Об экзотических собственных значениях графов с малыми ребрами

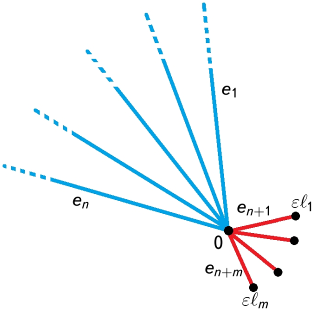
Д.И. Борисов, Г. Берколайко, М. Кинг

Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН

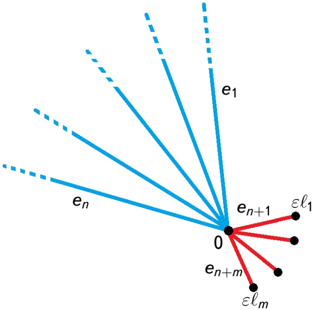
“Уравнения с частными производными и их приложения”

Исследование выполнено за счёт Российского научного фонда, грант № 23-11-00009, https://rscf.ru/project/23-11-00009/

Граф



Граф

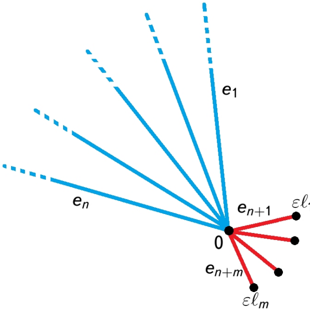


$$\mathcal{H}_\varepsilon = -\frac{d^2}{dx^2}, \quad \varepsilon \to +0,$$

$$P_D U = 0, \qquad P_R U' + K P_R U = 0,$$

$$\mathcal{H}_\varepsilon^* = \mathcal{H}_\varepsilon, \quad K = K^*,$$

Граф



$$\mathcal{H}_\varepsilon = -\frac{d^2}{dx^2}, \quad \varepsilon \to +0,$$

$$P_D U = 0, \qquad P_R U' + K P_R U = 0,$$

$$\mathcal{H}_\varepsilon^* = \mathcal{H}_\varepsilon, \quad K = K^*,$$

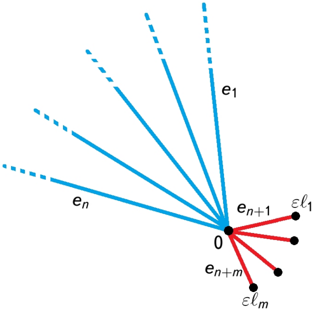
$$U,\ U' \in \mathbb{C}^{n+2m}, \quad P_D,\ P_R : \mathbb{C}^{n+2m} \to \mathbb{C}^{n+2m},$$

$$P_D + P_R = E, \quad P_D^2 = P_D, \quad P_R^2 = P_R.$$

$$U := \big(u|_{e_1}(0), \dots, u|_{e_n}(0), u|_{e_{n+1}}(0), u|_{e_{n+1}}(\varepsilon\ell_1), \dots, u|_{e_{n+m}}(0), u|_{e_{n+m}}(\varepsilon\ell_m)\big)^t$$

$$U' := \big(u'|_{e_1}(0), \dots, u'|_{e_n}(0), u'|_{e_{n+1}}(0), u'|_{e_{n+1}}(\varepsilon\ell_1), \dots, u'|_{e_{n+m}}(0), u'|_{e_{n+m}}(\varepsilon\ell_m)\big)^t$$

Граф



$$\mathcal{H}_\varepsilon = -\frac{d^2}{dx^2}, \quad \varepsilon \to +0,$$

$$P_D U = 0, \qquad P_R U' + K P_R U = 0,$$

$$\mathcal{H}_\varepsilon^* = \mathcal{H}_\varepsilon, \quad K = K^*,$$

$$U,\ U' \in \mathbb{C}^{n+2m}, \quad P_D,\ P_R : \mathbb{C}^{n+2m} \to \mathbb{C}^{n+2m},$$

$$P_D + P_R = E, \quad P_D^2 = P_D, \quad P_R^2 = P_R.$$

$$U := \big(u|_{e_1}(0), \ldots, u|_{e_n}(0), u|_{e_{n+1}}(0), u|_{e_{n+1}}(\varepsilon\ell_1), \ldots, u|_{e_{n+m}}(0), u|_{e_{n+m}}(\varepsilon\ell_m)\big)^t$$

$$U' := \big(u'|_{e_1}(0), \ldots, u'|_{e_n}(0), u'|_{e_{n+1}}(0), u'|_{e_{n+1}}(\varepsilon\ell_1), \ldots, u'|_{e_{n+m}}(0), u'|_{e_{n+m}}(\varepsilon\ell_m)\big)^t$$

