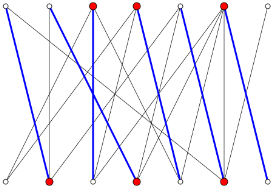
Перманенты многомерных матриц, паросочетания в гиперграфах и трансверсали латинских гиперкубов

с.н.с., к.ф.-м.н. Тараненко А. А.

ИМ СО РАН

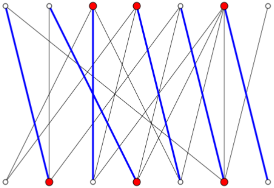
15 июня 2022 г.

Теорема Кенига–Холла для графов



Паросочетание – набор ребер, не пересекающихся по вершинам.
Паросочетание совершенное, если оно покрывает все вершины графа.
Вершинное покрытие – подмножество вершин графа, протыкающее все ребра.
Граф $G = (V, E)$ – двудольный, если $V = X \sqcup Y$ и для любого ребра $xy \in E$ верно $x \in X$, $y \in Y$.

Теорема Кенига–Холла для графов



Паросочетание – набор ребер, не пересекающихся по вершинам.
Паросочетание совершенное, если оно покрывает все вершины графа.
Вершинное покрытие – подмножество вершин графа, протыкающее все ребра.
Граф $G = (V, E)$ – двудольный, если $V = X \sqcup Y$ и для любого ребра $xy \in E$ верно $x \in X$, $y \in Y$.

Теорма Кенига–Холла для графов

В двудольном графе размер максимального паросочетания равен размеру минимального вершинного покрытия.

Теорема Кенига–Холла для матриц

Пусть $A = (a_{i,j})$ – матрица порядка n.
A называется $(0,1)$-матрицей, если все $a_{i,j}$ равны 0 или 1.

Линия – строка или столбец матрицы.
Частичная диагональ длины ℓ – набор из ℓ элементов, любая пара которых не лежит в одной линии.

Теорема Кенига–Холла для матриц

Пусть $A = (a_{i,j})$ – матрица порядка n.
A называется $(0,1)$-матрицей, если все $a_{i,j}$ равны 0 или 1.

Линия – строка или столбец матрицы.
Частичная диагональ длины ℓ – набор из ℓ элементов, любая пара которых не лежит в одной линии.

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Теорема Кенига–Холла для матриц

Пусть $A = (a_{i,j})$ – матрица порядка n.
A называется $(0,1)$-матрицей, если все $a_{i,j}$ равны 0 или 1.

Линия – строка или столбец матрицы.
Частичная диагональ длины ℓ – набор из ℓ элементов, любая пара которых не лежит в одной линии.

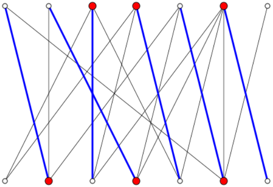
$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Теорема Кенига–Холла для матриц

Длина наибольшей единичной частичной диагонали в $(0,1)$-матрице = наименьшему числу линий, которыми можно покрыть ее единицы.

Матрицы смежности для графов

A – матрица смежности графа G, если $a_{x,y} = 1 \Leftrightarrow xy$ – ребро G



$$B = \begin{array}{c|ccccccc} & \circ & \bullet & \circ & \bullet & \circ & \bullet & \circ \\ \hline \circ & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \circ & 0 & 1 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & 1 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \bullet & 1 & 0 & 1 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \circ & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ \bullet & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \mathbf{1} \\ \circ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}$$

Любая $(0,1)$-матрица – это матрица смежности долей двудольного графа.

Перманенты и паросочетания

Перманентом матрицы A называется величина

$$\mathrm{per} A = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

Перманент $(0,1)$-матрицы $=$ число единичных диагоналей.

Перманенты и паросочетания

Перманентом матрицы A называется величина

$$\mathrm{per} A = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

Перманент $(0,1)$-матрицы $=$ число единичных диагоналей.

Следствие теоремы Кенига–Холла

Если G – двудольный граф с долями равной мощности, A – матрица смежности G, B – его матрица смежности долей, то число совершенных паросочетаний

$$\varphi(G) = \mathrm{per} B = (\mathrm{per} A)^{1/2}.$$

Перманенты и паросочетания

Перманентом матрицы A называется величина

$$\mathrm{per} A = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

Перманент $(0,1)$-матрицы $=$ число единичных диагоналей.

Следствие теоремы Кенига–Холла

Если G – **двудольный** граф с долями равной мощности, A – матрица смежности G, B – его матрица смежности долей, то число совершенных паросочетаний

$$\varphi(G) = \mathrm{per} B = (\mathrm{per} A)^{1/2}.$$

Следствие теоремы Кенига–Холла

Перманент $(0,1)$-матрицы **больше** нуля тогда и только тогда, когда для размеров $s \times t$ любой ее **нулевой подматрицы** верно $s + t < n$.

Число совершенных паросочетаний в графе

G – граф, A – его матрица смежности, $\varphi(G)$ – число совершенных паросочетаний.

Теорема (Alon, Friedland, 2008)

$$\varphi(G) \le (\mathrm{per} A)^{1/2}.$$

Число совершенных паросочетаний в графе

G – граф, A – его матрица смежности, $\varphi(G)$ – число совершенных паросочетаний.

Теорема (Alon, Friedland, 2008)

$$\varphi(G) \leq (\mathrm{per} A)^{1/2}.$$

Теорема (Bregman, 1973)

Если A – $(0,1)$-матрица порядка n, r_i – сумма в i-ой строке, то

$$\mathrm{per} A \leq \prod_{i=1}^{n} r_i!^{1/r_i}.$$

Число совершенных паросочетаний в графе

G – граф, A – его матрица смежности, $\varphi(G)$ – число совершенных паросочетаний.

