

# УСТОЙЧИВОСТЬ ФИГУР РАВНОВЕСИЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ КАПИЛЛЯРНОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ

Денисова Ирина Владимировна  
*ИПМаш РАН, Санкт-Петербург*

Конференция  
«Уравнения с частными производными и их приложения»

ИМ СО РАН, г. Новосибирск  
7-9 октября 2024 г.

- Задача о вращении несжимаемой капли вокруг фиксированной оси как твердого тела изучалась Ньютоном, Маклореном, Якоби, Пуанкаре, Ляпуновым и другими учёными, которые исследовали движение жидкостей без учёта капиллярности. Капиллярные жидкости впервые рассматривались Глобой-Михайленко, Буссинеском и Шаррюо в начале 20 века. Эти результаты вошли в обзор в книге Аппелля [1] **Paris, 1932**. Обзор по устойчивости различных эллипсоидальных фигур равновесия дан Чандрасекхаром в [2] **перевод М:Мир, 1973**.
- Стабильность фигур равновесия – одна из важнейших их характеристик. А.М.Ляпунов первым применил аналитические методы исследования устойчивости и неустойчивости форм вращающейся жидкой массы [2] (**Сбор. трудов АН СССР, М., 3 (1959)**). Он проанализировал вторую вариацию функционала энергии относительно малых возмущений границы фигуры.
- Ляпунов доказал, что положительность этой вариации гарантирует стабильность фигуры равновесия, поскольку в этом состоянии энергия имеет минимум.

• В работе [3](2004) (Алгеб. анализ 16 (2), 120–153.) В.А. Солонников обобщил метод Ляпунова на вращающуюся капиллярную жидкость путем анализа эволюционной задачи со свободной границей. А мы распространили этот метод на случай конечной массы двух жидкостей со свободной границей, разделенных неизвестной замкнутой поверхностью раздела, близкой к фигуре равновесия.

• Мы доказываем глобальную разрешимость по времени нелинейной двухжидкостной задачи с вращением для малых данных сначала в пространствах Соболева [5] (2021) (Зап. научн. семин. ПОМИ, 508, 89–123), а затем и Гёльдера [6] (2022) (Mathematics, 10(24), 4799).

• Мы рассмотрим также решение стационарной задачи с неизвестными границами для уравнений Навье–Стокса, соответствующих медленному жёсткому вращению вязкой двухфазной жидкой массы. При этом внутренняя несжимаемая жидкость ограничена замкнутой поверхностью, не пересекающейся с внешней границей.

Предполагается, что внешняя сжимаемая жидкость баротропна и капиллярна. Доказано существование семейства фигур равновесия, близких к вложенным шарам с помощью теоремы о неявной функции.

• Аналогичный результат получен и для двухслойной сжим-ой жид-ти.

- Существование фигур равновесия для двухслойной несжимаемой самогравитирующей капиллярной жидкости (сплюснутых сфероидов) было получено В.А. Солонниковым в [3] (2006) (Проб. мат. анализа, 34, 103–121).

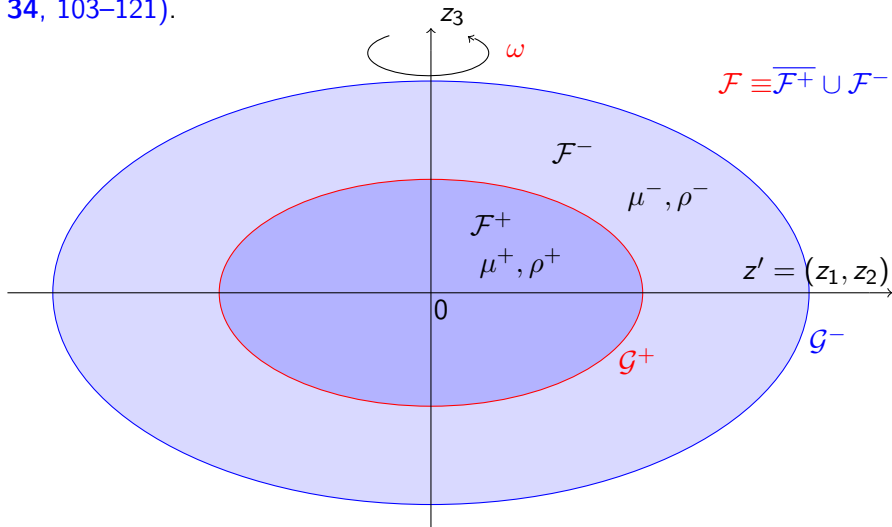


Fig. 1

# Постановка задачи для двух несжимаемых жидкостей

Пусть две вязкие несжимаемые несмешивающиеся жидкости  $\Omega_t^\pm$  с плотностями  $\rho^\pm$  и вязкостями  $\mu^\pm$  содержатся в области  $\Omega_t \equiv \Omega_t^+ \cup \Omega_t^- \subset \mathbb{R}^3$ , ограниченной свободной поверхностью  $\Gamma_t^-$  и разделены замкнутой изменяющейся границей раздела  $\Gamma_t^+$ ,  $\Gamma_t^+ \equiv \partial\Omega_t^+$ . Эта двухфазная капля вращается с угловой скоростью  $\omega$  вокруг вертикальной оси  $x_3$  (см. рис. 2).

