

# Normex, новый метод оценки распределения объединённых рисков с тяжёлыми хвостами

Прокопенко Е.И.,  
совместно с M. Kratz (ESSEC Business School, Paris)

15 июня 2022

# Содержание

◆ МОТИВАЦИЯ

◆ NORMEX МЕТОД

◆ MRV-NORMEX МЕТОД

## Содержание

- ◆ МОТИВАЦИЯ
- ◆ NORMEX МЕТОД
- ◆ MRV-NORMEX МЕТОД

# (идейная) ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

$$S_n := \xi_1 + \cdots + \xi_n,$$

где  $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$  – неотрицательные независимые одинаково распределенные с.в. с абсолютно-непрерывным распределением.

# (идейная) ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

$$S_n := \xi_1 + \dots + \xi_n,$$

где  $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$  – неотрицательные независимые одинаково распределенные с.в. с абсолютно-непрерывным распределением.



Рис.: Траектория индекса S&P500 ( $X_n$ ).

# (идейная) ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

$$S_n := \xi_1 + \dots + \xi_n,$$

где  $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$  – неотрицательные независимые одинаково распределенные с.в. с абсолютно-непрерывным распределением.



Рис.: Траектория индекса S&P500 ( $X_n$ ).

## Пример №1.

$$S_n = \ln X_n = \ln X_1 + (\ln X_2 - \ln X_1) + \dots + (\ln X_n - \ln X_{n-1}).$$

# (идейная) ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

$$S_n := \xi_1 + \cdots + \xi_n,$$

где  $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$  – неотрицательные независимые одинаково распределенные с.в. с абсолютно-непрерывным распределением.

# (идейная) ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

$$S_n := \xi_1 + \cdots + \xi_n,$$

где  $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$  – неотрицательные независимые одинаково распределенные с.в. с абсолютно-непрерывным распределением.

## Пример №2.

$(\xi_1, \dots, \xi_n)$  – риски от инвестиционного портфеля  $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ .

$S_n$  – суммарный риск портфеля  $\pi$ .



# ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ О НОРМАЛЬНОСТИ

# ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ О НОРМАЛЬНОСТИ

## Теорема (ЦПТ)

Если  $0 < D\xi < \infty$ , то при  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{S_n - nE\xi}{\sqrt{nD\xi}} \xrightarrow{d} \eta \sim \mathcal{N}_{0,1}.$$

# ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ О НОРМАЛЬНОСТИ

## Теорема (ЦПТ)

Если  $0 < D\xi < \infty$ , то при  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{S_n - nE\xi}{\sqrt{nD\xi}} \xrightarrow{d} \eta \sim \mathcal{N}_{0,1}.$$

## Теорема (Неравенство Берри-Эссеена)

Если  $0 < \sigma := \sqrt{D\xi} < \infty$ ,  $\rho := E|\xi - E\xi|^3 < \infty$ , то

$$\sup_x |P(S_n < x) - P(nE\xi + \sqrt{n}\sigma \cdot \eta < x)| < \frac{C\rho}{\sigma^3\sqrt{n}}.$$

# ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ О НОРМАЛЬНОСТИ

## Теорема (ЦПТ)

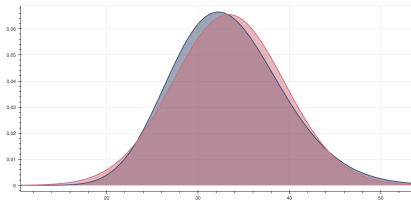
Если  $0 < D\xi < \infty$ , то при  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{S_n - nE\xi}{\sqrt{nD\xi}} \xrightarrow{d} \eta \sim \mathcal{N}_{0,1}.$$

## Теорема (Неравенство Берри-Эссеена)

Если  $0 < \sigma := \sqrt{D\xi} < \infty$ ,  $\rho := E|\xi - E\xi|^3 < \infty$ , то

$$\sup_x \left| P(S_n < x) - P(nE\xi + \sqrt{n}\sigma \cdot \eta < x) \right| < \frac{C\rho}{\sigma^3\sqrt{n}}.$$



# ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ О НОРМАЛЬНОСТИ

## Теорема (ЦПТ)

Если  $0 < D\xi < \infty$ , то при  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{S_n - nE\xi}{\sqrt{nD\xi}} \xrightarrow{d} \eta \sim \mathcal{N}_{0,1}.$$