Теорема (Alon, Friedland, 2008)

$$\varphi(G) \le (\mathrm{per} A)^{1/2}.$$

Теорема (Bregman, 1973)

Если A – $(0,1)$-матрица порядка n, r_i – сумма в i-ой строке, то

$$\mathrm{per} A \le \prod_{i=1}^{n} r_i!^{1/r_i}.$$

Если r_i – степень вершины x_i в G, то

$$\varphi(G) \le \prod_{i=1}^{n} r_i!^{1/2r_i}.$$

Мотивация

Обобщения и переформулировки теоремы Кенига–Холла

- теорема Холла о системе различных представителей;
- теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе;
- теорема Дилуорса для частично упорядоченных множеств.

Мотивация

Обобщения и переформулировки теоремы Кенига–Холла

- теорема Холла о системе различных представителей;
- теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе;
- теорема Дилуорса для частично упорядоченных множеств.

Приложения паросочетаний в графах

- задача о назначениях;
- поиск гамильтоновых циклов;
- замощение полимино доминошками;
- индекс Хосойи в математической химии;
- ...

Мотивация

Цель: построить аналогичную теорию для паросочетаний в гиперграфах и перманентов многомерных матриц.

Мотивация

Цель: построить аналогичную теорию для паросочетаний в гиперграфах и перманентов многомерных матриц.

перманенты d-мерных матриц

$$\Downarrow$$

совершенные паросочетания в d-гиперграфах

Мотивация

Цель: построить аналогичную теорию для паросочетаний в гиперграфах и перманентов многомерных матриц.

перманенты d-мерных матриц

$\Downarrow$

совершенные паросочетания в d-гиперграфах

$\Downarrow$

трансверсали в латинских квадратах и гиперкубах

латинские квадраты и гиперкубы

системы Штейнера

совершенные коды

конечные геометрии

тайлинги групп

...

Многомерные матрицы

3-мерная (0, 1)-матрица порядка 3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \end{array}\right)$$

d-мерная матрица A порядка n – это массив $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{I}_n^d}$, $a_\alpha \in \mathbb{R}$, где $\mathcal{I}_n^d = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_d) : \alpha_i \in [n]\}$.
A называется $(0,1)$-матрицей, если все a_α равны 0 или 1.

Многомерные матрицы

3-**мерная** $(0,1)$-**матрица порядка** 3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \end{array}\right)$$

d-мерная матрица A порядка n – это массив $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{I}_n^d}$, $a_\alpha \in \mathbb{R}$, где $\mathcal{I}_n^d = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_d) : \alpha_i \in [n]\}$.
A называется $(0,1)$-матрицей, если все a_α равны 0 или 1.

Частичная диагональ длины ℓ – набор $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^\ell\}$ такой, что любая пара индексов α_i, α_j различна во всех позициях.
Диагональ $\mathcal{D}$: частичная диагональ длины n (максимальной).

Многомерные матрицы

3-мерная (0, 1)-матрица порядка 3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \end{array}\right)$$

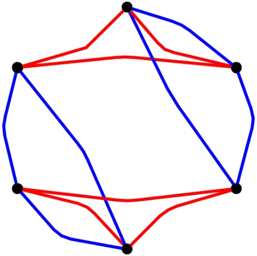
d-мерная матрица A порядка n – это массив $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{I}_n^d}$, $a_\alpha \in \mathbb{R}$, где $\mathcal{I}_n^d = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_d) : \alpha_i \in [n]\}$.
A называется $(0, 1)$-матрицей, если все a_α равны 0 или 1.

Частичная диагональ длины ℓ – набор $\{\alpha^1, \dots, \alpha^\ell\}$ такой, что любая пара индексов α_i, α_j различна во всех позициях.
Диагональ $\mathcal{D}$: частичная диагональ длины n (максимальной).

Перманент $\mathrm{per} A = \sum\limits_{\mathcal{D}} \prod\limits_{\alpha \in \mathcal{D}} a_\alpha$ считает число единичных диагоналей в многомерной $(0, 1)$-матрице.

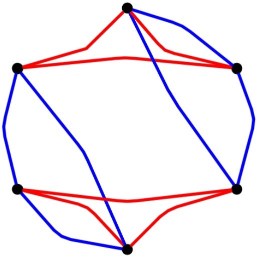
Гиперграфы

Гиперграф $H(X, W)$: X – вершины, $W = \{w | w \subset X\}$ – гиперребра.



Гиперграфы

Гиперграф $H(X, W)$: X – вершины, $W = \{w|w \subset X\}$ – гиперребра.

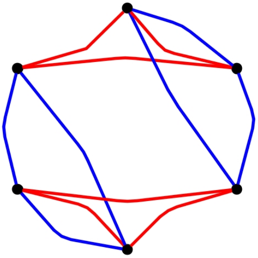


$H(X, W)$ – d-гиперграф, если $|w| = d$ для всех гиперребер w.

Сбалансированный d-дольный d-гиперграф: X разбито на d долей равной мощности, каждое гиперребро содержит ровно одну вершину из каждой доли.

Гиперграфы

Гиперграф $H(X, W)$: X – вершины, $W = \{w | w \subset X\}$ – гиперребра.

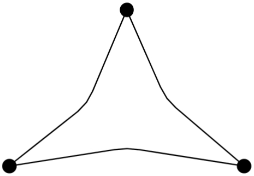


$H(X, W)$ – d-гиперграф, если $|w| = d$ для всех гиперребер w.
Сбалансированный d-дольный d-гиперграф: X разбито на d долей равной мощности, каждое гиперребро содержит ровно одну вершину из каждой доли.

Паросочетание – это множество $U \subset W$ такое, что любая вершина покрыта не более одним гиперребром $w \in U$.
Паросочетание U – совершенное, если оно покрывает все вершины H.

