РЕШЕНИЯ ИМПУЛЬСНЫХ *p(x,t)*-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫМ УДАРНЫМ СЛОЕМ

С.А. Саженков

ИГиЛ СО РАН, Новосибирск и АлтГУ, Барнаул

Доклад посвящен исследованию начально-краевой задачи для *p(x,t)*-параболического уравнения с регулярным нелинейным младшим членом:

$$\partial_t u = \mathrm{div}_x\big(|\nabla_x u|^{p(x,t)-2}\nabla_x u\big) - a\varphi_n(t)|u|^{q(x,t)-2}u \ \text{ в } Q_T,$$

$$u(x,0) = u_0(x) \ \text{ в } \Omega, \quad u = 0 \ \text{ на } \partial\Omega\times(0,\mathrm{T}).$$

В этой постановке, $\Omega\subset\mathbb{R}^d_x$ $(d\ge 2)$ – ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, $T=\mathrm{const}>0$ – произвольно заданный момент времени, $Q_T=\Omega\times(0,\mathrm{T})$ – пространственно-временной цилиндр, $a=\mathrm{const}>0$ – заданный коэффициент абсорбции. Функция $u=u(x,t)$ является искомой. Начальная функция u_0 и показатели $p(x,t)$ и $q(x,t)$ заданы. Неотрицательное гладкое ядро $\varphi_n(t)$ также задано. При этом, $\varphi_n(t)$ зависит от параметра $n\in\mathbb{N}$, носитель φ_n лежит на интервале $[0,1/n]$ и при $n\to\infty$ последовательность $\{\varphi_n\}$ слабо* сходится в пространстве мер Радона к дельта-функции Дирака, сосредоточенной в нуле. Такая структура младшего члена $a\varphi_n(t)|u|^{q(x,t)-2}u$ означает, что он моделирует не мгновенное, но очень короткое по времени явление абсорбции с показателем роста $q(x,t)$, и что в пределе при $n\to\infty$ явление абсорбции становится мгновенным, сосредоточенным в начальный момент времени. Дополнительно, в постановке допускается, что показатель $q(x,t)$ может принимать значения больше двух. Такое условие общепринято называется нестандартным условием роста.

Первым главным результатом исследования является обоснование корректности изучаемой задачи при фиксированных значениях $n\in\mathbb{N}$, а именно, доказательство существования и единственности регулярных слабых решений $u_n=u_n(x,t)$.

Вторым главным результатом исследования является проведение и обоснование предельного перехода при $n\to\infty$. Устанавливается, что при $n\to\infty$ формируется инфинитезимальный начальный слой, ассоциированный с дельта-функцией Дирака, и семейство регулярных слабых решений u_n исходной постановки сходится к «сильному-слабому» решению предельной двухмасштабной микроскопически-макроскопической модели, причем решение предельной модели единственно. В рамках предельной модели, инфинитезимальный начальный слой формулируется как задача Коши для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения, поставленная на микроскопической («сверхбыстрой») шкале времени, включающая в себя пространственную переменную x в качестве параметра и содержащая полную информацию о профиле импульсной абсорбции.

В завершение исследования, выделяются три широких класса данных задачи, для которых задача на инфинитезимальном слое достаточно просто решается явно, что позволяет сформулировать предельную задачу только в терминах макроскопических независимых переменных x и t и зависимой переменной $u=\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

Исследование выполнено в соавторстве с С.Н. Антонцевым (ИГиЛ СО РАН), И.В. Кузнецовым (ИГиЛ СО РАН) и С.И. Шмарёвым (университет Овьедо, Испания) и в полном виде опубликовано в журнале Nonlinear Analysis: Real World Applications, 80 (2024), art. id 104162, https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2024.104162.

Исследование поддержано Министерством науки и высшего образования Российской федерации (проект FZMW-2024-0003).