Цель: описание собственных значений, стремящихся к $-\infty$ при $\varepsilon \to 0$.

Основные результаты

При определенных условиях на матрицу K и проекторы P_D, P_R оператор $\mathcal{H}_\varepsilon$ может иметь собственные значения, убегающие на бесконечность, двух типов.

Основные результаты

При определенных условиях на матрицу K и проекторы P_D, P_R оператор $\mathcal{H}_\varepsilon$ может иметь собственные значения, убегающие на бесконечность, двух типов.

$$S\text{–тип}: \qquad \lambda_\varepsilon = -\varepsilon^{-1}\Lambda(\varepsilon^{\frac{1}{2}}), \qquad \Lambda = \Lambda(t) \quad \text{— голоморфная}$$

Основные результаты

При определенных условиях на матрицу K и проекторы P_D, P_R оператор $\mathcal{H}_\varepsilon$ может иметь собственные значения, убегающие на бесконечность, двух типов.

$$S\text{–тип}: \qquad \lambda_\varepsilon = -\varepsilon^{-1}\Lambda(\varepsilon^{\frac{1}{2}}), \qquad \Lambda = \Lambda(t) \quad \text{— голоморфная}$$

$$C\text{–тип}: \qquad \lambda_\varepsilon = -\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\Lambda(\varepsilon^{\frac{1}{3}}), \qquad \Lambda = \Lambda(t) \quad \text{— голоморфная}$$

Основные результаты

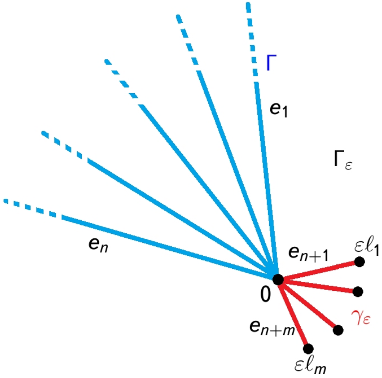
При определенных условиях на матрицу K и проекторы P_D, P_R оператор $\mathcal{H}_\varepsilon$ может иметь собственные значения, убегающие на бесконечность, двух типов.

$$S\text{–тип}: \qquad \lambda_\varepsilon = -\varepsilon^{-1}\Lambda(\varepsilon^{\frac{1}{2}}), \qquad \Lambda = \Lambda(t) \quad \text{— голоморфная}$$

$$C\text{–тип}: \qquad \lambda_\varepsilon = -\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\Lambda(\varepsilon^{\frac{1}{3}}), \qquad \Lambda = \Lambda(t) \quad \text{— голоморфная}$$

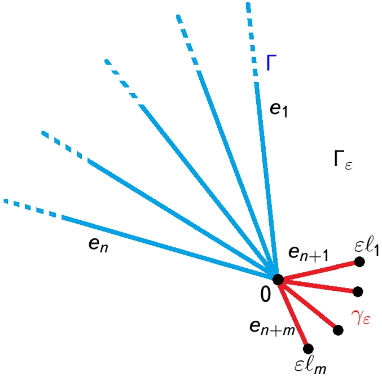
При этом резольвента аналитична по ε!