Матрицы смежности

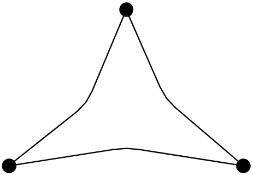
Матрица смежности для d-гиперграфа H на n вершинах – это d-мерная матрица A порядка n с $a_\alpha = \frac{1}{(d-1)!}$, если $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ – гиперребро в H и $a_\alpha = 0$ иначе.



$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Матрицы смежности

Матрица смежности для d-гиперграфа H на n вершинах – это d-мерная матрица A порядка n с $a_\alpha = \frac{1}{(d-1)!}$, если $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ – гиперребро в H и $a_\alpha = 0$ иначе.



$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- A – симметричная матрица.
- в A есть несущественные (нулевые) элементы.

Матрицы смежности долей

Матрица смежности долей B для сбалансированного d-дольного d-гиперграфа H с долями $X_1, \ldots, X_d$ мощности n – это d-мерная $(0,1)$-матрица порядка n такая, что $b_\alpha = 1$ тогда и только тогда, когда $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$, $\alpha_i \in X_i$ – гиперребро в H.

Матрицы смежности долей

Матрица смежности долей B для сбалансированного d-дольного d-гиперграфа H с долями $X_1, \ldots, X_d$ мощности n – это d-мерная $(0,1)$-матрица порядка n такая, что $b_\alpha = 1$ тогда и только тогда, когда $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$, $\alpha_i \in X_i$ – гиперребро в H.

Любая d-мерная $(0,1)$-матрица порядка n будет матрицей смежности долей некоторого сбалансированного d-дольного d-гиперграфа.

Матрицы смежности долей

Матрица смежности долей B для сбалансированного d-дольного d-гиперграфа H с долями $X_1, \dots, X_d$ мощности n – это d-мерная $(0,1)$-матрица порядка n такая, что $b_\alpha = 1$ тогда и только тогда, когда $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, $\alpha_i \in X_i$ – гиперребро в H.

Любая d-мерная $(0,1)$-матрица порядка n будет матрицей смежности долей некоторого сбалансированного d-дольного d-гиперграфа.

Матрицы смежности долей B образуют блоки в матрице смежности A

$$d = 2 \qquad\qquad d = 3$$

$$\begin{pmatrix} 0 & B'_{12} \\ B'_{21} & 0 \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B'_{132} & 0 & B'_{123} & 0 \\ 0 & 0 & B'_{231} & 0 & 0 & 0 & B'_{213} & 0 & 0 \\ 0 & B'_{321} & 0 & B'_{312} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Паросочетания и диагонали

H – сбалансированный d-дольный d-гиперграф.

- Паросочетание U мощности ℓ в H $=$ положительная частичная диагональ длины ℓ в матрице смежности долей B.
- Число совершенных паросочетаний в H $=$ перманент матрицы смежности долей B.

Паросочетания и диагонали

H – сбалансированный d-дольный d-гиперграф.

- Паросочетание U мощности ℓ в H = положительная частичная диагональ длины ℓ в матрице смежности долей B.
- Число совершенных паросочетаний в H = перманент матрицы смежности долей B.

H – d-гиперграф.

- Паросочетание U мощности ℓ в H = положительная симметричная частичная диагональ длины ℓd в матрице смежности A.

Частичная диагональ $\mathcal{D}$ называется симметричной, если она переходит в себя при перестановках компонент индексов.

Грани многомерной матрицы

A – d-мерная матрица порядка n.

k-грань в A – максимальная k-мерная подматрица.
Линии $=$ 1-грани, гиперграни $= (d-1)$-грани.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Грани многомерной матрицы

A – d-мерная матрица порядка n.

k-грань в A – максимальная k-мерная подматрица.
Линии $=$ 1-грани, гиперграни $=$ $(d-1)$-грани.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Вес $w(\Gamma)$ грани Γ – сумма всех ее элементов.
Матрица A называется k-стохастической, если все ее k-грани имеют одинаковый вес.

Степени и грани

$H(X, W)$ – d-гиперграф на n вершинах.

$deg(x)$ вершины x – число гиперребер, содержащих x.
$deg(S)$ для $S \subset X$ – число гиперрбер, содержащих все вершины S.

Степени и грани

$H(X, W)$ – d-гиперграф на n вершинах.

$deg(x)$ вершины x – число гиперребер, содержащих x.
$deg(S)$ для $S \subset X$ – число гиперрбер, содержащих все вершины S.

$H(X, W)$ – сбалансированный d-дольный d-гиперграф.

- Вершина $x \Leftrightarrow$ гипергрань Γ_x в матрице смежности долей B.
- Подмножество вершин S, $|S| = k \Leftrightarrow (d - k)$-грань Γ_S в матрице смежности долей B.

Степени и грани

$H(X, W)$ – d-гиперграф на n вершинах.

$deg(x)$ вершины x – число гиперребер, содержащих x.
$deg(S)$ для $S \subset X$ – число гиперрбер, содержащих все вершины S.

$H(X, W)$ – сбалансированный d-дольный d-гиперграф.

- Вершина $x \Leftrightarrow$ гипергрань Γ_x в матрице смежности долей B.
- Подмножество вершин S, $|S| = k \Leftrightarrow (d-k)$-грань Γ_S в матрице смежности долей B.

$$deg(x) = w(\Gamma_x); \qquad deg(S) = w(\Gamma_S).$$

Степени и грани

$H(X,W)$ – d-гиперграф на n вершинах.

$deg(x)$ вершины x – число гиперребер, содержащих x.
$deg(S)$ для $S \subset X$ – число гиперрбер, содержащих все вершины S.

$H(X,W)$ – сбалансированный d-дольный d-гиперграф.