## Теорема (Неравенство Берри-Эссеена)

Если  $0 < \sigma := \sqrt{D\xi} < \infty$ ,  $\rho := E|\xi - E\xi|^3 < \infty$ , то

$$\sup_x |P(S_n < x) - P(nE\xi + \sqrt{n}\sigma \cdot \eta < x)| < \frac{C\rho}{\sigma^3\sqrt{n}}.$$

# ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ О НОРМАЛЬНОСТИ

## Теорема (ЦПТ)

Если  $0 < D\xi < \infty$ , то при  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{S_n - nE\xi}{\sqrt{nD\xi}} \xrightarrow{d} \eta \sim \mathcal{N}_{0,1}.$$

## Теорема (Неравенство Берри-Эссеена)

Если  $0 < \sigma := \sqrt{D\xi} < \infty$ ,  $\rho := E|\xi - E\xi|^3 < \infty$ , то

$$\sup_x |P(S_n < x) - P(nE\xi + \sqrt{n}\sigma \cdot \eta < x)| < \frac{C\rho}{\sigma^3\sqrt{n}}.$$

## Теорема (Обобщенное неравенство Берри-Эссеена)

Если  $0 < \sigma := \sqrt{D\xi} < \infty$ ,  $E|\xi|^\alpha < \infty$ ,  $\alpha \in [2, 3]$ , то

$$\sup_x |P(S_n < x) - P(nE\xi + \sqrt{n}\sigma \cdot \eta < x)| < \frac{CE|\xi|^\alpha}{\sigma^\alpha n^{(\alpha-2)/2}}.$$

# КОГДА ГЕНИЙ ТЕРПИТ ПОРАЖЕНИЕ (Lowenstein)

# КОГДА ГЕНИЙ ТЕРПИТ ПОРАЖЕНИЕ (Lowenstein)

## Long-Term Capital Management

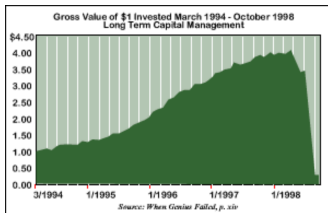
Хедж-фонд (1994 – 1998).



# КОГДА ГЕНИЙ ТЕРПИТ ПОРАЖЕНИЕ (Lowenstein)

## Long-Term Capital Management

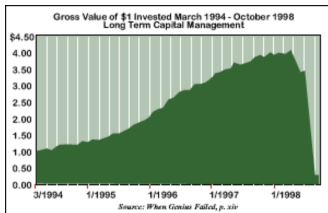
Хедж-фонд (1994 – 1998).



# КОГДА ГЕНИЙ ТЕРПИТ ПОРАЖЕНИЕ (Lowenstein)

## Long-Term Capital Management

Хедж-фонд (1994 – 1998).



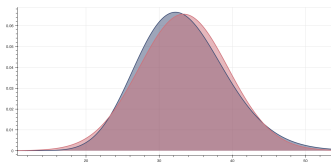
*Bostrum and Circovic:*

«The founders of LTCM later called the market conditions of 1998 a '10-sigma event'»

# КОГДА ГЕНИЙ ТЕРПИТ ПОРАЖЕНИЕ (Lowenstein)

## Long-Term Capital Management

Хедж-фонд (1994 – 1998).



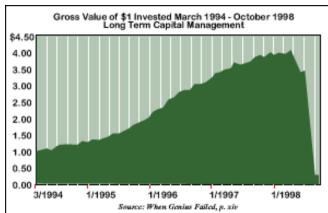
### Bostrum and Circovic:

«The founders of LTCM later called the market conditions of 1998 a '10-sigma event'»

# КОГДА ГЕНИЙ ТЕРПИТ ПОРАЖЕНИЕ (Lowenstein)

## Long-Term Capital Management

Хедж-фонд (1994 – 1998).



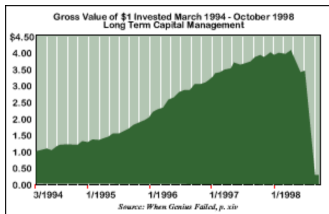
*Bostrum and Circovic:*

«The founders of LTCM later called the market conditions of 1998 a '10-sigma event'»

# КОГДА ГЕНИЙ ТЕРПИТ ПОРАЖЕНИЕ (Lowenstein)

## Long-Term Capital Management

Хедж-фонд (1994 – 1998).