В начальный момент времени  $t = 0$  поверхности  $\Gamma_0^-, \Gamma_0^+$  заданы,  $\Gamma_0^- \cap \Gamma_0^+ = \emptyset$ . Мы предполагаем, что  $\Omega_0^\pm$  близки к  $\mathcal{F}^\pm$ , где  $\mathcal{F}^+, \mathcal{F}^-$  — фигуры равновесия. Введём  $\mathcal{G}^+ = \partial\mathcal{F}^+$  и  $\mathcal{G}^- = \partial\mathcal{F}^-$ ,  $\mathcal{F}^- \equiv \mathcal{F} \setminus \overline{\mathcal{F}^+}$ . При  $t > 0$  границы  $\Gamma_t^-, \Gamma_t^+$ , векторное поле скоростей  $\mathbf{v}(x, t)$  и ф. давл-я  $p(x, t)$  удов-ют задаче дифракции для ур-й Навье–Стокса, которая состоит в том, что скорость двухслойной жидкости непрерывна, а скачок нормальных напряжений на границе раздела равен  $\sigma^+ H^+ \mathbf{n}(x, t)$  ( $H^+ < 0$ , когда  $\Gamma_t^+$  выпукла в сторону  $\Omega_t^-$ ), на внешней границе у нас нормальные напряжения равны  $\sigma^- H^- \mathbf{n}(x, t)$ , где  $H^\pm$  — удвоенная средняя кривизна  $\Gamma_t^\pm$ ;  $\sigma^\pm > 0$  — коэф-ы поверхностного натяжения на  $\Gamma_t^\pm$ ;  $\mathbf{n}(x, t)$  — внешняя нормаль к  $\Gamma_t^+ \equiv \cup \Gamma_t^\pm$ .

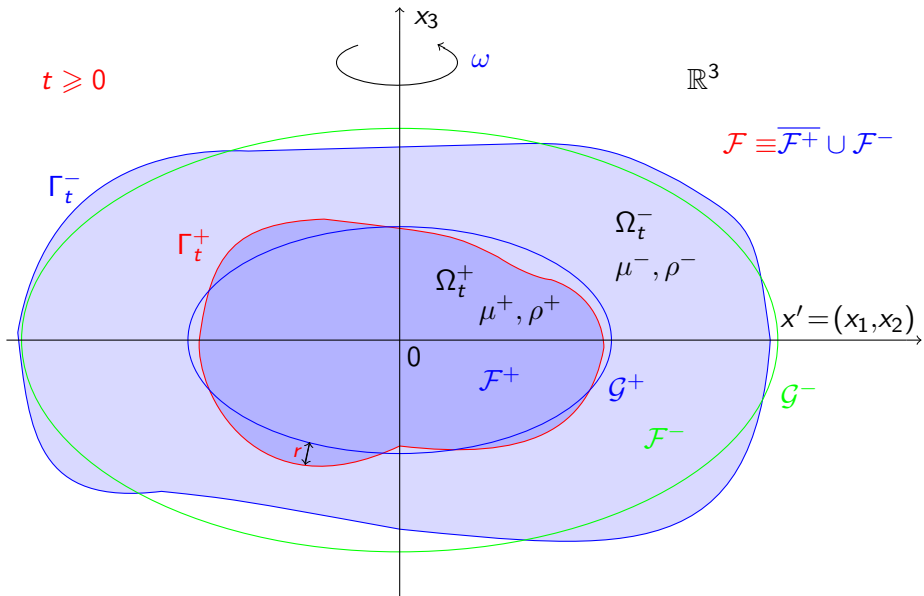


Fig. 2

При  $t > 0$  границы  $\Gamma_t^-, \Gamma_t^+$ , векторное поле скоростей  $\mathbf{v}(x, t)$  и фун-я давл-я  $p(x, t)$  удов-ют задаче дифракции для ур-й Навье–Стокса

$$\rho^\pm (\mathcal{D}_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}) - \mu^\pm \nabla^2 \mathbf{v} + \nabla p = \rho^\pm (\mathbf{f} + \varkappa \nabla U), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \text{ в } \cup \Omega_t^\pm = \Omega_t^+ \cup \Omega_t^-, \quad t > 0, \quad \mathbf{v}(x, 0) = \mathbf{v}_0(x) \text{ в } \cup \Omega_0^\pm, \\ [\mathbf{v}]|_{\Gamma_t^+} &\equiv \mathbf{v}^+(x, t) - \mathbf{v}^-(x, t) = 0, \quad [\mathbb{T}(\mathbf{v}, p)\mathbf{n}]|_{\Gamma_t^+} = \sigma^+ H^+ \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\mathbb{T}(\mathbf{v}, p)\mathbf{n}|_{\Gamma_t^-} = \sigma^- H^- \mathbf{n} \text{ на } \Gamma_t^-, \quad V_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \text{ на } \Gamma_t = \Gamma_t^+ \cup \Gamma_t^-,$$

где  $\mathcal{D}_t = \partial/\partial t$ ,  $\nabla = \text{grad}$ ,  $\nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla$ ;  $\mathbf{f}$  – вектор массовых сил,

$U(x, t) = \int_{\Omega_t} \frac{\rho^\pm dz}{|x-z|}$ ,  $\varkappa \geq 0$  – гравитационная постоянная,  $\mathbf{v}_0$  –

начальная скорость,  $\mathbb{T}(\mathbf{v}, p) = -p + \mu^\pm \mathbb{S}(\mathbf{v})$  – тензор напряж-й,

$\mathbb{S}(\mathbf{v}) = (\nabla \mathbf{v}) + (\nabla \mathbf{v})^T$  – удвоенный тензор скоростей деформации,

$\mathbf{v}^\pm(x, t) \equiv \lim_{x \rightarrow x_0 \in \Gamma_t^+, x \in \Omega_t^\pm} \mathbf{v}(x, t)$ ,  $\rho^\pm, \mu^\pm > 0$ ,  $\equiv \rho^-, \mu^-$  в  $\Omega_t^-$ ,

$\equiv \rho^+, \mu^+$  в  $\Omega_t^+$ ;  $H^\pm$  – удвоенная средняя кривизна  $\Gamma_t^\pm$  ( $H^+ < 0$ , когда

$\Gamma_t^+$  выпукла в сторону  $\Omega_t^-$ );

$\sigma^\pm > 0$  – коэф-ы поверхностного натяжения  $\Gamma_t^\pm$ ;  $\mathbf{n}(x, t)$  – внешняя

нормаль к  $\Gamma_t = \Gamma_t^- \cup \Gamma_t^+$ ,  $V_n$  – скорость изменения  $\Gamma_t$  в направ-ии

нормали  $\mathbf{n}$ . Точка  $\cdot$  означает декартово скалярное пр-е.