- Вершина $x \Leftrightarrow$ гипергрань Γ_x в матрице смежности долей B.
- Подмножество вершин S, $|S| = k \Leftrightarrow (d-k)$-грань Γ_S в матрице смежности долей B.

$$deg(x) = w(\Gamma_x); \qquad deg(S) = w(\Gamma_S).$$

В произвольном d-гиперграфе на n вершинах

- Вершина $x \Leftrightarrow$ набор из d гиперграней Γ_x матрицы смежности A.
- Подмножество вершин S, $|S| = k \Leftrightarrow$ набор из $\binom{d}{k}$ $(d-k)$-граней Γ_S в матрице смежности A.

Верхние оценки числа совершенных паросочетаний

H – d-гиперграф на n вершинах, A – его матрица смежности, $\varphi(H)$ – число совершенных паросочетаний в H.

Верхние оценки числа совершенных паросочетаний

H – d-гиперграф на n вершинах, A – его матрица смежности, $\varphi(H)$ – число совершенных паросочетаний в H.

Теорема (Т., 2017)

Существует константа $\mu = \mu(d)$, $\mu \leq 1$ при $d \neq 3$ такая, что

$$\varphi(H) \leq (\mu^n \cdot \mathrm{per} A)^{1/d}.$$

Верхние оценки числа совершенных паросочетаний

H – d-гиперграф на n вершинах, A – его матрица смежности, $\varphi(H)$ – число совершенных паросочетаний в H.

Теорема (Т., 2017)

Существует константа $\mu = \mu(d)$, $\mu \leq 1$ при $d \neq 3$ такая, что

$$\varphi(H) \leq (\mu^n \cdot \mathrm{per} A)^{1/d}.$$

Следствие

Если r_i – степень вершин x_i, то

$$\varphi(H) \leq \left((d-1)!^n \mu^n \prod_{i=1}^{n} r_i\right)^{1/d}.$$

Вершинные покрытия и гипотеза Райзера

Вершинное покрытие в H – это $U \subset V$, пересекающееся с каждым гиперребром.

$\mu(H)$ = максимальная мощность паросочетания,

$\tau(H)$ = минимальная мощность вершинного покрытия.

Вершинные покрытия и гипотеза Райзера

Вершинное покрытие в H – это $U \subset V$, пересекающееся с каждым гиперребром.

$\mu(H)$ = максимальная мощность паросочетания,

$\tau(H)$ = минимальная мощность вершинного покрытия.

Тривиальные неравенства для d-гиперграфов

$$\mu(H) \leq \tau(H) \qquad \tau(H) \leq d\mu(H)$$

Вершинные покрытия и гипотеза Райзера

Вершинное покрытие в H – это $U \subset V$, пересекающееся с каждым гиперребром.

$\mu(H)$ = максимальная мощность паросочетания,

$\tau(H)$ = минимальная мощность вершинного покрытия.

Тривиальные неравенства для d-гиперграфов

$$\mu(H) \leq \tau(H) \qquad \tau(H) \leq d\mu(H)$$

Теорема Кенига–Холла для графов

Если H – двудольный граф, то

$$\tau(H) = \mu(H).$$

Вершинные покрытия и гипотеза Райзера

Вершинное покрытие в H – это $U \subset V$, пересекающееся с каждым гиперребром.

$\mu(H) =$ максимальная мощность паросочетания,

$\tau(H) =$ минимальная мощность вершинного покрытия.

Тривиальные неравенства для d-гиперграфов

$$\mu(H) \le \tau(H) \qquad \tau(H) \le d\mu(H)$$

Теорема Кенига–Холла для графов

Если H – двудольный граф, то

$$\tau(H) = \mu(H).$$

Гипотеза Райзера (1963)

Если H – d-дольный d-гиперграф, то

$$\tau(H) \le (d-1)\mu(H).$$

Покрытие гипергранями и гипотеза Райзера

Покрытие гипергранями – это набор гиперграней, покрывающий ненулевые элементы матрицы.

$\mu(A)$ = максимальная длина единичной диагонали в A,

$\tau(A)$ = минимальная мощность покрытия гипергранями.

Покрытие гипергранями и гипотеза Райзера

Покрытие гипергранями – это набор гиперграней, покрывающий ненулевые элементы матрицы.

$\mu(A)$ = максимальная длина единичной диагонали в A,

$\tau(A)$ = минимальная мощность покрытия гипергранями.

Тривиальные неравенства для d-мерных матриц

$$\mu(A) \leq \tau(A); \qquad \tau(A) \leq d\mu(A).$$

Покрытие гипергранями и гипотеза Райзера

Покрытие гипергранями – это набор гиперграней, покрывающий ненулевые элементы матрицы.

$\mu(A)$ = максимальная длина единичной диагонали в A,

$\tau(A)$ = минимальная мощность покрытия гипергранями.

Тривиальные неравенства для d-мерных матриц

$$\mu(A) \leq \tau(A); \qquad \tau(A) \leq d\mu(A).$$

Теорема Кенига–Холла для матриц

Если A – 2-мерная $(0,1)$-матрица, то

$$\tau(A) = \mu(A).$$

Покрытие гипергранями и гипотеза Райзера

Покрытие гипергранями – это набор гиперграней, покрывающий ненулевые элементы матрицы.

$\mu(A)$ = максимальная длина единичной диагонали в A,

$\tau(A)$ = минимальная мощность покрытия гипергранями.

Тривиальные неравенства для d-мерных матриц

$$\mu(A) \leq \tau(A); \qquad \tau(A) \leq d\mu(A).$$

Теорема Кенига–Холла для матриц

Если A – 2-мерная $(0,1)$-матрица, то

$$\tau(A) = \mu(A).$$

Гипотеза Райзера для матриц

Если A – d-мерная $(0,1)$-матрица

$$\tau(A) \leq (d-1)\mu(A).$$

Условия для существования паросочетаний

$\delta_k(H)$ – наименьшая степень S по всем подмножествам S, $|S| = k$.
$m_k^\ell(d, n)$ – наименьшее целое m такое, что любой n-вершинный d-гиперграф H с $\delta_k(H) \geq m$ содержит паросочетание мощности ℓ.