Резольвента



Операторы сужения
$\mathcal{P}_\Gamma f := f\big|_\Gamma$, $\mathcal{P}_{\gamma_\varepsilon} f := f\big|_{\gamma_\varepsilon}$
Оператор растяжения $(\mathcal{S}_\varepsilon u)(x) := u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$

Резольвента



Операторы сужения

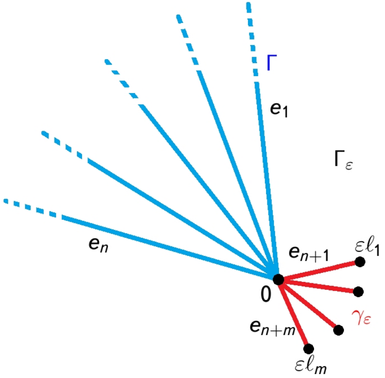
$\mathcal{P}_\Gamma f := f\big|_\Gamma$, $\mathcal{P}_{\gamma_\varepsilon} f := f\big|_{\gamma_\varepsilon}$

Оператор растяжения $(\mathcal{S}_\varepsilon u)(x) := u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$

Операторы

$(f_\Gamma, f_\gamma) \mapsto f(x) = f_\Gamma(x) + f_\gamma\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$

Резольвента



Операторы сужения

$\mathcal{P}_\Gamma f := f\big|_\Gamma$, $\mathcal{P}_{\gamma_\varepsilon} f := f\big|_{\gamma_\varepsilon}$

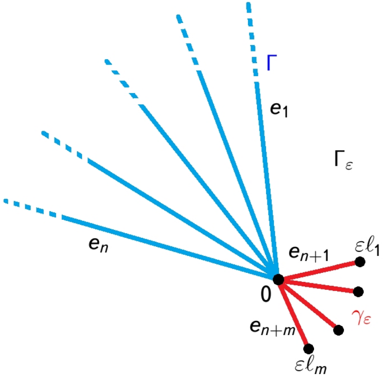
Оператор растяжения $(\mathcal{S}_\varepsilon u)(x) := u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$

Операторы

$(f_\Gamma, f_\gamma) \mapsto f(x) = f_\Gamma(x) + f_\gamma\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$

$\mapsto u = (\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} f$

Резольвента



Операторы сужения

$\mathcal{P}_\Gamma f := f\big|_\Gamma$, $\mathcal{P}_{\gamma_\varepsilon} f := f\big|_{\gamma_\varepsilon}$

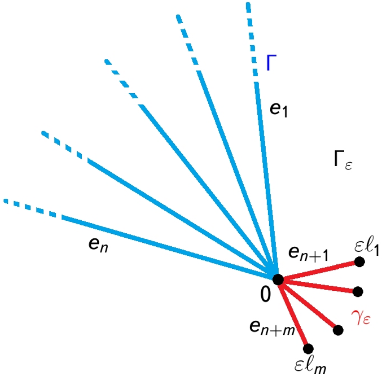
Оператор растяжения $(\mathcal{S}_\varepsilon u)(x) := u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$

Операторы

$(f_\Gamma, f_\gamma) \mapsto f(x) = f_\Gamma(x) + f_\gamma\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$

$\mapsto u = (\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} f \mapsto \left(u\big|_\Gamma(x), u\big|_{\gamma_\varepsilon}(\varepsilon\xi)\right)$

Резольвента



Операторы сужения

$\mathcal{P}_\Gamma f := f\big|_\Gamma$, $\mathcal{P}_{\gamma_\varepsilon} f := f\big|_{\gamma_\varepsilon}$

Оператор растяжения $(\mathcal{S}_\varepsilon u)(x) := u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$

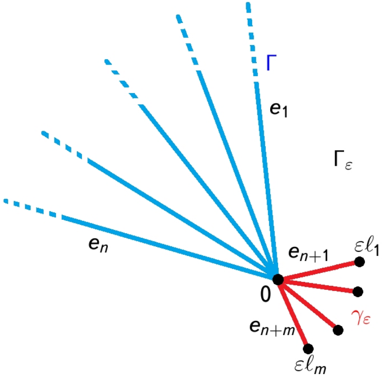
Операторы

$(f_\Gamma, f_\gamma) \mapsto f(x) = f_\Gamma(x) + f_\gamma\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$

$\mapsto u = (\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} f \mapsto \left(u\big|_\Gamma(x), u\big|_{\gamma_\varepsilon}(\varepsilon\xi)\right)$

