# Уравнения в группах и цепочки централизаторов

А.В. Трейер

Институт математики им. С.Л. Соболева

15 Июля

# Уравнения в группах

Пусть $\mathcal{L}_{gr} = \{\cdot^{(2)}, ^{-1}, 1\}$ стандартный групповой язык.

$G$ — некоторая группа.

Мы будем рассматривать уравнения в языке с константами, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{gr} \cup \{G\}$, так называемые диофантовы уравнения.

Пусть $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ – конечное множество переменных, $t(\mathbf{x})$ это терм языка $\mathcal{L}$ от переменных $\mathbf{x}$.

Примеры термов: $xy^{-2}g$, $[x, a]$, $x_1 \ldots x_n$.

# Уравнения в группах

Формула вида $t(\mathbf{x}) = 1$ называется уравнением в языке $\mathcal{L}$ от переменных $\mathbf{x}$. Любое множество уравнений языка $\mathcal{L}$ от неизвестных $\mathbf{x}$ называется системой уравнений.

**Примеры.** $[x, y] = 1, \ x^n = 1, \ [x, g] = 1$.

Точка $\mathbf{a} \in G^n$ является решением уравнения $t(\mathbf{x}) = 1$, если $t(a) = 1$ истинно в группе $G$. Решение системы уравнений является решением каждого уравнения этой системы.

# Уравнения в группах

Формула вида $t(\mathbf{x}) = 1$ называется уравнением в языке $\mathcal{L}$ от переменных $\mathbf{x}$. Любое множество уравнений языка $\mathcal{L}$ от неизвестных $\mathbf{x}$ называется системой уравнений.

**Примеры.** $[x, y] = 1, \ x^n = 1, \ [x, g] = 1$.

Точка $\mathbf{a} \in G^n$ является решением уравнения $t(\mathbf{x}) = 1$, если $t(a) = 1$ истинно в группе $G$. Решение системы уравнений является решением каждого уравнения этой системы.

Две системы уравнений $S_1(\mathbf{x})$ и $S_2(\mathbf{x})$ языка $L$ называются эквивалентными над $G$ если их множества решений совпадают.

# Нетеровость по уравнениям

**Определение.** *Алгебраическая система* $A$ *называется нетеровой по уравнениям, если для любого натурального* $n$ *любая система уравнений* $S(\boldsymbol{x})$ *от* $n$ *неизвестных* $\boldsymbol{x}$ *эквивалентна своей конечной подсистеме* $S_0(\boldsymbol{x}) \subset S(\boldsymbol{x})$.

**Э.Ю. Даниярова, А.Г. Мясников, В.Н. Ремесленников**
**Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами,**
**Изд-во СО РАН, Новосибирск, 2016.**

# Примеры

Нетеровы по уравнениям группы:

- Абелевы группы;
- Конечные группы;
- Линейные группы (свободные группы, конечнопорожденные нильпотентные и метабелевы группы);
- Жесткие группы, свободные разрешимые группы;
- Гиперболические группы без кручения;

Эквационально ненетеровы алгебраические системы:

- $A wr B$, $A$ – неабелева, $B$ – бесконечна. **G. Baumslag, A.Miasnikov, V.Roman'kov Two theorems about equationally noetherian groups, JoA, 1997**
- $G^{\omega}$, $G$ – неабелева группа. **M. Shahryari, A.Shevlyakov Direct products, varieties, and compactness conditions, GCC, 2017**;
- Некоторые бесконечно порожденные нильпотентные группы, конечнопорожденные центрально-метабелевы группы. **Ch. K. Gupta, N. S. Romanovskii, "The property of being equationally Noetherian for some soluble groups", Algebra and Logic, 46:1 (2007), 28–36**
- Некоторые моноиды, полугруппы

# Лемма Котова

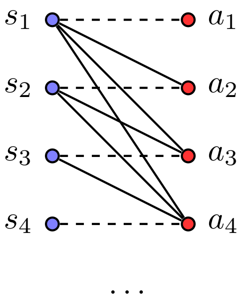
Котов М.В. О свойстве нетеровости по уравнениям, Вестник Омского Университета, 2013, 2, 24-28.

**Лемма.** *Алгебраическая система* $A = \langle A, \mathcal{L} \rangle$ *не является эквационально нетеровой тогда и только тогда, когда существует последовательность* $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $a_i \in A^n$ *и последовательность уравнений* $(s_i(x))_{i \in \mathbb{N}}$ *языка* $\mathcal{L}$, *такие что* $A \not\models s_i(a_i)$ *для любого* $i$, *и* $A \models s_j(a_i)$ *для любых* $j < i$.