Условия для существования паросочетаний

$\delta_k(H)$ – наименьшая степень S по всем подмножествам S, $|S| = k$.
$m_k^\ell(d, n)$ – наименьшее целое m такое, что любой n-вершинный d-гиперграф H с $\delta_k(H) \geq m$ содержит паросочетание мощности ℓ.

Проблема типа Дирака для паросочетаний

Для известных n, k, d и ℓ найти $m_k^\ell(n, d)$.

Условия для существования паросочетаний

$\delta_k(H)$ – наименьшая степень S по всем подмножествам S, $|S| = k$.
$m_k^\ell(d,n)$ – наименьшее целое m такое, что любой n-вершинный d-гиперграф H с $\delta_k(H) \geq m$ содержит паросочетание мощности ℓ.

Проблема типа Дирака для паросочетаний

Для известных n, k, d и ℓ найти $m_k^\ell(n,d)$.

Наиболее полные обзоры:

1. V. Rödl, A. Ruciński. Dirac-type questions for hypergraphs – a survey. (2010).
2. Yi Zhao. Recent advances in Dirac-type problems for hypergraphs. (2016).

Условия для существования паросочетаний

$\delta_k(H)$ – наименьшая степень S по всем подмножествам S, $|S| = k$.
$m_k^\ell(d, n)$ – наименьшее целое m такое, что любой n-вершинный d-гиперграф H с $\delta_k(H) \geq m$ содержит паросочетание мощности ℓ.

Проблема типа Дирака для паросочетаний

Для известных n, k, d и ℓ найти $m_k^\ell(n, d)$.

Наиболее полные обзоры:

1. V. Rödl, A. Ruciński. Dirac-type questions for hypergraphs – a survey. (2010).
2. Yi Zhao. Recent advances in Dirac-type problems for hypergraphs. (2016).

Проблема типа Дирака для матриц

Какого минимального веса достаточно потребовать для (существенных) k-граней, чтобы в d-мерной (0,1)-матрице пордяка n была положительная (симметричная) диагональ?

Space barrier

H_{sb} – d-гиперграф на n вершинах,
его гиперребра – наборы из d вершин, пересекающиеся с фиксированнным подмножеством S, $|S| = n/d - 1$.

Space barrier

H_{sb} – d-гиперграф на n вершинах,
его гиперребра – наборы из d вершин, пересекающиеся с фиксированнным подмножеством S, $|S| = n/d - 1$.

$\delta_1(H_{sp}) = n/d - 1$, в H_{sp} нет совершенных паросочетаний.

Space barrier

H_{sb} – d-гиперграф на n вершинах,
его гиперребра – наборы из d вершин, пересекающиеся с фиксированнным подмножеством S, $|S| = n/d - 1$.

$\delta_1(H_{sp}) = n/d - 1$, в H_{sp} нет совершенных паросочетаний.

M_{sb} – d-мерная матрица порядка n,
для покрытия ее положительных элементов достаточно взять по $n/d - 1$ гиперграней каждого направления.

Space barrier

H_{sb} – d-гиперграф на n вершинах,
его гиперребра – наборы из d вершин, пересекающиеся с фиксированнным подмножеством S, $|S| = n/d - 1$.

$\delta_1(H_{sp}) = n/d - 1$, в H_{sp} нет совершенных паросочетаний.

M_{sb} – d-мерная матрица порядка n,
для покрытия ее положительных элементов достаточно взять по $n/d - 1$ гиперграней каждого направления.

Вес любой линии M_{sb} не менее $n/d - 1$, перманент M_{sb} равен нулю.

Матрица $\mathcal{Z}_n^d$

$\mathcal{Z}_n^d$ – d-мерная $(0,1)$-матрица порядка n,
$z_\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$ нечетно.

Матрица $\mathcal{Z}_n^d$

$\mathcal{Z}_n^d$ – d-мерная $(0,1)$-матрица порядка n,
$z_\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$ нечетно.

Вес каждой линии в $\mathcal{Z}_n^d$ равен $n/2$.

Матрица $\mathcal{Z}_n^d$

$\mathcal{Z}_n^d$ – d-мерная $(0,1)$-матрица порядка n,
$z_\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$ нечетно.

Вес каждой линии в $\mathcal{Z}_n^d$ равен $n/2$.

$\mathcal{Z}_n^d$ можно представить как матрицу, составленную из нулевых и единичных блоков порядка $n/2$.

$$\mathcal{Z}_n^3 = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Матрица $\mathcal{Z}_n^d$

$\mathcal{Z}_n^d$ – d-мерная $(0,1)$-матрица порядка n,
$z_\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$ нечетно.

Вес каждой линии в $\mathcal{Z}_n^d$ равен $n/2$.

$\mathcal{Z}_n^d$ можно представить как матрицу, составленную из нулевых и единичных блоков порядка $n/2$.

Если d нечетно и $n \equiv 2 \mod 4$, то перманент $\mathcal{Z}_n^d$ равен нулю.

Матрица $\mathcal{Z}_n^d$

$\mathcal{Z}_n^d$ – d-мерная $(0,1)$-матрица порядка n,
$z_\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$ нечетно.

Вес каждой линии в $\mathcal{Z}_n^d$ равен $n/2$.

$\mathcal{Z}_n^d$ можно представить как матрицу, составленную из нулевых и единичных блоков порядка $n/2$.

Если d нечетно и $n \equiv 2 \mod 4$, то перманент $\mathcal{Z}_n^d$ равен нулю.