$= (u_\Gamma(x), u_\gamma(\xi))$

Резольвента



Операторы сужения

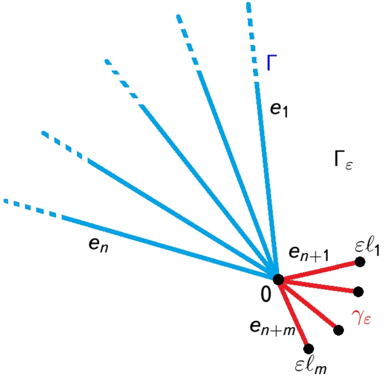
$\mathcal{P}_\Gamma f := f\big|_\Gamma$, $\mathcal{P}_{\gamma_\varepsilon} f := f\big|_{\gamma_\varepsilon}$

Оператор растяжения $(\mathcal{S}_\varepsilon u)(x) := u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$

Операторы

$$(f_\Gamma, f_\gamma) \mapsto f(x) = f_\Gamma(x) + f_\gamma\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$
$$\mapsto u = (\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} f \mapsto \left(u\big|_\Gamma(x), u\big|_{\gamma_\varepsilon}(\varepsilon\xi)\right)$$
$$= (u_\Gamma(x), u_\gamma(\xi))$$
$$=: \Big(\mathcal{R}_\Gamma(\varepsilon,\lambda)(f_\Gamma, f_\gamma), \mathcal{R}_\gamma(\varepsilon,\lambda)(f_\Gamma, f_\gamma)\Big)$$

Резольвента



Операторы сужения

$\mathcal{P}_\Gamma f := f\big|_\Gamma$, $\mathcal{P}_{\gamma_\varepsilon} f := f\big|_{\gamma_\varepsilon}$

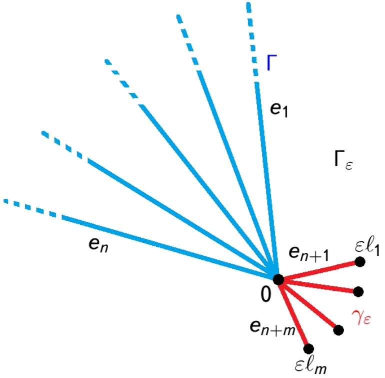
Оператор растяжения $(\mathcal{S}_\varepsilon u)(x) := u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$

Операторы

$$(f_\Gamma, f_\gamma) \mapsto f(x) = f_\Gamma(x) + f_\gamma\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$
$$\mapsto u = (\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} f \mapsto \left(u\big|_\Gamma(x), u\big|_{\gamma_\varepsilon}(\varepsilon\xi)\right)$$
$$= (u_\Gamma(x), u_\gamma(\xi))$$
$$=: \Big(\mathcal{R}_\Gamma(\varepsilon,\lambda)(f_\Gamma, f_\gamma), \mathcal{R}_\gamma(\varepsilon,\lambda)(f_\Gamma, f_\gamma)\Big)$$

голоморфны по ε,

Резольвента



Операторы сужения
$\mathcal{P}_\Gamma f := f\big|_\Gamma$, $\mathcal{P}_{\gamma_\varepsilon} f := f\big|_{\gamma_\varepsilon}$
Оператор растяжения $(\mathcal{S}_\varepsilon u)(x) := u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$
Операторы
$(f_\Gamma, f_\gamma) \mapsto f(x) = f_\Gamma(x) + f_\gamma\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$
$\mapsto u = (\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} f \mapsto \left(u\big|_\Gamma(x), u\big|_{\gamma_\varepsilon}(\varepsilon\xi)\right)$
$= (u_\Gamma(x), u_\gamma(\xi))$
$=: \Big(\mathcal{R}_\Gamma(\varepsilon,\lambda)(f_\Gamma, f_\gamma), \mathcal{R}_\gamma(\varepsilon,\lambda)(f_\Gamma, f_\gamma)\Big)$

голоморфны по ε,

$$(\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} = \big(\mathcal{R}_\Gamma(\varepsilon,\lambda) \oplus \mathcal{S}_\varepsilon \mathcal{R}_\gamma(\varepsilon,\lambda)\big)\big(\mathcal{P}_\Gamma \oplus \mathcal{S}_\varepsilon \mathcal{P}_{\gamma_\varepsilon}\big).$$

Отсутствие убегающих собственных значений

Для простоты считаем, что $\mathcal{P}_D = 0$, краевые условия $U' + KU = 0$.