# Законы сохранения

Пусть  $\Omega_0^+$ ,  $\Omega_0$  мало отличаются от фигур равнов-я  $\mathcal{F}^+$ ,  $\mathcal{F}$  т., что

$$|\Omega_0^+| = |\mathcal{F}^+|, \quad |\Omega_0| = |\mathcal{F}|, \quad \Rightarrow |\Omega_t^+| = |\mathcal{F}^+|, \quad |\Omega_t| = |\mathcal{F}|, \quad \forall t > 0. \quad (3)$$

(закон сохранения объёма и массы)

Если  $\int_{\Omega_t} \rho^\pm \mathbf{f}(x, t) dx = 0$ ,  $\int_{\Omega_t} \rho^\pm \mathbf{f}(x, t) \cdot \boldsymbol{\eta}_i(x) dx = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ , то реш-е сист. (1), (2) удовл-ет и др. законам сохран-я при  $t > 0$ :

$$\int_{\Omega_t} \rho^\pm x_j dx = \int_{\Omega_0} \rho^\pm x_j dx \equiv 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (\text{сохранение ц. тяжести}),$$

$$\int_{\Omega_t} \rho^\pm \mathbf{v}(x, t) dx = \int_{\Omega_0} \rho^\pm \mathbf{v}_0(x) dx \equiv 0 \quad (\text{сохранение кол-ва движ-я}),$$

$$\int_{\Omega_t} \rho^\pm \mathbf{v}(x, t) \cdot \boldsymbol{\eta}_i(x) dx = \int_{\Omega_0} \rho^\pm \mathbf{v}_0(x) \cdot \boldsymbol{\eta}_i(x) dx \equiv \omega \int_{\mathcal{F}} \bar{\rho} \boldsymbol{\eta}_3(x) \cdot \boldsymbol{\eta}_i(x) dx = \beta \delta_i^3$$

(закон сохранения углового момента),

где  $\boldsymbol{\eta}_i(x) = \mathbf{e}_i \times \mathbf{x}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , – векторы жёсткого вращения,  $\mathbf{e}_i$  – базисные вект-ы, плотность  $\bar{\rho} \equiv \rho^\pm$  в  $\mathcal{F}^\pm$ ,  $\delta_i^k$  – симв-ы Кронекера.



# Стационарное решение

Величина **углового момента** вращающихся жидкостей составляет

$$\beta = \omega \int_{\mathcal{F}} \bar{\rho}(x) |x'|^2 dx \equiv \omega \mathcal{I}, \quad x' = (x_1, x_2, 0), \quad |x'|^2 = x_1^2 + x_2^2.$$

**Поле скоростей** и **ф-я давления** двухфазной жидкой массы, равномерно вращающейся вокруг оси  $x_3$  с постоянной угл. скоростью  $\omega$ ,  $\mathbf{V}(x) = \omega \mathbf{e}_3 \times \mathbf{x} \equiv \omega \boldsymbol{\eta}_3$ ,  $\mathcal{P}(x) = \bar{\rho} \frac{\omega^2}{2} |x'|^2 + p_0^\pm$  удовлетворяют однородным **стационарным урав-ям Навье-Стокса**

$$\bar{\rho}(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} - \bar{\mu} \nabla^2 \mathbf{V} + \nabla \mathcal{P} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad \text{в } \mathcal{F} = \cup \mathcal{F}^\pm,$$

где  $\bar{\rho}, p_0^\pm$  – ступенчатые ф-ии в  $\mathcal{F}^\pm$ ,  $\bar{\mu} \equiv \mu^+$  в  $\mathcal{F}^+$  и  $\bar{\mu} \equiv \mu^-$  в  $\mathcal{F}^-$ . Подставим  $\mathbf{V}, \mathcal{P}$  в краевые условия.  $\Rightarrow$  **Уравнения для границ**  $\mathcal{G}^\pm$  есть

$$\begin{aligned} \sigma^- \mathcal{H}^-(x) + \rho^- \frac{\omega^2}{2} |x'|^2 + \rho^- \mathcal{M} + p_0^- &= 0, \quad x \in \mathcal{G}^-, \\ \sigma^+ \mathcal{H}^+(x) + [\bar{\rho}]|_{\mathcal{G}^+} \frac{\omega^2}{2} |x'|^2 + [\bar{\rho}]|_{\mathcal{G}^+} \mathcal{M} + [p_0^\pm]|_{\mathcal{G}^+} &= 0, \quad x \in \mathcal{G}^+, \end{aligned} \tag{4}$$

где  $\mathcal{H}^\pm$  – удвоенные средние кривизны повер-ей  $\mathcal{G}^\pm$ ,  $\mathcal{U}(x) = \int_{\mathcal{F}} \frac{\bar{\rho} dz}{|x-z|}$ .