Доказательство для $d = 3$

$$\mathcal{Z}_n^3 = \left(\begin{array}{cc|cc} x & \mathbf{0} & \mathbf{0} & * \\ \mathbf{0} & * & * & \mathbf{0} \end{array} \right)$$

Матрица $\mathcal{Z}_n^d$

$\mathcal{Z}_n^d$ – d-мерная $(0,1)$-матрица порядка n,
$z_\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$ нечетно.

Вес каждой линии в $\mathcal{Z}_n^d$ равен $n/2$.

$\mathcal{Z}_n^d$ можно представить как матрицу, составленную из нулевых и единичных блоков порядка $n/2$.

Если d нечетно и $n \equiv 2 \mod 4$, то перманент $\mathcal{Z}_n^d$ равен нулю.

Доказательство для $d = 3$

$$\mathcal{Z}_n^3 = \left(\begin{array}{cc|cc} x & 0 & 0 & * \\ 0 & n/2 - x & * & 0 \end{array} \right)$$

Матрица $\mathcal{Z}_n^d$

$\mathcal{Z}_n^d$ – d-мерная $(0,1)$-матрица порядка n,
$z_\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$ нечетно.

Вес каждой линии в $\mathcal{Z}_n^d$ равен $n/2$.

$\mathcal{Z}_n^d$ можно представить как матрицу, составленную из нулевых и единичных блоков порядка $n/2$.

Если d нечетно и $n \equiv 2 \mod 4$, то перманент $\mathcal{Z}_n^d$ равен нулю.

Доказательство для $d = 3$

$$\mathcal{Z}_n^3 = \left(\begin{array}{cc|cc} x & \mathbf{0} & \mathbf{0} & n/2 - x \\ \mathbf{0} & n/2 - x & * & \mathbf{0} \end{array} \right)$$

Матрица $\mathcal{Z}_n^d$

$\mathcal{Z}_n^d$ – d-мерная $(0,1)$-матрица порядка n,
$z_\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$ нечетно.

Вес каждой линии в $\mathcal{Z}_n^d$ равен $n/2$.

$\mathcal{Z}_n^d$ можно представить как матрицу, составленную из нулевых и единичных блоков порядка $n/2$.

Если d нечетно и $n \equiv 2 \mod 4$, то перманент $\mathcal{Z}_n^d$ равен нулю.

Доказательство для $d = 3$

$$\mathcal{Z}_n^3 = \left(\begin{array}{cc|cc} x & \mathbf{0} & \mathbf{0} & n/2 - x \\ \mathbf{0} & n/2 - x & x & \mathbf{0} \end{array} \right)$$

Матрица $\mathcal{Z}_n^d$

$\mathcal{Z}_n^d$ – d-мерная $(0,1)$-матрица порядка n,
$z_\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$ нечетно.

Вес каждой линии в $\mathcal{Z}_n^d$ равен $n/2$.

$\mathcal{Z}_n^d$ можно представить как матрицу, составленную из нулевых и единичных блоков порядка $n/2$.

Если d нечетно и $n \equiv 2 \mod 4$, то перманент $\mathcal{Z}_n^d$ равен нулю.

Доказательство для $d = 3$

$$\mathcal{Z}_n^3 = \left(\begin{array}{cc|cc} x & \mathbf{0} & \mathbf{0} & n/2 - x \\ \mathbf{0} & n/2 - x & x & \mathbf{0} \end{array} \right)$$

$2x = n/2 \Rightarrow n \equiv 0 \mod 4$. Противоречие.

Divisibility barrier

Пусть H_{db} – d-гиперграф на n вершинах,
его гиперребра – наборы из d вершин, имеющие пересечение четной мощности с фиксированным множеством S нечетной мощности,
$(n-2)/2 \leq |S| \leq (n+1)/2$.

Divisibility barrier

Пусть H_{db} – d-гиперграф на n вершинах,
его гиперребра – наборы из d вершин, имеющие пересечение четной мощности с фиксированным множеством S нечетной мощности, $(n-2)/2 \leq |S| \leq (n+1)/2$.

$\delta_1(H_{db}) = n/2 - d + c$, в H_{db} нет совершенных паросочетаний.

Divisibility barrier

Пусть H_{db} – d-гиперграф на n вершинах,
его гиперребра – наборы из d вершин, имеющие пересечение четной мощности с фиксированным множеством S нечетной мощности,
$(n-2)/2 \leq |S| \leq (n+1)/2$.

$\delta_1(H_{db}) = n/2 - d + c$, в H_{db} нет совершенных паросочетаний.

Матрица смежности H_{db} имеет тот же вид, что и матрица $\mathcal{Z}_n^d$.

Совершенные паросочатения в d-дольных d-гиперграфах

Теорема (Aharoni, Georgakopoulos, Sprüssel, 2009)

Пусть H – d-дольный d-гиперграф с долями $V_1, \ldots, V_d$ мощности n. Если для любого допустимого $S \subset V \setminus V_1$, $|S| = d - 1$ верно $deg(S) > \frac{n}{2}$ и для любого допустимого $S' \subset V \setminus V_2$, $|S'| = d - 1$ выполнено $deg(S') \geq \frac{n}{2}$, то в H есть совершенное паросочетание.

Совершенные паросочетания в d-дольных d-гиперграфах

Теорема (Aharoni, Georgakopoulos, Sprüssel, 2009)

Пусть H – d-дольный d-гиперграф с долями $V_1, \ldots, V_d$ мощности n. Если для любого допустимого $S \subset V \setminus V_1$, $|S| = d - 1$ верно $deg(S) > \frac{n}{2}$ и для любого допустимого $S' \subset V \setminus V_2$, $|S'| = d - 1$ выполнено $deg(S') \geq \frac{n}{2}$, то в H есть совершенное паросочетание.

Эквивалентная теорема

Пусть A – d-мерная $(0, 1)$-матрица порядка n. Если для всех линий Γ одного направления верно $w(\Gamma) > \frac{n}{2}$, а для всех линий Γ' другого направления выполнено $w(\Gamma') \geq \frac{n}{2}$, то перманент A больше нуля.

