^1(\Pi), \ \ GA = AG, \ \ G^* = G, \ \ m_1 I \le G \le m_2 I \ \ (m_k > 0), \tag{2}$$

матрицы

$$F = (GA)'_x - GB - B^*G, \quad F_1 = P_-(GA + \Gamma_0^* GA\Gamma_0)_{x=0} P_-,$$

$$F_2 = P_+(GA + \Gamma_1^* GA\Gamma_1)_{x=1} P_+.$$

Теорема. *Пусть существует матрица G вида (2) такая, что*

$$F \le -mI \quad (m > 0), \quad F_1 \le 0, \quad F_2 \ge 0.$$

Тогда решение $u = 0$ задачи (1) экспоненциально устойчиво.

Этот результат использовался для исследования устойчивости каталитического процесса в химическом реакторе с учетом внутреннего теплообмена из [2]. Получено условие экспоненциальной устойчивости, что дополняет результаты работы [2], в которой исследовалась данная задача.

References

[1] Т. И. Зеленяк. О стационарных решениях смешанных задач, возникающих при изучении некоторых химических процессов. *Дифференц. уравнения*, **2**(2):205–213, 1966.

[2] М. М. Лаврентьев, Н. А. Люлько. Повышение гладкости решений некоторых гиперболических задач. *Сиб. мат. журн.*, **38**(1):109–124, 1997.