При малой скорости вращения  $\omega$  док-но существование  $\mathcal{G}^\pm$ , удовлетворяющих ур-м (18), при этом  $\mathcal{F}^\pm$  осесимметричны и симметр-ы относительно пл.  $\{x_3=0\}$

$$\int_{\mathcal{F}} \bar{\rho}(x) \mathbf{x} dx = 0, \quad \int_{\mathcal{F}} \bar{\rho} x_3 x_j dx = 0, \quad j = 1, 2. \quad (5)$$

$$\int_{\Omega_t} \rho^\pm \mathbf{v}(x, t) dx = \int_{\mathcal{F}} \bar{\rho} \mathbf{V}(x) dx = 0, \quad (\text{сохранение импульса}), \quad (6)$$

$$\int_{\Omega_t} \rho^\pm \mathbf{v}(x, t) \cdot \boldsymbol{\eta}_i(x) dx = \int_{\mathcal{F}} \bar{\rho} \mathbf{V}(x) \cdot \boldsymbol{\eta}_i(x) dx = \delta_i^3 \beta, \quad i = 1, 2, 3.$$

Рассмотрим **возмущения поля скоростей и давления**

$$\mathbf{v}_r(x, t) = \mathbf{v}(x, t) - \mathbf{V}(x), \quad p_r(x, t) = p(x, t) - \mathcal{P}(x).$$

Запишем их в системе координат  $\{y_i\}$ , вращающейся вокруг оси  $x_3$  с угл. скор.  $\omega$ , вводя новые коорд-ты  $x = \mathcal{Z}(\omega t)y$ , и фун-и

$$\tilde{\mathbf{v}}(y, t) = \mathcal{Z}^{-1}(\omega t) \mathbf{v}_r(\mathcal{Z}(\omega t)y, t), \quad \tilde{p}(y, t) = p_r(\mathcal{Z}(\omega t)y, t).$$

Пусть новые поверхности заданы соотн-ми

$$\tilde{\Gamma}_t^\pm = \{y = z + \mathbf{N}(z)r(z, t), \quad z \in \mathcal{G}^\pm\}, \quad \text{где } \mathbf{N} \text{ — внешняя нормаль к } \mathcal{G}^- \cup \mathcal{G}^+, \quad r \text{ — отклонение } \tilde{\Gamma}_t^\pm \text{ от } \mathcal{G}^\pm.$$

Отобразим  $\tilde{\Omega}_t^\pm$  на  $\mathcal{F}^\pm$  с помощью обратного преобразования Ханзавы  $y = z + N^*(z)r^*(z, t)$ .

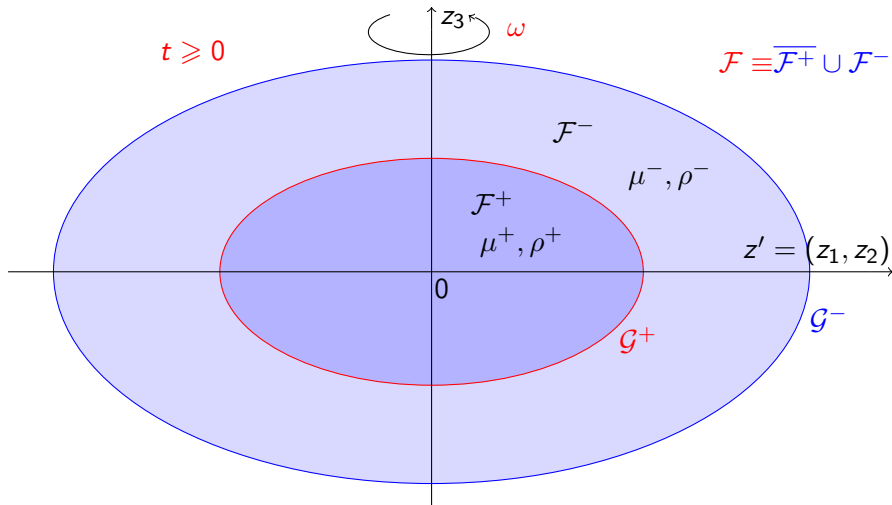


Fig. 3

Подставим ур-я для фиг-р равнов-я (18) в граничные условия (2) и применим  $\mathcal{Z}^{-1}$ .

Анализ полученной задачи базируется на её **линеаризации**

$$\begin{aligned}
 \rho^\pm (\mathcal{D}_t \mathbf{w} + 2\omega(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{w})) - \mu^\pm \nabla^2 \mathbf{w} + \nabla p_1 &= \bar{\rho} \mathbf{f}, \\
 \nabla \cdot \mathbf{w} = f &\equiv \nabla F \quad \text{в } \mathcal{F} \equiv \mathcal{F}^- \cup \mathcal{F}^+, \quad t > 0, \\
 \mathbf{w}(z, 0) = \mathbf{v}_0(z) - \mathcal{V}(z) &\equiv \mathbf{w}_0(z), \quad z \in \mathcal{F}, \\
 \mathbb{T}(\mathbf{w}, p_1) \mathbf{N} \Big|_{\mathcal{G}^-} + \mathbf{N} \mathcal{B}_0^- r &= \mathbf{d} \quad \text{на } \mathcal{G}^-, \\
 [\mathbf{w}] \Big|_{\mathcal{G}^+} = 0, \quad [\mathbb{T}(\mathbf{w}, p_1) \mathbf{N}] \Big|_{\mathcal{G}^+} + \mathbf{N} \mathcal{B}_0^+ r &= \mathbf{d} \quad \text{на } \mathcal{G}^+, \\
 \mathcal{D}_t r - \mathbf{w} \cdot \mathbf{N} = g &\quad \text{на } \mathcal{G} \equiv \mathcal{G}^- \cup \mathcal{G}^+, \quad r \Big|_{t=0} = r_0 \quad \text{на } \mathcal{G},
 \end{aligned} \tag{7}$$

где  $\mathcal{B}_0^\pm r = -\sigma^\pm \Delta^\pm r - b^\pm(z)r$ ,  $z \in \mathcal{G}^\pm$ ,  
 $\Delta^\pm$  — операторы Лапласа–Бельтрами на  $\mathcal{G}^\pm$ ,

$b^-(z) = \sigma^-(\mathcal{H}^{-2} - 2\mathcal{K}^-) + \rho^- \omega^2 \mathbf{N} \cdot \mathbf{z}'$ ,

$b^+(z) = \sigma^+(\mathcal{H}^{+2} - 2\mathcal{K}^+) + [\bar{\rho}] \Big|_{\mathcal{G}^+} \omega^2 \mathbf{N} \cdot \mathbf{z}'$ ,  $\mathbf{z}' = (z_1, z_2, 0)$ ,

$\mathcal{K}^\pm$  — гауссовы кривизны пов-ей  $\mathcal{G}^\pm$ ,  $r(x, t)$  — неизвестная фук-я,  
 описывающая  $\Gamma_t^\pm$ ;

$\mathbf{N}$  — внешняя нормаль к  $\mathcal{G}^- \cup \mathcal{G}^+$ ;  $\mathbf{f}, f, \mathbf{d}, g, \mathbf{w}_0, r_0$  — заданные функции.