*Bostrum and Circovic:*

«The founders of LTCM later called the market conditions of 1998 a '10-sigma event'»

*Nassim Nicholas Taleb:*

«Wittgenstein's ruler: Вы используете линейку, чтобы померить стол, или вы используете стол, чтобы померить линейку?»



# ПРОБЛЕМЫ АПРОКСИМАЦИИ В ЦПТ

## Теорема (Неравенство Берри-Эссеена)

Если  $0 < \sigma := \sqrt{D\xi} < \infty$ ,  $\rho := E|\xi - E\xi|^3 < \infty$ , то

$$\sup_{y < x} |P(y < S_n < x) - P(y < nE\xi + \sqrt{n}\sigma \cdot \eta < x)| < \frac{C\rho}{\sigma^3\sqrt{n}}.$$

# ПРОБЛЕМЫ АПРОКСИМАЦИИ В ЦПТ

## Теорема (Неравенство Берри-Эссеена)

Если  $0 < \sigma := \sqrt{D\xi} < \infty, \rho := E|\xi - E\xi|^3 < \infty$ , то

$$\sup_{y < x} |P(y < S_n < x) - P(y < nE\xi + \sqrt{n}\sigma \cdot \eta < x)| < \frac{C\rho}{\sigma^3\sqrt{n}}.$$

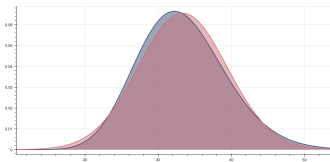


Рис.: Аппроксимация суммы экспоненциальных ( $\alpha = 0.9, n = 30$ ).



# ПРОБЛЕМЫ АПРОКСИМАЦИИ В ЦПТ

## Теорема (Неравенство Берри-Эссеена)

Если  $0 < \sigma := \sqrt{D\xi} < \infty$ ,  $\rho := E|\xi - E\xi|^3 < \infty$ , то

$$\sup_{y < x} |P(y < S_n < x) - P(y < nE\xi + \sqrt{n}\sigma \cdot \eta < x)| < \frac{C\rho}{\sigma^3\sqrt{n}}.$$

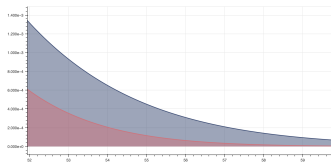
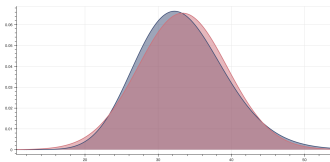


Рис.: Аппроксимация суммы экспоненциальных ( $\alpha = 0.9$ ,  $n = 30$ ).

# ПРОБЛЕМЫ АПРОКСИМАЦИИ В ЦПТ

## Теорема (Неравенство Берри-Эссеена)

Если  $0 < \sigma := \sqrt{D\xi} < \infty$ ,  $\rho := E|\xi - E\xi|^3 < \infty$ , то

$$\sup_{y < x} |P(y < S_n < x) - P(y < nE\xi + \sqrt{n}\sigma \cdot \eta < x)| < \frac{C\rho}{\sigma^3\sqrt{n}}.$$

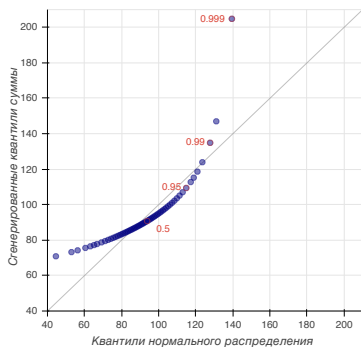


Рис.: QQ-plot для аппроксимации суммы Парето ( $\alpha = 2.3$ ,  $n = 52$ ).



# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЪЯСНЕНИЕ?

[Принцип Одного Большого Скачка]

$$P(S_n > x) \sim P(\max\{\xi_1, \dots, \xi_n\} > x), \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЪЯСНЕНИЕ?

## [Принцип Одного Большого Скачка]

$$P(S_n > x) \sim P(\max\{\xi_1, \dots, \xi_n\} > x), \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

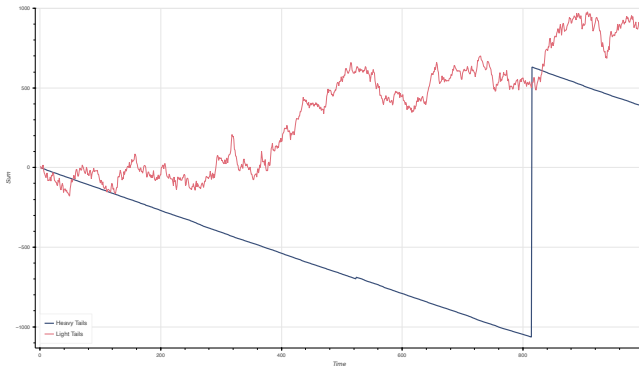


Рис.: Траектории  $S_n$  для легких и тяжелых хвостов.

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЪЯСНЕНИЕ?

[Принцип Одного Большого Скачка]

$$P(S_n > x) \sim P(\max\{\xi_1, \dots, \xi_n\} > x), \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЪЯСНЕНИЕ?

[Принцип Одного Большого Скачка]

$$P(S_n > x) \sim P(\max\{\xi_1, \dots, \xi_n\} > x), \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Опр.(Класса  $\mathcal{RV}_\alpha, \alpha > 0$ )

$P(\xi > x) = L(x)x^{-\alpha}$ , где  $L(x)$  – медленно меняющаяся функция (м.м.ф.)

$$\left( \frac{L(tx)}{L(x)} \rightarrow 1 \quad \text{при } x \rightarrow \infty \text{ для всех } t > 0 \right).$$





# ТЕОРИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

## Теорема (Fisher–Tippett–Гнеденко(1943))

Если  $\xi \in \mathcal{RV}_\alpha, \alpha > 0$ , то найдутся  $a_n > 0, b_n \in \mathbb{R}$  такие, что при  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\max\{\xi_1, \dots, \xi_n\} - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} \zeta \sim \mathcal{F}_\alpha.$$

# ТЕОРИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

## Теорема (Fisher–Tippett–Гнеденко(1943))

Если  $\xi \in \mathcal{RV}_\alpha, \alpha > 0$ , то найдутся  $a_n > 0, b_n \in \mathbb{R}$  такие, что при  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\max\{\xi_1, \dots, \xi_n\} - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} \zeta \sim \mathcal{F}_\alpha.$$

## Теорема (de Haan and Resnick (1996))

Если  $\xi \in 2\mathcal{RV}_{\alpha,\rho}, \alpha, \rho > 0$ , то найдутся  $a_n > 0, b_n \in \mathbb{R}$  такие, что

$$\sup_x |\mathbb{P}(\max\{\xi_1, \dots, \xi_n\} < x) - \mathbb{P}(b_n + a_n \cdot \zeta < x)| < L(n)n^{-\rho}.$$

# ТЕОРИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

## Теорема (Fisher–Tippett–Гнеденко(1943))

Если  $\xi \in \mathcal{RV}_\alpha$ ,  $\alpha > 0$ , то найдутся  $a_n > 0$ ,  $b_n \in \mathbb{R}$  такие, что при  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\max\{\xi_1, \dots, \xi_n\} - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} \zeta \sim \mathcal{F}_\alpha.$$

## Теорема (de Haan and Resnick (1996))

Если  $\xi \in 2\mathcal{RV}_{\alpha,\rho}$ ,  $\alpha, \rho > 0$ , то найдутся  $a_n > 0$ ,  $b_n \in \mathbb{R}$  такие, что

$$\sup_x |\mathbb{P}(\max\{\xi_1, \dots, \xi_n\} < x) - \mathbb{P}(b_n + a_n \cdot \zeta < x)| < L(n)n^{-\rho}.$$

## Лемма (Hua and Joe (2011))

$\xi \in 2\mathcal{RV}_{\alpha,\rho}$ ,  $\alpha, \rho > 0$  тогда и только тогда, когда

$$\mathbb{P}(\xi > x) = cx^{-\alpha}(1 + L(x)x^{-\rho}),$$

где  $c > 0$ ,  $L(x)$  – м.м.ф.



# ТЕОРИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

$$P(S_n > x) \sim P(\max\{\xi_1, \dots, \xi_n\} > x) \sim P(b_n + a_n \cdot \zeta < x).$$

# ТЕОРИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

$$\mathbb{P}(S_n > x) \sim \mathbb{P}(\max\{\xi_1, \dots, \xi_n\} > x) \sim \mathbb{P}(b_n + a_n \cdot \zeta < x).$$

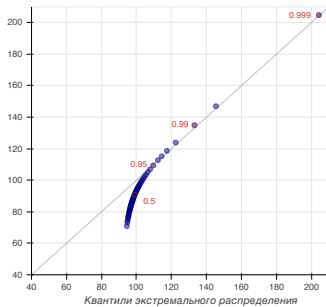
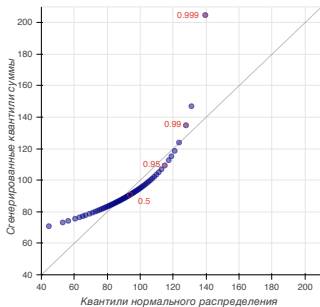


Рис.: QQ-plots для аппроксимации суммы Парето ( $\alpha = 2.3, n = 52$ ).

# Содержание

## ◆ МОТИВАЦИЯ

## ◆ NORMEX МЕТОД

## ◆ MRV-NORMEX МЕТОД

# ИДЕЯ NORM(al)-EX(tremes) МЕТОДА



# ИДЕЯ NORM(al)-EX(tremes) МЕТОДА

Обозначим через  $\xi_{(1)} \leq \dots \leq \xi_{(n)}$  порядковые статистики.

## ИДЕЯ NORM(al)-EX(tremes) МЕТОДА

Обозначим через  $\xi_{(1)} \leq \dots \leq \xi_{(n)}$  порядковые статистики. Тогда

$$S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i = \sum_{i=1}^n \xi_{(i)} =: T_{n-1} + \xi_{(n)}.$$

# ИДЕЯ NORM(al)-EX(tremes) МЕТОДА

Обозначим через  $\xi_{(1)} \leq \dots \leq \xi_{(n)}$  порядковые статистики. Тогда

$$S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i = \sum_{i=1}^n \xi_{(i)} =: T_{n-1} + \xi_{(n)}.$$

Оказывается, что

$$\mathcal{L}(T_{n-1} | \xi_{(n)} = x) = \mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i(x)\right),$$

где  $\xi_i(x)$  – н.о.р. с распределением  $P(\xi(x) \in B) = P(\xi \in B | \xi < x)$ .

# ИДЕЯ NORM(al)-EX(tremes) МЕТОДА

Обозначим через  $\xi_{(1)} \leq \dots \leq \xi_{(n)}$  порядковые статистики. Тогда

$$S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i = \sum_{i=1}^n \xi_{(i)} =: T_{n-1} + \xi_{(n)}.$$

Оказывается, что

$$\mathcal{L}(T_{n-1} | \xi_{(n)} = x) = \mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i(x)\right),$$

где  $\xi_i(x)$  – н.о.р. с распределением  $P(\xi(x) \in B) = P(\xi \in B | \xi < x)$ .

# ИДЕЯ NORM(al)-EX(tremes) МЕТОДА

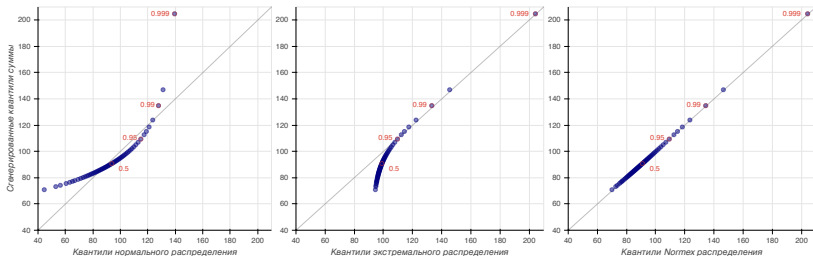
Обозначим через  $\xi_{(1)} \leq \dots \leq \xi_{(n)}$  порядковые статистики. Тогда

$$S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i = \sum_{i=1}^n \xi_{(i)} =: T_{n-1} + \xi_{(n)}.$$

Оказывается, что

$$\mathcal{L}(T_{n-1} | \xi_{(n)} = x) = \mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i(x)\right),$$

где  $\xi_i(x)$  – н.о.р. с распределением  $P(\xi(x) \in B) = P(\xi \in B | \xi < x)$ .