Совершенные паросочетания в d-дольных d-гиперграфах

Теорема (Aharoni, Georgakopoulos, Sprüssel, 2009)

Пусть H – d-дольный d-гиперграф с долями $V_1, \dots, V_d$ мощности n. Если для любого допустимого $S \subset V \setminus V_1$, $|S| = d - 1$ верно $deg(S) > \frac{n}{2}$ и для любого допустимого $S' \subset V \setminus V_2$, $|S'| = d - 1$ выполнено $deg(S') \geq \frac{n}{2}$, то в H есть совершенное паросочетание.

Эквивалентная теорема

Пусть A – d-мерная $(0, 1)$-матрица порядка n. Если для всех линий Γ одного направления верно $w(\Gamma) > \frac{n}{2}$, а для всех линий Γ' другого направления выполнено $w(\Gamma') \geq \frac{n}{2}$, то перманент A больше нуля.

Условия в теоремах неулучшаемы из-за матрицы $\mathcal{Z}_n^d$.

Латинские квадраты и гиперкубы

3-мерный латинский гиперкуб порядка 4

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc}
\mathbf{0} & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 3 & 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & \mathbf{3} & 2 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 3 & 2 & 0 & \mathbf{1} & 2 & 3 & 3 & 2 & \mathbf{1} & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \\
2 & 3 & 0 & 1 & 3 & \mathbf{2} & 1 & 0 & 0 & 1 & \mathbf{2} & 3 & 1 & 0 & 3 & 2 \\
3 & 2 & 1 & \mathbf{0} & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 2 & \mathbf{3}
\end{array}\right)$$

d-мерный латинский гиперкуб Q порядка n – это d-мерная матрица порядка n, заполненная n символами так, что символы не повторяются в линиях.

2-мерные латинские гиперкубы называются латинскими квадратами.

Латинские квадраты и гиперкубы

3-мерный латинский гиперкуб порядка 4

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 3 & 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \\
2 & 3 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 3 & 2 \\
3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3
\end{array}\right)$$

d-мерный латинский гиперкуб Q порядка n – это d-мерная матрица порядка n, заполненная n символами так, что символы не повторяются в линиях.

2-мерные латинские гиперкубы называются латинскими квадратами.

Латинские квадраты = таблицы Кэли бинарных квазигрупп.
d-мерные латинские гиперкубы = таблицы Кэли d-арных квазигрупп.

Латинские квадраты и гиперкубы

3-мерный латинский гиперкуб порядка 4

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc}
\color{blue}{0} & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 3 & 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & \color{red}{3} & 2 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 3 & 2 & 0 & \color{blue}{1} & 2 & 3 & 3 & 2 & \color{red}{1} & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \\
2 & 3 & 0 & 1 & 3 & \color{red}{2} & 1 & 0 & 0 & 1 & \color{blue}{2} & 3 & 1 & 0 & 3 & 2 \\
3 & 2 & 1 & \color{red}{0} & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 2 & \color{blue}{3}
\end{array}\right)$$

d-мерный латинский гиперкуб Q порядка n – это d-мерная матрица порядка n, заполненная n символами так, что символы не повторяются в линиях.

2-мерные латинские гиперкубы называются латинскими квадратами.

> Латинские квадраты $=$ таблицы Кэли бинарных квазигрупп.
> d-мерные латинские гиперкубы $=$ таблицы Кэли d-арных квазигрупп.

Трансверсаль в латинском гиперкубе – это диагональ, на которой все символы различны.

Латинские квадраты и гиперкубы

3-мерный латинский гиперкуб порядка 4

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 3 & 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

d-мерный латинский гиперкуб Q порядка n – это d-мерная матрица порядка n, заполненная n символами так, что символы не повторяются в линиях.

2-мерные латинские гиперкубы называются латинскими квадратами.

Латинские квадраты = таблицы Кэли бинарных квазигрупп.
d-мерные латинские гиперкубы = таблицы Кэли d-арных квазигрупп.

Трансверсаль в латинском гиперкубе – это диагональ, на которой все символы различны.

Частичная трансверсаль длины ℓ в латинском гиперкубе – это частичная диагональ длины ℓ, в которой все символы различны.

Латинские гиперкубы и гиперграфы

Любой d-мерный латинский гиперкуб Q порядка n соответствует сбалансированному $(d+1)$-дольному гиперграфу H с долями мощности n, в котором выбор любой $d-1$ вершины из разных долей однозначно определяет последнюю вершину гиперребра.

$$q_{\alpha_1,\dots,\alpha_d} = \alpha_0 \Leftrightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_d) \in W(H).$$

Латинские гиперкубы и гиперграфы

Любой d-мерный латинский гиперкуб Q порядка n соответствует сбалансированному $(d+1)$-дольному гиперграфу H с долями мощности n, в котором выбор любой $d-1$ вершины из разных долей однозначно определяет последнюю вершину гиперребра.

$$q_{\alpha_1,\dots,\alpha_d} = \alpha_0 \Leftrightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_d) \in W(H).$$

Трансверсаль в латинском гиперкубе Q = совершенное паросочетание в гиперграфе H.

Латинские гиперкубы и гиперграфы

Любой d-мерный латинский гиперкуб Q порядка n соответствует сбалансированному $(d+1)$-дольному гиперграфу H с долями мощности n, в котором выбор любой $d-1$ вершины из разных долей однозначно определяет последнюю вершину гиперребра.

$$q_{\alpha_1,\dots,\alpha_d} = \alpha_0 \Leftrightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_d) \in W(H).$$

Трансверсаль в латинском гиперкубе Q = совершенное паросочетание в гиперграфе H.

Частичная трансверсаль длины ℓ в латинском гиперкубе Q = паросочетание мощности ℓ в гиперграфе H.