Пусть обл-и  $\mathcal{F}^\pm$  являются симметричными относительно  $x_1, x_2, x_3$ , а начальные данные удовлетворяют **условиям ортогональности**

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{G}^\pm} r_0(x) dS &= 0, \quad \int_{\mathcal{F}} \bar{\rho} w_0(x) dx = 0, \\ \rho^- \int_{\mathcal{G}^-} r_0(x) x_j dS + [\bar{\rho}]|_{\mathcal{G}^+} \int_{\mathcal{G}^+} r_0(x) x_j dS &= 0, \quad j = 1, 2, 3, \\ \int_{\mathcal{F}} \bar{\rho} w_0(x) \cdot \eta_j(x) dx + \omega(\rho^- \int_{\mathcal{G}^-} r_0(x) \eta_3(x) \cdot \eta_j(x) dS & \\ + [\bar{\rho}]|_{\mathcal{G}^+} \int_{\mathcal{G}^+} r_0(x) \eta_3(x) \cdot \eta_j(x) dS) &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

### Предложение 1

Решение линейной задачи с начальным условиям ортогональности (8) удовлетворяет этим усл-м при  $\forall t > 0$ .

$$\begin{aligned} Q_T^\pm &\equiv \mathcal{F}^\pm \times (0, T), \quad G_T^\pm \equiv \mathcal{G}^\pm \times (0, T), \quad D_T \equiv Q_T^+ \cup Q_T^-, \quad Q_T \equiv \overline{Q_T^+} \cup Q_T^-, \\ G_T &\equiv G_T^+ \cup G_T^-; \quad |u|_{D_T}^{(\alpha, \alpha/2)} \equiv |u|_{Q_T^+}^{(\alpha, \alpha/2)} + |u|_{Q_T^-}^{(\alpha, \alpha/2)}, \quad \|u\|_\Omega \equiv \|u\|_{L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Сначала была доказана **локальная теорема существования для линейной задачи**. Рассмотрим **однородную линейную задачу (7)** с усл-ями ортогонал-ти (8) для  $w_0$  и  $r_0$ . Мы получим экспоненциальные по времени  $t$   $L_2$ -оценки для  $w$  и  $r$ .

## Предложение 2 (Энергетическая оценка)

Пусть форма  $R_0(r) = \int_G r B_0^\pm r \, dS$  положительно определена, т. е.

$$c^{-1} \|r\|_{W_2^1(G)}^2 \leq R_0(r) \leq c \|r\|_{W_2^1(G)}^2 \quad (9)$$

для  $\forall r(x)$ , удовлетворяющего условиям ортогональности (8).

**Тогда** для реш-я однородной лин-й зад-и (7), (8) верно нер-во

$$\|e^{\beta_1 t} w(\cdot, t)\|_{\mathcal{F}}^2 + \|e^{\beta_1 t} r(\cdot, t)\|_{W_2^1(G)}^2 \leq c \{ \|w_0\|_{\mathcal{F}}^2 + \|r_0\|_{W_2^1(G)}^2 \}, \quad \forall t > 0, \quad (10)$$

где  $\beta_1, c > 0$  не зависят от  $t$ .

Док-во использует идею оценки обобщённой энергии.

**Замечание.** Заметим, что усл-е (9) совпадает с положительностью второй вариации потенциальной энергии.

## Глобальная теорема существования для линейной однородной задачи

Если функционал  $R_0(r) = \int_{\mathcal{G}} r \mathcal{B}_0^\pm r \, dS$  положительно определён, тогда однородная линейная задача (7) с  $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{C}^{2+\alpha}(\cup \mathcal{F}^\pm)$ ,  $r_0 \in \mathbf{C}^{3+\alpha}(\mathcal{G})$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ , которые удовлетворяют условиям согласования и ортогональности, имеет единственное решение  $(\mathbf{w}, p_1, r)$  т. е., что  $\mathbf{w} \in \mathbf{C}^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(D_\infty)$ ,  $\nabla p_1 \in \mathbf{C}^{\alpha, \alpha/2}(D_\infty)$ ,  $p_1 \in \mathbf{C}^{(\gamma, 1+\alpha)}(D_\infty)$ ,  $\gamma < \alpha$ ,  $r(\cdot, t) \in \mathbf{C}^{3+\alpha}(\mathcal{G})$  при  $\forall t \in (0, \infty)$ , и верно неравенство

$$\begin{aligned} & |e^{\beta t} \mathbf{w}|_{D_\infty}^{(2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2})} + |e^{\beta t} \nabla p_1|_{D_\infty}^{(\alpha, \frac{\alpha}{2})} + |e^{\beta t} p_1|_{D_\infty}^{(\gamma, 1+\alpha)} + |e^{\beta t} r|_{G_\infty}^{(3+\alpha, \frac{3+\alpha}{2})} \\ & + |e^{\beta t} \mathcal{D}_t r|_{G_\infty}^{(2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2})} \leq c_1 \left\{ |\mathbf{w}_0|_{\cup \mathcal{F}^\pm}^{(2+\alpha)} + |r_0|_{\mathcal{G}}^{(3+\alpha)} \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

с некоторым  $0 < \beta < \beta_1$  и константой  $c_1 > 0$ .

