

# УСТОЙЧИВОСТЬ ФИГУР РАВНОВЕСИЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ КАПИЛЛЯРНОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ

И. В. Денисова  
ИПМаш. РАН, Санкт-Петербург

20 сентября 2024 г.

Исследуется равномерно вращающаяся конечная масса, состоящая из двух несмешивающихся вязких жидкостей. Это движение описывается задачей с неизвестными границами для системы Навье–Стокса. Поверхность раздела жидкостей считается замкнутой. Поверхностное натяжение действует как на границу раздела, так и на внешнюю свободную поверхность.

Задача о вращении изолированной несжимаемой жидкой массы вокруг фиксированной оси как твердого тела рассматривалась Ньютоном, Маклореном, Якоби, Ковалевской, Пуанкаре, Ляпуновым и другими учёными, которые исследовали в основном движение самогравитирующих жидкостей без учёта капиллярности. Капиллярные жидкости впервые изучались Глобой-Михайленко, Буссинеском и Шаррюо в начале 20 века. Последний дал подробный анализ проблемы, рассчитал форму фигур равновесия, включая тороидальный случай, и рассмотрел некоторые аспекты устойчивости (кн. Аппелля [1]).

Проблемой устойчивости вращения изолированной жидкой массы вокруг неподвижной оси занимались многие выдающиеся математики. Так, например, А. М. Ляпунов предложил анализировать устойчивость фигур равновесия вращающейся жидкой массы без поверхностного натяжения аналитическими методами [2]. Он исследовал вторую вариацию

функционала энергии относительно малых возмущений границы фигуры. Положительность этой вариации гарантирует устойчивость системы, поскольку в этом состоянии её энергия имеет минимум. Метод Ляпунова был обобщён на случай вращающейся капиллярной однофазной жидкости  $\Omega_t$  В.А. Солонниковым. Совместно с ним мы применили эту технику для анализа устойчивости вращения конечной массы двухслойной жидкости  $\overline{\Omega_t^+} \cup \Omega_t^-$ . Существование фигур равновесия  $\mathcal{F}^+$ ,  $\mathcal{F} \equiv \overline{\mathcal{F}^+} \cup \mathcal{F}^-$  в двухслойном случае для несжимаемой жидкости в виде вложенных приплюснутых шаров было также получено В.А. Солонниковым [3] (см. рис. 1).

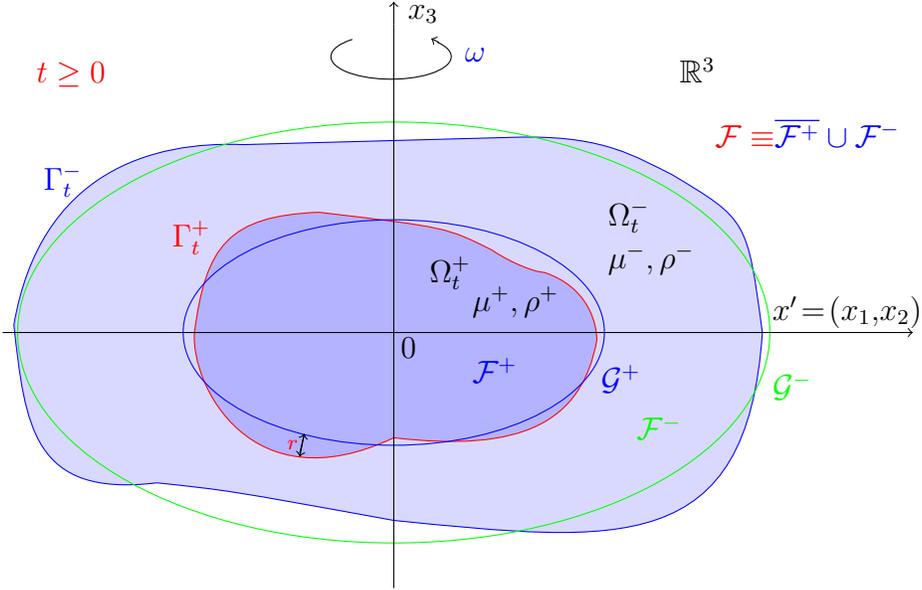


Рис. 1. Вращение двухслойной несжимаемой жидкости.

Доказывается устойчивость вращающейся двухслойной капли с самогравитацией при достаточной малости начальных данных, угловой скорости и экспоненциально убывающих массовых сил, а также положительности второй вариации функционала энергии. Доказательство основано на анализе малых возмущений состояния равновесия вращающейся двухслойной жидкости. В результате делается вывод, что возмущение осесимметричной фигуры равновесия экспоненциально стремится к нулю при неограниченном возрастании времени  $t$ , при этом движение капли  $\overline{\Omega_t^+} \cup \Omega_t^-$  переходит во вращение жидкой массы как твёрдого тела. Результат был получен как в пространствах Соболева—Слободецкого [4, 5],

так и в пространствах Гёльдера [6].