Отсутствие убегающих собственных значений

Для простоты считаем, что $\mathcal{P}_D = 0$, краевые условия $U' + KU = 0$.

$$\Omega := \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}, \quad P := \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \ell_1 \Pi & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \ell_m \Pi \end{pmatrix}, \quad \Pi := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Xi = \begin{pmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} \\ \Xi_{21} & \Xi_{22} \end{pmatrix} := \Omega K \Omega, \quad \Xi_{11},\ \Xi_{22} \text{ — размера } n \times n,\ m \times m,$$

Отсутствие убегающих собственных значений

Для простоты считаем, что $\mathcal{P}_D = 0$, краевые условия $U' + KU = 0$.

$$\Omega := \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}, \quad P := \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \ell_1 \Pi & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \ell_m \Pi \end{pmatrix}, \quad \Pi := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Xi = \begin{pmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} \\ \Xi_{21} & \Xi_{22} \end{pmatrix} := \Omega K \Omega, \quad \Xi_{11},\ \Xi_{22} \text{ — размера } n \times n,\ m \times m,$$

Если $m = 0$ (нет малых ребер), то нет собственных значений, убегающих на $-\infty$.

Существование собственных значений S–типа

Для простоты считаем, что $\mathcal{P}_D = 0$, краевые условия $U' + KU = 0$.

$$\Omega := \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}, \quad P := \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \ell_1 \Pi & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \ell_m \Pi \end{pmatrix}, \quad \Pi := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Xi = \begin{pmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} \\ \Xi_{21} & \Xi_{22} \end{pmatrix} := \Omega K \Omega, \quad \Xi_{11},\ \Xi_{22} \text{ — размера } n \times n,\ \ m \times m,$$

Существование собственных значений S–типа

Для простоты считаем, что $\mathcal{P}_D = 0$, краевые условия $U' + KU = 0$.

$$\Omega := \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}, \quad P := \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \ell_1 \Pi & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \ell_m \Pi \end{pmatrix}, \quad \Pi := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Xi = \begin{pmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} \\ \Xi_{21} & \Xi_{22} \end{pmatrix} := \Omega K \Omega, \quad \Xi_{11},\ \Xi_{22} \text{ — размера } n \times n,\ m \times m,$$

Пусть $n = 0$ (только короткие ребра), ξ_j, $j = 1, \ldots, d$, — положительные собственные значения Ξ_{22}.

Существование собственных значений S–типа

Для простоты считаем, что $\mathcal{P}_D = 0$, краевые условия $U' + KU = 0$.

$$\Omega := \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}, \quad P := \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \ell_1 \Pi & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \ell_m \Pi \end{pmatrix}, \quad \Pi := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Xi = \begin{pmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} \\ \Xi_{21} & \Xi_{22} \end{pmatrix} := \Omega K \Omega, \quad \Xi_{11},\ \Xi_{22} \text{ — размера } n \times n,\ m \times m,$$

Пусть $n = 0$ (только короткие ребра), ξ_j, $j = 1, \ldots, d$, — положительные собственные значения Ξ_{22}. Тогда существует в точности d собственных значений S–типа, убегающих на $-\infty$, и

Существование собственных значений S–типа

Для простоты считаем, что $\mathcal{P}_D = 0$, краевые условия $U' + KU = 0$.

$$\Omega := \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}, \quad P := \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \ell_1 \Pi & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \ell_m \Pi \end{pmatrix}, \quad \Pi := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Xi = \begin{pmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} \\ \Xi_{21} & \Xi_{22} \end{pmatrix} := \Omega K \Omega, \quad \Xi_{11},\ \Xi_{22} \text{ — размера } n \times n,\ \ m \times m,$$

Пусть $n = 0$ (только короткие ребра), ξ_j, $j = 1, \ldots, d$, — положительные собственные значения Ξ_{22}. Тогда существует в точности d собственных значений S–типа, убегающих на $-\infty$, и

$$\lambda_j(\varepsilon) = \varepsilon^{-1} \nu_j(\varepsilon^{\frac{1}{2}}), \quad j = 1, \ldots, d, \qquad \nu_j(0) = \xi_j,$$

$\nu_j(t)$ — голоморфные и вещественные для $t \in \mathbb{R}$.