- На этой теореме основано доказательство устойчивости эволюционной задачи при малых возмущениях состояния равновесия вращающейся двухслойной капли.

# Нелинейная задача

После преобразования Ханзавы нелинейную задачу запишем в виде:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(\mathcal{D}_t \mathbf{u} + 2\omega(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{u})) - \bar{\mu} \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla q &= \bar{\rho} \mathbf{f} + l_1(\mathbf{u}, q, r), \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= l_2(\mathbf{u}, r) \equiv \nabla \cdot \mathbf{L}(\mathbf{u}, r) \quad \text{в } \mathcal{F}, \quad t > 0, \\ \mu^- \Pi_{\mathcal{G}} \mathbb{S}(\mathbf{u}) \mathbf{N} &= l_3^-(\mathbf{u}, r) \quad \text{на } \mathcal{G}^-, \\ [\bar{\mu} \Pi_{\mathcal{G}} \mathbb{S}(\mathbf{u}) \mathbf{N}]|_{\mathcal{G}^+} &= l_3^+(\mathbf{u}, r) \quad \text{на } \mathcal{G}^+, \\ -q + \mu^- \mathbf{N} \cdot \mathbb{S}(\mathbf{u}) \mathbf{N} + \mathcal{B}_0^- r &= l_4^-(\mathbf{u}, r) + l_5^-(r) \quad \text{на } \mathcal{G}^-, \\ [\mathbf{u}]|_{\mathcal{G}^+} = 0, \quad [-q + \bar{\mu} \mathbf{N} \cdot \mathbb{S}(\mathbf{u}) \mathbf{N}]|_{\mathcal{G}^+} + \mathcal{B}_0^+ r &= l_4^+(\mathbf{u}, r) + l_5^+(r) \quad \text{на } \mathcal{G}^+, \\ \mathcal{D}_t r - \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} &= l_6(\mathbf{u}, r) \quad \text{на } \mathcal{G}, \\ \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 \quad \text{в } \mathcal{F}, \quad r|_{t=0} = r_0 \quad \text{на } \mathcal{G}, \end{aligned} \tag{12}$$

где  $\mathbf{u}(\mathbf{z}, t) = \tilde{\mathbf{v}}(e_r(\mathbf{z}, t), t)$ ,  $\mathbf{u}_0(\mathbf{z}) = \tilde{\mathbf{v}}(e_{r_0}(\mathbf{z}, 0))$ ,  
 $q(\mathbf{z}, t) = \tilde{p}(e_r(\mathbf{z}, t), t)$ ,  $l_i(\mathbf{u}, q, r)$  – нелинейные члены.

Условия ортогональности тоже выразим через отклонение  $r$ .



## Theorem (Глобальная разрешить для нелинейной задачи)

Пусть  $\alpha, \gamma \in (0, 1)$ ,  $[\bar{\rho}]|_{G^+} > 0$ ,  $\mathbf{u}_0 \in C^{2+\alpha}(\cup \mathcal{F}^\pm)$ ,  $r_0 \in C^{3+\alpha}(g)$ ,  $\mathbf{f}, \mathcal{D}_x \mathbf{f} \in C^{\alpha, \frac{1+\alpha-\gamma}{2}}(Q_{T_0})$ , вторая вариация потенциальной энергии положительна, для данных выполнены усл-я ортогональности и согласования при  $t = 0$ , а также малости  $|e^{bt} \mathbf{f}, \nabla \mathbf{f}|_{Q_\infty}^{(\alpha, \frac{1+\alpha-\gamma}{2})} + |\mathbf{u}_0|_{\cup \mathcal{F}^\pm}^{(2+\alpha)} + |r_0|_g^{(3+\alpha)} \leq \varepsilon$ . Тогда у задачи дифракции  $\exists !$  реш-е  $(\mathbf{u}, q, r)$  при  $\forall t > 0$  и  $a < b$

$$|e^{at} \mathbf{u}|_{D_\infty}^{(2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2})} + |e^{at} \nabla q|_{D_\infty}^{(\alpha, \frac{\alpha}{2})} + |e^{at} q|_{D_\infty}^{(\gamma, 1+\alpha)} + |e^{at} r|_{G_\infty}^{(3+\alpha, \frac{3+\alpha}{2})} + |e^{at} \mathcal{D}_t r|_{G_\infty}^{(2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2})} \leq c(\varepsilon) (|e^{bt} \mathbf{f}|_{Q_\infty}^{(1, \frac{1+\alpha-\gamma}{2})} + |\mathbf{u}_0|_{\cup \mathcal{F}^\pm}^{(2+\alpha)} + |r_0|_g^{(3+\alpha)}).$$

- Доказана экспоненциальная устойчивость фигур равнов-я, т.е. при малых начальных данных, скорости вращения и экспоненциально ↘ массовых силах, а также при положительности 2-ой вариации функц-ла энергии возмущение осесимметричных фигур равновесия экспоненц-но  $\rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ ,  $\Rightarrow$  движение двухслойной капли переходит во вращение жидкой массы как твердого тела. ([4] (2021) I.Den., V.Sol., Зап. научн. семин. ПОМИ, 508; [5] (2022) J Math Fluid Mech 24(2); [6] (2022) Mathematics, 10(24).)