# Лемма Котова

Котов М.В. О свойстве нетеровости по уравнениям, Вестник Омского Университета, 2013, 2, 24-28.

**Лемма.** *Алгебраическая система* $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{L} \rangle$ *не является эквационально нетеровой тогда и только тогда, когда существует последовательность* $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $a_i \in A^n$ *и последовательность уравнений* $(s_i(x))_{i\in\mathbb{N}}$ *языка* $\mathcal{L}$, *такие что* $\mathcal{A} \not\models s_i(a_i)$ *для любого* $i$, *и* $\mathcal{A} \models s_j(a_i)$ *для любых* $j < i$.



# Примеры. Простые графы. Бесконечная клика.

Пусть $L = \{E(x,y)\}$, $!E(x,x)$.

Пусть $\Gamma = \{a_1, a_2 \ldots,\}$ — бесконечная клика.

# Примеры. Простые графы. Бесконечная клика.

Пусть $L = \{E(x,y)\}$, $!E(x,x)$.

Пусть $\Gamma = \{a_1, a_2 \ldots, \}$ — бесконечная клика.

$$\begin{cases} E(x,a_1) & \qquad\qquad\qquad a_1 \\ E(x,a_2) & \qquad\qquad\qquad a_2 \\ \quad\vdots & \qquad\qquad\qquad \vdots \\ E(x,a_i) & \qquad\qquad\qquad a_i \\ \quad\vdots & \qquad\qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

По лемме Котова, бесконечная клика не является эквационально нетеровой. Но она станет нетеровой если мы отменим правило $!E(x,x)$.

# Бесконечное прямое произведение неабелевых групп

Положим $G = \prod_i^\infty G_i$ и $a_i = (1, \ldots, 1, a_i', 1, \ldots) \in G$, где $a_i' \in G_i$ и $a_i'$ нецентральный элемент в $G_i$ и $b_i' \in G_i,\ [a_i', b_i'] \neq 1$. Тогда $G$ не является эквационально нетеровой.

# Бесконечное прямое произведение неабелевых групп

Положим $G = \prod_i^\infty G_i$ и $a_i = (1, \ldots, 1, a_i', 1, \ldots) \in G$, где $a_i' \in G_i$ и $a_i'$ нецентральный элемент в $G_i$ и $b_i' \in G_i,\ [a_i', b_i'] \neq 1$. Тогда $G$ не является эквационально нетеровой.

$$\begin{cases} [x, b_1] & = & 1 & \qquad\qquad\qquad a_1 \\ [x, b_2] & = & 1 & \qquad\qquad\qquad a_2 \\ \quad\vdots & & & \qquad\qquad\qquad \vdots \\ [x, b_i] & = & 1 & \qquad\qquad\qquad a_i \\ \quad\vdots & & & \qquad\qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

Существует ослабленная версия свойства нетеровости по уравнениям:

Существует ослабленная версия свойства нетеровости по уравнениям:

**Определение.** Пусть $n$ натуральное число. Будем говорить, что алгебраическая система $A$ $n$-нетерова по уравнениям если любая система уравнений от $n$ неизвестных эквивалентна своей конечной подсистеме.

*G. Baumslag, A. Miasnikov, V. Remeslennikov, Algebraic geometry over groups I. Algebraic sets and ideal theory. Journal of Algebra,* **219** *(1999) 16-79.*

**Problem.** *Let a group $G = \langle G, L_G \rangle$ is $1$-equationally noetherian. Does it follow that $G$ is equationally noetherian?*

М.В. Котов доказал, что для любого натурального $n$ существует алгебраическая система которая $n$-эквационально нетерова, но не является нетеровой в общем.

М.В. Котов доказал, что для любого натурального $n$ существует алгебраическая система которая $n$-эквационально нетерова, но не является нетеровой в общем.

Несложно показать, что для бинарных предикатных алгебраических систем (графы, порядки и т.п.) свойства $1$-нетеровости и нетеровости по уравнениям эквивалентны.

М.В. Котов доказал, что для любого натурального $n$ существует алгебраическая система которая $n$-эквационально нетерова, но не является нетеровой в общем.

Несложно показать, что для бинарных предикатных алгебраических систем (графы, порядки и т.п.) свойства $1$-нетеровости и нетеровости по уравнениям эквивалентны.

Получено описание всех нетеровых простых графов (совместно с И. Бучинским).

# Цепочки централизаторов

Пусть $g \in G$, тогда множество: $C(g) = \{h \in G | [g, h] = 1\}$ назовем централизатором элемента $g$ в группе $G$.