Существование собственных значений S– и C–типов

$$\Omega := \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}, \quad P := \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{diag}\{\ell_1 \Pi, \ldots, \ell_m \Pi\}, \quad \Pi := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Xi = \begin{pmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} \\ \Xi_{21} & \Xi_{22} \end{pmatrix} := \Omega K \Omega, \quad \Xi_{11},\ \Xi_{22} \text{ — размера } n \times n,\ m \times m$$

Существование собственных значений $S-$ и $C-$типов

$$\Omega := \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}, \quad P := \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{diag}\{\ell_1 \Pi, \ldots, \ell_m \Pi\}, \quad \Pi := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Xi = \begin{pmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} \\ \Xi_{21} & \Xi_{22} \end{pmatrix} := \Omega K \Omega, \quad \Xi_{11}, \ \Xi_{22}\text{ — размера } n \times n, \ \ m \times m$$

Пусть $n \geqslant 1$, $m \geqslant 1$, ξ_j, $j = 1, \ldots, d$, — положительные собственные значения Ξ_{22}, Θ — проектор на $\operatorname{Ker} \Xi_{22}$, θ_j, $j = 1, \ldots, k$ — положительные собственные значения $\Theta \Xi_{21} \Xi_{12} \Theta$.

Существование собственных значений S− и C−типов

$$\Omega := \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}, \quad P := \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{diag}\{\ell_1\Pi, \ldots, \ell_m\Pi\}, \quad \Pi := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Xi = \begin{pmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} \\ \Xi_{21} & \Xi_{22} \end{pmatrix} := \Omega K \Omega, \quad \Xi_{11}, \ \Xi_{22} \text{ — размера } n \times n, \ \ m \times m$$

Пусть $n \geqslant 1$, $m \geqslant 1$, ξ_j, $j = 1, \ldots, d$, — положительные собственные значения Ξ_{22}, Θ — проектор на $\operatorname{Ker} \Xi_{22}$, θ_j, $j = 1, \ldots, k$ — положительные собственные значения $\Theta\Xi_{21}\Xi_{12}\Theta$.Тогда существует в точности d собственных значений S−типа и k собственных значений C−типа, убегающих на $-\infty$, и

Существование собственных значений $S-$ и $C-$типов

$$\Omega := \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}, \quad P := \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{diag}\{\ell_1\Pi, \ldots, \ell_m\Pi\}, \quad \Pi := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Xi = \begin{pmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} \\ \Xi_{21} & \Xi_{22} \end{pmatrix} := \Omega K \Omega, \quad \Xi_{11}, \ \Xi_{22} \text{ — размера } n \times n, \ m \times m$$

Пусть $n \geqslant 1$, $m \geqslant 1$, ξ_j, $j = 1, \ldots, d$, — положительные собственные значения Ξ_{22}, Θ — проектор на $\operatorname{Ker} \Xi_{22}$, θ_j, $j = 1, \ldots, k$ — положительные собственные значения $\Theta\Xi_{21}\Xi_{12}\Theta$.Тогда существует в точности d собственных значений $S-$типа и k собственных значений $C-$типа, убегающих на $-\infty$, и

$$\lambda_j(\varepsilon) = -\varepsilon^{-1}\nu_j(\varepsilon^{\frac{1}{2}}), \qquad \nu_j(0) = \xi_j, \qquad j = 1, \ldots, d,$$

$$\lambda_j(\varepsilon) = -\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\nu_j(\varepsilon^{\frac{1}{2}}), \qquad \nu_j(0) = \theta_j^{\frac{2}{3}}, \qquad j = d+1, \ldots, d+k,$$

$\nu_j(t)$ — голоморфные и вещественные для $t \in \mathbb{R}$.