# Сжимаемые и двухфазные жидкости

- Существование поверхности равновесия для изолированной сжимаемой жидкой массы, вращающейся вокруг неподвижной оси с постоянной скоростью, впервые было показано в [7] (1993) (Solonnikov V. A., Tani A., *Adv. Math. Sci. and Applications*, 2 (1), 139–145).
- Мы распространили этот метод на случай конечной массы двух несмешивающихся сжимаемых жидкостей и доказали существование фигур равновесия для вращающейся сжимаемой двухслойной жидкости [8] (2023) (Den. I.V.; Solon. V.A. *Mathematics*. 2024, 12 (1), 94 ).
- Существование фигур равновесия для вращающейся двухфазной жидкости доказано в [9] (2024). (И. В. Ден., *Алгебра и анализ* 36(3).)
- Локальная разрешимость нестационарной двухфазной задачи была получена в [10] (2000) (Den. I.V., *Interf. Free Bound.*, 2(3), (2000)).
- Глобальная разрешимость доказана в [11] (2020) (В.А. Солон. *Алгебра и анализ*, 32(1), 121-186).
- Гравитация жидкостей не учитывается. Наше двухфазное тело можно рассматривать, например, как вращающуюся планету с газообразной атмосферой.

# Постановка задачи для двухфазной жидкости

Теперь будем считать, что жидкости находятся в контейнере, то есть снаружи сжимаемую жидкость ограничивает замкнутая поверхность  $\Sigma$ , на которой задано условие прилипания

$$\mathbf{v}|_{\Sigma} = 0. \quad (13)$$

Мы предполагаем, что граница раздела  $\Gamma_0$  и  $\Sigma$  не имеют пересечений в начальный момент времени (см. рис. 3).

Будем считать, что область  $\Omega_0^+$  близка к шару  $B_{R_0}$ , объём которого равен её объёму. Без ограничения общности мы поместим центр этого шара в начало координат, которое совпадает с центром тяжести капли в начальный момент, при этом граница раздела  $\Gamma_t$  определяется как возмущение  $r$  сферы  $S_{R_0}(0)$  по нормали (рис. 4).

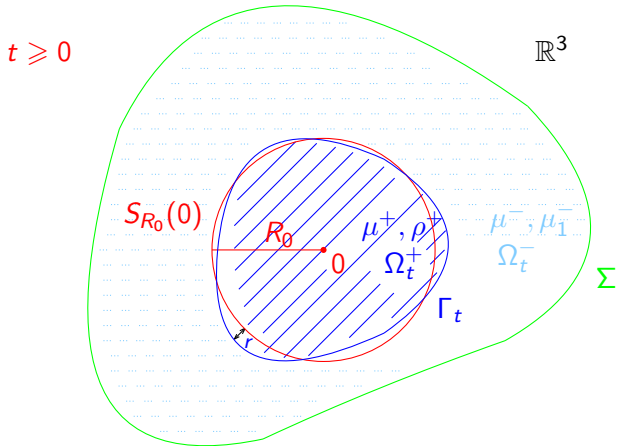


Рис. 4. Движение двух разнородных жидкостей в сосуде.

В этом случае, в силу несжимаемости одной из жидкостей, объёмы жидкостей сохраняются со временем. Основным результатом на данный момент является глобальная по времени разрешимость задачи, при этом доказательство опирается на теорему о локальной разрешимости.

# Фигуры равновесия для двухфазной жидкости

Пусть две вязкие несмешивающиеся жидкости содержатся в области  $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ , ограниченной поверхностью  $\mathcal{G}^-$  и разделённой замкнутой границей раздела  $\mathcal{G}^+$  на две области  $\mathcal{F}^+$  и  $\mathcal{F}^-$ , причём  $\mathcal{G}^+ \equiv \partial\mathcal{F}^+$ , и  $\mathcal{G}^- \cap \mathcal{G}^+ = \emptyset$ . Это двухфазное тело вращается с угловой скоростью  $\omega$  вокруг вертикальной оси  $x_3$ .

Несжимаемая жидкость, находящаяся в  $\mathcal{F}^+$ , имеет динамическую вязкость  $\mu^+$  и плотность  $\rho^+ > 0$ . Сжимаемую жидкость предполагаем баротропной, т. е. давление  $p^- = p(\rho)$  – известная  $\uparrow$  функция плотности:  $p'(\rho) > 0$ . Пусть  $\rho^- = \rho(|x'|)$ ,  $x' = (x_1, x_2, 0)$ .

Будем считать, что фигуры равновесия представляют собой почти шарообразные вложенные области с радиусами  $R_0^\pm$  ( $R_0^+ < R_0^-$ ), а движение жидкостей близко к состоянию покоя, т. е. скорость  $v$  мала, а плотность  $\rho$  мало отличается от ступенчатой функции  $\rho^\pm > 0$ . Пусть шары  $B_{R_0^\pm} \equiv \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq R_0^\pm\}$  (см. схематический рис. 4).

Мы доказываем существование границ  $\mathcal{G}^+$  и  $\mathcal{G}^-$  фигур равновесия  $\mathcal{F}^+$  и  $\mathcal{F}$  соответственно,  $\mathcal{F}^- \equiv \mathcal{F} \setminus \overline{\mathcal{F}^+}$ .