## NORMEX МЕТОД

# NORMEX МЕТОД

Опр. (Normex распределения)

$$G_{\alpha,n}(B) := P(\eta_n + (b_n + a_n \zeta_\alpha) \in B),$$

где  $\zeta_\alpha \sim \text{Fréchet}(\alpha)$ , с.в.  $\eta_n$ , при условии  $b_n + a_n \cdot \zeta_\alpha = x$ , имеет распределение  $\mathcal{N}_{(n-1)\mu(x), (n-1)\sigma^2(x)}$  и

$$\mu(x) := E\xi(x), \quad \sigma^2(x) := D\xi(x).$$

# NORMEX МЕТОД

Опр. (Normex распределения)

$$G_{\alpha,n}(B) := P(\eta_n + (b_n + a_n \zeta_\alpha) \in B),$$

где  $\zeta_\alpha \sim \text{Fréchet}(\alpha)$ , с.в.  $\eta_n$ , при условии  $b_n + a_n \cdot \zeta_\alpha = x$ , имеет распределение  $\mathcal{N}_{(n-1)\mu(x), (n-1)\sigma^2(x)}$  и

$$\mu(x) := E\xi(x), \quad \sigma^2(x) := D\xi(x).$$

Теорема (Kratz (2014); Müller (2019); Kratz, П. (2022))

Пусть  $\xi \in 2\mathcal{RV}_{\alpha,\rho}$ ,  $\alpha \in (2, 3]$ ,  $\rho > 0$ . Тогда

$$\sup_x |P(S_n < x) - G_{\alpha,n}((-\infty, x))| \leq \left( n^{-\frac{1}{2} + \frac{3-\alpha}{\alpha}} + n^{-\min(1, \frac{\rho}{\alpha})} \right) L(n),$$

где  $L(n)$  – м.м.ф.





# МОТИВАЦИЯ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО СЛУЧАЯ

# МОТИВАЦИЯ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО СЛУЧАЯ

$$\vec{S}_n = \sum_{i=1}^n \vec{\xi}_i, \text{ где } \{\vec{\xi}_i\}_{i=1}^{\infty} - \text{н.о.р. а.н.р. в } \mathbb{R}^d.$$

# МОТИВАЦИЯ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО СЛУЧАЯ

$$\vec{S}_n = \sum_{i=1}^n \vec{\xi}_i, \text{ где } \left\{ \vec{\xi}_i \right\}_{i=1}^{\infty} - \text{н.о.р. а.н.р. в } \mathbb{R}^d.$$

$\vec{\xi}_i = (\xi_i^1, \dots, \xi_i^d)$  – риск  $i$ -ого клиента от своего портфеля  $\pi_i$ .

# МОТИВАЦИЯ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО СЛУЧАЯ

$$\vec{S}_n = \sum_{i=1}^n \vec{\xi}_i, \text{ где } \left\{ \vec{\xi}_i \right\}_{i=1}^{\infty} - \text{н.о.р. а.н.р. в } \mathbb{R}^d.$$

$\vec{\xi}_i = (\xi_i^1, \dots, \xi_i^d)$  – риск  $i$ -ого клиента от своего портфеля  $\pi_i$ .

$\vec{S}_n$  – суммарный риск страховой компании, у которой  $n$  клиентов.

# ИДЕЯ MRV-NORMEX МЕТОДА

# ИДЕЯ MRV-NORMEX МЕТОДА

Обозначим  $\|\vec{\xi}_{(1)}\| \leq \dots \leq \|\vec{\xi}_{(n)}\|$  порядковые статистики.