Пусть $M \subset G$, тогда $C(M) = \bigcap_{g \in M} C(g)$.

# Цепочки централизаторов

Пусть $g \in G$, тогда множество: $C(g) = \{h \in G | [g, h] = 1\}$ назовем централизатором элемента $g$ в группе $G$.

Пусть $M \subset G$, тогда $C(M) = \bigcap_{g \in M} C(g)$.

Пусть в группе $G$ существует бесконечная строго убывающая цепочка централизаторов: $G > C(M_1) > C(M_2) > \ldots > C(M_i) > \ldots$.

# Цепочки централизаторов

Пусть $g \in G$, тогда множество: $C(g) = \{h \in G | [g, h] = 1\}$ назовем централизатором элемента $g$ в группе $G$.

Пусть $M \subset G$, тогда $C(M) = \bigcap_{g \in M} C(g)$.

Пусть в группе $G$ существует бесконечная строго убывающая цепочка централизаторов: $G > C(M_1) > C(M_2) > \ldots > C(M_i) > \ldots$.

Тогда существуют элементы $m_1 \in M_1, \ldots m_i \in M_i, \ldots$ и $a_0 \in G, a_1 \in C(M_1), \ldots, a_i \in C(M_i), \ldots$

# Цепочки централизаторов

Пусть $g \in G$, тогда множество: $C(g) = \{h \in G | [g,h] = 1\}$ назовем централизатором элемента $g$ в группе $G$.

Пусть $M \subset G$, тогда $C(M) = \bigcap_{g \in M} C(g)$.

Пусть в группе $G$ существует бесконечная строго убывающая цепочка централизаторов: $G > C(M_1) > C(M_2) > \ldots > C(M_i) > \ldots$.

Тогда существуют элементы $m_1 \in M_1, \ldots m_i \in M_i, \ldots$ и $a_0 \in G, a_1 \in C(M_1), \ldots, a_i \in C(M_i), \ldots$

$$\begin{cases} [x, m_1] & = & 1 & & a_0 \\ [x, m_2] & = & 1 & & a_1 \\ \quad\vdots & & & & \vdots \\ [x, m_i] & = & 1 & & a_{i-1} \\ \quad\vdots & & & & \vdots \end{cases}$$

# От цепочки централизаторов к уравнениям

**Теорема 1.** Если в группе $G$ существует строго убывающая бесконечная цепочка централизаторов, тогда $G$ не является нетеровой по уравнениям от одной переменной.

# От цепочки централизаторов к уравнениям

**Теорема 1.** Если в группе $G$ существует строго убывающая бесконечная цепочка централизаторов, тогда $G$ не является нетеровой по уравнениям от одной переменной.

Можем ли мы обратить теорему 1? В общем случае не можем.

# Случай двуступенно нильпотентных групп.

**Теорема 2.** *Пусть $G$ двуступенно нильпотентная группа без кручения не являющаяся нетеровой по уравнениям от одной переменной. Тогда существует строго убывающая цепочка централизаторов в $G$ сколь угодно большой длины.*

# Случай двуступенно нильпотентных групп.

**Теорема 2.** *Пусть $G$ двуступенно нильпотентная группа без кручения не являющаяся нетеровой по уравнениям от одной переменной. Тогда существует строго убывающая цепочка централизаторов в $G$ сколь угодно большой длины.*

$$y^n \; a \; [y, m] \; c = 1$$

# Случай двуступенно нильпотентных групп.

**Теорема 2.** *Пусть $G$ двуступенно нильпотентная группа без кручения не являющаяся нетеровой по уравнениям от одной переменной. Тогда существует строго убывающая цепочка централизаторов в $G$ сколь угодно большой длины.*

$$y^n \; a \; [y, m] \; c = 1$$

$$\begin{cases} [y, m_1]c_1 & = & 1 & & a_1 \\ [y, m_2]c_2 & = & 1 & & a_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ [y, m_i]c_i & = & 1 & & a_i \\ \vdots & & & & \vdots \end{cases}$$

$$\begin{cases} [y, m_1]c_1 & = & 1 & & a_1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ [y, m_n]c_n & = & 1 & & a_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} [y, m_1]c_1 & = & 1 & & a_1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ [y, m_n]c_n & = & 1 & & a_n \end{cases}$$

Пусть $y'$ — решение. Положим $y = x\ y'$

$$\begin{cases} [y, m_1]c_1 & = & 1 & & a_1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ [y, m_n]c_n & = & 1 & & a_n \end{cases}$$