Кроме того, мы доказали существование фигур равновесия в двухслойном случае, когда одна из жидкостей (или обе) является сжимаемой. Мы предполагаем сжимаемую жидкость баротропной, т. е. давление  $p^-$  является известной возрастающей функцией плотности  $\rho$ :  $p^{-'}(\rho) > 0$ . Пусть несжимаемая жидкость с динамической вязкостью  $\mu^+$  находится внутри сжимаемой. Сжимаемая жидкость имеет динамические вязкости  $\mu^-$  и  $\mu_1^-$ , причём  $\mu^\pm > 0$ ,  $2\mu^- + 3\mu_1^- \geq 0$ . Кроме того, пусть  $\rho = \rho(|x'|)$ ,  $x' = (x_1, x_2, 0)$ .

Далее предположим, что фигуры равновесия  $\mathcal{F}^+$ ,  $\mathcal{F} \equiv \overline{\mathcal{F}^+} \cup \mathcal{F}^-$  представляют собой почти шарообразные области с радиусами  $R_0^\pm$  ( $R_0^+ < R_0^-$ ) соответственно, а движение жидкостей близко к состоянию покоя, т. е. скорость мала, а плотность  $\rho$  мало отличается от ступенчатой функции  $\rho^\pm > 0$  (см. рис. 2).

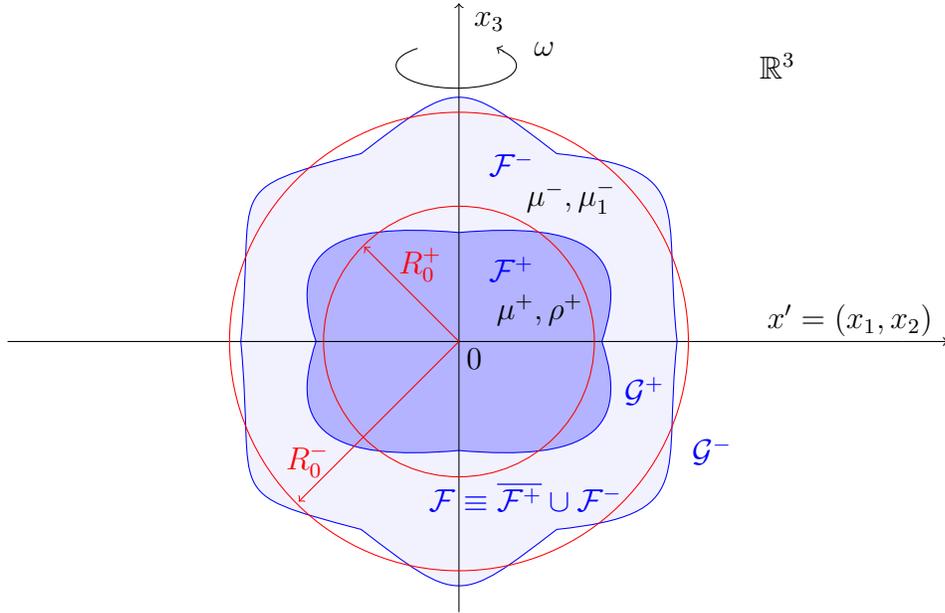


Рис. 2. Фигуры равновесия для двухфазной жидкости.

Если функция давления задается гладкой растущей функцией плотности для сжимаемой жидкости, а данные задачи удовлетворяют некоторому условию, то для двухфазной [7](двухслойной сжимаемой [8]) жидкости при малом угловом моменте существуют осесимметричные фигуры равновесия, близкие к вложенным шарам.

Дальнейшая наша цель — изучение устойчивости полученных равновесных фигур.

Заметим, что гравитация жидкостей не учитывается. Двухфазное тело, вращающееся с постоянной угловой скоростью, описывает, например, некоторую планету с газообразной атмосферой.

Работа выполнена по теме государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ для ИПМаш РАН № 124040800009-8.

## Список литературы

- [1] Аппель П. Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости, *Главная редакция общетехнической литературы* (сокр. ОНТИ) Ленинград– Москва, 1936, 375 с.
- [2] Ляпунов А. М. *Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости*, Издание АН (1884) (Собр. сочин., т. 3, АН СССР, М., 1959. – С. 5–113).
- [3] Солонников В. А. *Задача о нестационарном движении двух вязких несжимаемых жидкостей*, Проб. мат. анализа, (2006) **34**, 103–121.
- [4] Denisova I. V., Solonnikov V. A. *Stability of the rotation of a two-phase drop with self-gravity*, Зап. научн. семин. ПОМИ, **508**, (2021), 89–123.
- [5] Denisova I. V., Solonnikov V. A. *Rotation Problem for a Two-Phase Drop*, J. Math. Fluid Mech. **24**(2) (2022), 40.
- [6] Denisova I. V., Solonnikov V. A. *Hölder Space Theory for the Rotation Problem of Two-Phase Drop*, Mathematics (2022), **10**(24), 4799.
- [7] Денисова И.В. *Существование фигур равновесия вращающейся капиллярной двухфазной жидкости*. Алгебра и анализ (2024) **36** (3), 62–80.
- [8] Denisova I. V., Solonnikov V. A. *Equilibrium Figures for a Rotating Compressible Capillary Two-Layer Liquid*. SI: Mathematical Problems in Fluid Mechanics, Mathematics. (2024) **12** (1), 94.

**Денисова Ирина Владимировна**, Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург **e-mail:** denisovairinavlad@gmail.com