# ИДЕЯ MRV-NORMEX МЕТОДА

Обозначим  $\|\vec{\xi}_{(1)}\| \leq \dots \leq \|\vec{\xi}_{(n)}\|$  порядковые статистики. Тогда

$$\vec{S}_n = \sum_{i=1}^n \vec{\xi}_i = \sum_{i=1}^n \vec{\xi}_{(i)} = \vec{T}_{n-1} + \vec{\xi}_{(n)}.$$



# ИДЕЯ MRV-NORMEX МЕТОДА

Обозначим  $\|\vec{\xi}_{(1)}\| \leq \dots \leq \|\vec{\xi}_{(n)}\|$  порядковые статистики. Тогда

$$\vec{S}_n = \sum_{i=1}^n \vec{\xi}_i = \sum_{i=1}^n \vec{\xi}_{(i)} = \vec{T}_{n-1} + \vec{\xi}_{(n)}.$$

$$\mathcal{L} \left( \vec{T}_{n-1} \mid \|\vec{\xi}_{(n)}\| = x \right) = \mathcal{L} \left( \sum_{i=1}^{n-1} \vec{\xi}_i(x) \right),$$

где  $\vec{\xi}_i(x)$  – н.о.р. с распределением

$$P \left( \vec{\xi}(x) \in B \right) = P \left( \vec{\xi} \in B \mid \|\vec{\xi}\| < x \right).$$

# ИДЕЯ MRV-NORMEX МЕТОДА

Опр. (Класса  $MRV_\alpha, \alpha > 0$ )

С.в.  $\vec{\xi}$  принадлежит  $MRV_\alpha, \alpha > 0$ , если найдется с.в.  $\vec{\Theta} \in \mathbb{R}^d$  со значениями на единичной сфере  $S_1$  относительно нормы  $\|\cdot\|$ , такой что, для всех  $t > 0$ ,

$$\frac{P\left(\|\vec{\xi}\| > tu, \vec{\xi}/\|\vec{\xi}\| \in \cdot\right)}{P\left(\|\vec{\xi}\| > u\right)} \rightarrow t^{-\alpha} P\left(\vec{\Theta} \in \cdot\right) \quad \text{при} \quad u \rightarrow \infty$$

# MRV-NORMEX МЕТОД

Опр. (MRV-Normex распределения)

$$GM_{\alpha,n}(B) := P \left( \vec{\eta}_n + (b_n + a_n \zeta_\alpha) \vec{\Theta} \in B \right),$$

где  $\zeta_\alpha \sim \text{Fréchet}(\alpha)$ , с.в.  $\vec{\eta}_n \perp \vec{\Theta}$ , и при условии  $b_n + a_n \cdot \zeta_\alpha = x$ ,  $\vec{\eta}_n$  имеет распределение  $\mathcal{N}_{(n-1)\vec{\mu}(x), (n-1)\Sigma(x)}$ ,

$$\vec{\mu}(x) := E\vec{\xi}(x), \quad \Sigma(x) := \text{Cov} \vec{\xi}(x).$$

# MRV-NORMEX МЕТОД

Теорема (Kratz, П. (2022))

Пусть

(C1)  $F_{\vec{\xi} | \|\vec{\xi}\|}(\cdot | y)$  невырожденно для всех  $y > 0$ ;

# MRV-NORMEX МЕТОД

## Теорема (Kratz, П. (2022))

Пусть

(C1)  $F_{\vec{\xi} | \|\vec{\xi}\|}(\cdot | y)$  невырожденно для всех  $y > 0$ ;

(M <sub>$\|\cdot\|$</sub> )  $\|\vec{\xi}\| \in 2RV_{\alpha, \rho}$   $\alpha > 0$ ,  $\rho > 0$ ;

# MRV-NORMEX МЕТОД

## Теорема (Kratz, П. (2022))

Пусть

(C1)  $F_{\vec{\xi}|\|\vec{\xi}\|}(\cdot|y)$  невырожденно для всех  $y > 0$ ;

( $M_{\|\cdot\|}$ )  $\|\vec{\xi}\| \in 2RV_{\alpha,\rho}$   $\alpha > 0$ ,  $\rho > 0$ ;

( $M_{\Theta}$ ) найдется  $A(t) \rightarrow 0$ ,  $|A(t)| \in \mathcal{RV}_{\beta}$ ,  $\beta > 0$ , и

$$\sup_{\mathbf{B} \in \mathcal{S}_1} \left| P \left( \frac{\vec{\xi}}{\|\vec{\xi}\|} \in \mathbf{B} \mid \|\vec{\xi}\| > t \right) - P \left( \vec{\Theta} \in \mathbf{B} \right) \right| \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} A(t).$$