Латинские гиперкубы и стохастические матрицы

Любой d-мерный латинский гиперкуб порядка n соответствует $(d+1)$-мерной 1-стохастической $(0,1)$-матрице того же порядка.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Латинские гиперкубы и стохастические матрицы

Любой d-мерный латинский гиперкуб порядка n соответствует $(d+1)$-мерной 1-стохастической $(0,1)$-матрице того же порядка.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Число трансверсалей в латинском гиперкубе $=$ перманент соответствующей $(0,1)$-матрицы.

Гипотезы и теоремы о частичных трансверсалях

Гипотеза (Brualdi, 1991)

В латинских квадратах порядка n есть частичная трансверсаль длины $n-1$.

Гипотезы и теоремы о частичных трансверсалях

Гипотеза (Brualdi, 1991)

В латинских квадратах порядка n есть частичная трансверсаль длины $n-1$.

Теорема (Keevash, Pokrovsky, Sudakov, Yepremyan, 2022)

В латинских квадратах порядка n есть частичная трансверсаль длины $n - O(\frac{\log n}{\log \log n})$.

Гипотезы и теоремы о частичных трансверсалях

Гипотеза (Brualdi, 1991)

В латинских квадратах порядка n есть частичная трансверсаль длины $n-1$.

Теорема (Keevash, Pokrovsky, Sudakov, Yepremyan, 2022)

В латинских квадратах порядка n есть частичная трансверсаль длины $n - O(\frac{\log n}{\log \log n})$.

Теорема (Goddyn, Halasz, 2020)

В таблице Кэли любой группы порядка n есть частичная трансверсаль длины $n-1$.

Гипотезы и теоремы о частичных трансверсалях

Гипотеза (Т., 2021)

В любом латинском гиперкубе порядка n есть частичная трансверсаль длины $n-1$.

Гипотезы и теоремы о частичных трансверсалях

Гипотеза (Т., 2021)

В любом латинском гиперкубе порядка n есть частичная трансверсаль длины $n-1$.

Теорема (Т., 2021)

Если латинский гиперкуб Q – это таблица Кэли d-итерированной группы порядка n, то при достаточно больших d в Q есть частичная трансверсаль длины $n-1$.

Гипотезы о трансверсалях

Гипотеза (Ryser, 1967)

В любом латинском квадрате нечетного порядка есть трансверсаль.

Гипотезы о трансверсалях

Гипотеза (Ryser, 1967)

В любом латинском квадрате нечетного порядка есть трансверсаль.

Гипотеза (Wanless, 2011)

В любом латинском гиперкубе нечетной размерности или нечетного порядка есть трансверсаль.

Гипотезы о трансверсалях

Гипотеза (Ryser, 1967)

В любом латинском квадрате нечетного порядка есть трансверсаль.

Гипотеза (Wanless, 2011)

В любом латинском гиперкубе нечетной размерности или нечетного порядка есть трансверсаль.

Все известные примеры 1-стохастических матриц с нулевым перманентом имеют нечетную размерность или четный порядок.

Гипотезы о трансверсалях

Гипотеза (Ryser, 1967)

В любом латинском квадрате нечетного порядка есть трансверсаль.

Гипотеза (Wanless, 2011)

В любом латинском гиперкубе нечетной размерности или нечетного порядка есть трансверсаль.

Все известные примеры 1-стохастических матриц с нулевым перманентом имеют нечетную размерность или четный порядок.

Гипотеза (Т., 2016)

Перманент любой 1-стохастической матрицы четной размерности или нечетного порядка больше нуля.

Обзор частичных результатов

Гипотеза (Т., 2016)

Перманент любой 1-стохастической матрицы четной размерности или нечетного порядка больше нуля.

n \ d	2	3	4	5	6	7	...	2k	2k+1
2	+		+		+		...	+	
3	+	+	+	+	+	+	...	+	+
4	+		+		(0,1)		...	(0,1)	
5	+	(0,1)	(0,1)	(0,1)	(0,1)		...		
6	+		(0,1)				...		
7	+	(0,1)					...		
8	+						...		
9	+	(0,1)					...		
10	+						...		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮			
2m	+							+ (0,1)	
2m+1	+	(0,1)						+ (0,1)	+ (0,1)

Число трансверсалей

Теорема (Т., 2015; Glebov, Luria, 2016)

Если $T(n)$ – максимальное число трансверсалей в латинских квадратах порядка n, то

$$T(n) = \left((1+o(1))\frac{n}{e^2}\right)^n.$$

Число трансверсалей

Теорема (Т., 2015; Glebov, Luria, 2016)

Если $T(n)$ – максимальное число трансверсалей в латинских квадратах порядка n, то

$$T(n) = \left((1 + o(1))\frac{n}{e^2}\right)^n.$$

Теорема (Eberhard, Manners, Mrazović, 2022)

Если в группе G – порядка n верно условие Холла и Пейджа, то число трансверсалей в таблице Кэли G равно

$$(e^{-1/2} + o(1))\frac{n!^2}{|G'|n^{n-1}}$$

при $n \to \infty$, где G' – коммутант G.

Трансверсали в группах

Теорема (Eberhard, Manners, Mrazović, 2022)

Если в группе G – порядка n верно условие Холла и Пейджа, то число трансверсалей в таблице Кэли G равно

$$(e^{-1/2} + o(1))\frac{n!^2}{|G'|n^{n-1}}$$

при $n \to \infty$, где G' – коммутант G.

Теорема (Т., 2021)

Если в группе G – порядка n верно условие Холла и Пейджа, то число трансверсалей в d-мерной таблице Кэли d-итерированной группы $G[d]$ равно

$$(1 + o(1))\frac{n!^d}{|G'|n^{n-1}}$$

при $d \to \infty$, где G' – коммутант G.

Спасибо за внимание!