Пусть $y'$ — решение. Положим $y = x\ y'$

$$\begin{cases} [x, m_1] & = & 1 & & a_1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ [x, m_n] & = & 1 & & a_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} [y,m_1]c_1 &= 1 & \qquad\qquad a_1 \\ \quad\vdots & & \qquad\qquad \vdots \\ [y,m_n]c_n &= 1 & \qquad\qquad a_n \end{cases}$$

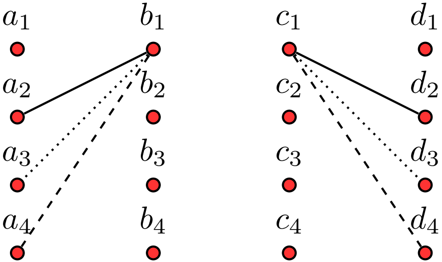
Пусть $y'$ — решение. Положим $y = x\ y'$

$$\begin{cases} [x,m_1] &= 1 & \qquad\qquad a_1 \\ \quad\vdots & & \qquad\qquad \vdots \\ [x,m_n] &= 1 & \qquad\qquad a_n \end{cases}$$

$$C(m_1) > C(m_1, m_2) > \ldots > C(m_1, \ldots, m_n)$$

# Решение проблемы 1. Бесконечно порожденный случай.

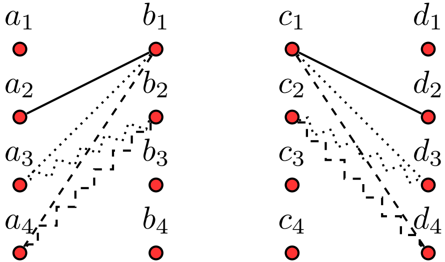
$$G = \langle a_1, \ldots, b_1, \ldots, c_1, \ldots, d_1, \ldots | R = \{[a_i, b_j] = [d_i, c_j], i > j\} \rangle_{\mathfrak{N}(2,\mathbb{Z})}$$




$\ldots$

# Решение проблемы 1. Бесконечно порожденный случай.

$$G = \langle a_1, \ldots, b_1, \ldots, c_1, \ldots, d_1, \ldots | R = \{[a_i, b_j] = [d_i, c_j], i > j\}\rangle_{\mathfrak{N}(2,\mathbb{Z})}$$




$\ldots$

# Система уравнений над $G$

Группа $G$ не является нетеровой, так как существует система уравнений $S$ и последовательность $(a_i, b_i) \in G^2$, такие, что лемма Котова выполнена для $S$ и $(a_i, b_i)$:

$$\begin{cases} [x, b_1][y, c_1] = 1 & (a_1, d_1) \\ [x, b_2][y, c_2] = 1 & (a_2, d_2) \\ \vdots & \vdots \\ [x, b_i][y, c_i] = 1 & (a_i, d_i) \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

# Уравнения от одной переменной.

По теореме 2, если группа $G$ не является $1$-нетеровой по уравнениям, то централизаторная размерность группы $G$ не конечна.

# Уравнения от одной переменной.

По теореме 2, если группа $G$ не является $1$-нетеровой по уравнениям, то централизаторная размерность группы $G$ не конечна.

Но можно показать, что $Cdim(G) = 2$.
$C(x) = \langle x \rangle \cdot G'$ если $x \notin Z(G)$.

# Конечнопорожденный случай

**Ch. K. Gupta, N. S. Romanovskii, "The property of being equationally Noetherian for some soluble groups", Algebra and Logic, 46:1 (2007), 28–36**

# Конечнопорожденный случай

**Ch. K. Gupta, N. S. Romanovskii, “The property of being equationally Noetherian for some soluble groups”, Algebra and Logic, 46:1 (2007), 28–36**

Пусть $D = F_2/[F_2'', F_2]$.

Группа $D$ называется центрально-метабелевой. Группа $D$ конечно порождена. Пусть $N$ двуступенно нильпотентная группа бесконечного ранга. Коммутант группы $D$ изоморфен группе $N$. Тогда $D/R$ содержит $G$ как подгруппу.

# Конечнопорожденный случай

**Ch. K. Gupta, N. S. Romanovskii, "The property of being equationally Noetherian for some soluble groups", Algebra and Logic, 46:1 (2007), 28–36**

Пусть $D = F_2/[F_2'', F_2]$.

Группа $D$ называется центрально-метабелевой. Группа $D$ конечно порождена. Пусть $N$ двуступенно нильпотентная группа бесконечного ранга. Коммутант группы $D$ изоморфен группе $N$. Тогда $D/R$ содержит $G$ как подгруппу.

**Theorem**

*Существует конечнопорожденная группа которая является нетеровой по уравнениям от одной переменной, но не является нетеровой по уравнениям.*