## MRV-NORMEX МЕТОД

## Теорема (Kratz, П. (2022))

Пусть

(C1)  $F_{\vec{\xi}|\|\vec{\xi}\|}(\cdot|y)$  невырожденно для всех  $y > 0$ ;(M $_{\|\cdot\|}$ )  $\|\vec{\xi}\| \in 2RV_{\alpha,\rho}$   $\alpha > 0$ ,  $\rho > 0$ ;(M $_{\Theta}$ ) найдется  $A(t) \rightarrow 0$ ,  $|A(t)| \in \mathcal{RV}_{\beta}$ ,  $\beta > 0$ , и

$$\sup_{\mathbf{B} \in \mathcal{S}_1} \left| P \left( \frac{\vec{\xi}}{\|\vec{\xi}\|} \in \mathbf{B} \mid \|\vec{\xi}\| > t \right) - P \left( \vec{\Theta} \in \mathbf{B} \right) \right| \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} A(t).$$

# MRV-NORMEX МЕТОД

## Теорема (Kratz, П. (2022))

Пусть

(C1)  $F_{\vec{\xi}|\|\vec{\xi}\|}(\cdot|y)$  невырожденно для всех  $y > 0$ ;

( $M_{\|\cdot\|}$ )  $\|\vec{\xi}\| \in 2RV_{\alpha,\rho}$   $\alpha > 0$ ,  $\rho > 0$ ;

( $M_{\Theta}$ ) найдется  $A(t) \rightarrow 0$ ,  $|A(t)| \in \mathcal{RV}_{\beta}$ ,  $\beta > 0$ , и

$$\sup_{\mathbf{B} \in \mathcal{S}_1} \left| P \left( \frac{\vec{\xi}}{\|\vec{\xi}\|} \in \mathbf{B} \mid \|\vec{\xi}\| > t \right) - P \left( \vec{\Theta} \in \mathbf{B} \right) \right| \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} A(t).$$

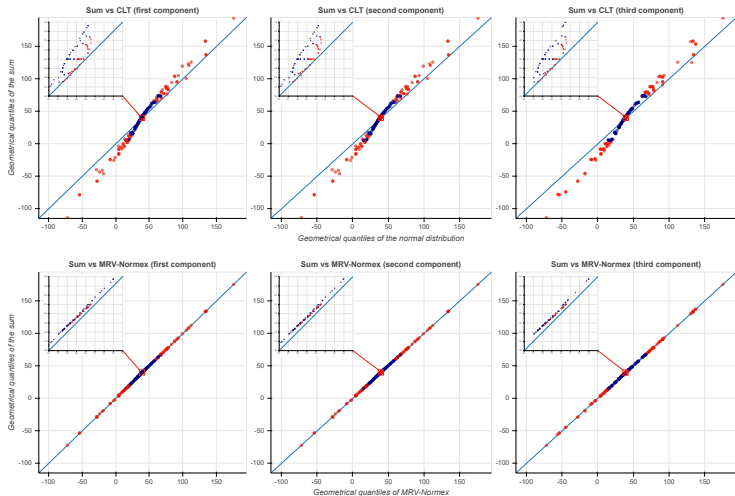
Тогда для всех  $\alpha \in (2, 3]$ ,  $\beta > 0$  и  $\rho > 0$ , найдется м.м.ф.  $L(\cdot)$  такая, что

$$\sup_{\mathbf{B} \in \mathcal{C}} |P(\mathbf{S}_n \in \mathbf{B}) - GM_n(\mathbf{B})| \leq \left( n^{-\frac{1}{2} + \frac{3-\alpha}{\alpha}} + n^{-\frac{\beta}{\alpha}} + n^{-\min(1, \frac{\rho}{\alpha})} \right) L(n),$$

где  $\mathcal{C}$  – множество всех выпуклых, борелевских множеств  $\mathbb{R}^d$ .



# ПРИМЕР МНОГОМЕРНОГО ПАРЕТО ( $\alpha = 2.3, n = 52, d = 3$ )



# ПЕРСПЕКТИВЫ

# ПЕРСПЕКТИВЫ

- Статистическая сторона метода(ов).

# ПЕРСПЕКТИВЫ

- Статистическая сторона метода(ов).
- Применимость метода(ов) к случайным процессам.

# ПЕРСПЕКТИВЫ

- Статистическая сторона метода(ов).
- Применимость метода(ов) к случайным процессам.

## Спасибо!