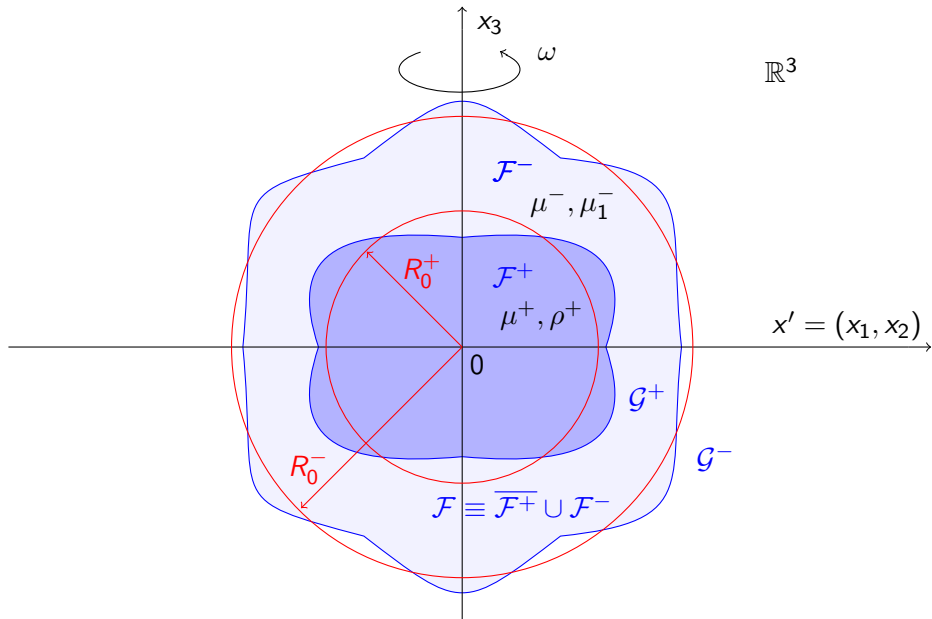


Fig. 4

Пусть фигуры равнов-я  $\mathcal{F}^+$ ,  $\mathcal{F}$  мало отличаются от шаров  $B_{R_0^+}$ ,  $B_{R_0^-}$ ; причём  $\mathcal{F}^+ = |B_{R_0^+}| \equiv \frac{4\pi}{3}R_0^{+3}$ .

В состоянии покоя двухфазное тело, состоящее из двух вложенных друг в друга сферических слоев  $B_{R_0^+}$  и  $B_{R_0^-} \setminus B_{R_0^+}$  со ступенчатым распределением плотностей  $\rho^\pm$ , имеет кусочно-постоянное давление:

$$\begin{aligned} p(\rho^+) &= \frac{2\sigma^+}{R_0^+} + \frac{2\sigma^-}{R_0^-} \quad \text{в } B_{R_0^+}, \\ p(\rho^-) &= \frac{2\sigma^-}{R_0^-} \quad \text{в } B_{R_0^-} \setminus B_{R_0^+}, \end{aligned} \tag{14}$$

где  $\sigma^\pm > 0$  – коэффициенты поверх-го натяжения на сферах  $S_{R_0^\pm}$ .  
Массы слоёв равны

$$\rho^+ |B_{R_0^+}| = m^+, \quad \rho^- (|B_{R_0^-}| - |B_{R_0^+}|) = m^-. \tag{15}$$

# Стационарное решение

Стационарное движение двухфазного тела  $\mathcal{F} \equiv \cup \mathcal{F}^\pm$ , равномерно вращающегося вокруг оси  $x_3$  с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , описывается **однородными стационарными уравнениями Навье–Стокса**

$$\begin{aligned} \rho^+(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbb{T} &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 & \text{в } \mathcal{F}^+, \\ \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbb{T} &= 0, & \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0 & \text{в } \mathcal{F}^-, \end{aligned} \quad (16)$$

( $\mathbf{v}$  — скорость, а  $\mathcal{P}$  — давление) с **граничными условиями**

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}]|_{\mathcal{G}^+} &= 0, & [\mathbb{T}(\mathbf{v}, \mathcal{P})\mathbf{n}]|_{\mathcal{G}^+} &= \sigma^+ \mathcal{H}^+ \mathbf{n} & \text{на } \mathcal{G}^+, \\ \mathbb{T}(\mathbf{v}, \mathcal{P})\mathbf{n}|_{\mathcal{G}^-} &= \sigma^- \mathcal{H}^- \mathbf{n} & \text{на } \mathcal{G}^-, & \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{на } \mathcal{G} = \mathcal{G}^+ \cup \mathcal{G}^-, \end{aligned} \quad (17)$$

где тен-р напряж-й  $\mathbb{T}(\mathbf{v}, \rho) = \begin{cases} -\rho^+ \mathbb{I} + \mu^+ \mathbb{S}(\mathbf{v}) & \text{в } \mathcal{F}^+, \\ (-\rho^-(\rho) + \mu_1^- \nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbb{I} + \mu^- \mathbb{S}(\mathbf{v}) & \text{в } \mathcal{F}^-, \end{cases}$

а  $(\mathbb{S}(\mathbf{v}))_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$  — удвоенный тензор скоростей деформации,

$\mathbb{I}$  — единичная матрица,  $\mathcal{H}^\pm$  — удвоенные средние кривизны  $\mathcal{G}^\pm$ ,  $\mu^\pm$  — ступенчатые фун-и динамических вязкостей,  $\mu^\pm > 0$ ,  $2\mu^- + 3\mu_1^- \geq 0$ ;  $\sigma^\pm > 0$  — коэффициенты поверх-го натяжения на  $\mathcal{G}^\pm$ .



Соотношение  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ , где  $\mathbf{n}$  – вектор внешней нормали к  $\mathcal{G} \equiv \cup \mathcal{G}^\pm$ , следует из непротекания жидкости через границы  $\mathcal{G}^\pm$ .

Давление  $\mathcal{P}^-$  – заданная функция от  $\rho$ .

Поле скоростей  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \omega \mathbf{e}_3 \times \mathbf{x} \equiv \omega \boldsymbol{\eta}_3$  и градиент  $\phi$ -и давления

$$\nabla \mathcal{P}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \rho^+ \omega^2 x' \equiv \rho^+ \frac{\omega^2}{2} \nabla |x'|^2 \\ \mathcal{P}'(\rho) \nabla \rho(\mathbf{x}) = \rho(|x'|) \frac{\omega^2}{2} \nabla |x'|^2 \end{cases} \quad \text{двухфазной жидкой массы,}$$

равномерно вращающейся вокруг оси с постоянной угл. скоростью  $\omega$ , удовлетворяют однородным стационарным урав-ям Навье-Стокса

(16), где  $\boldsymbol{\eta}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_i \times \mathbf{x}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , – векторы жёсткого вращения,  $\mathbf{e}_i$  – базисные векторы. Подставим  $\mathbf{v}, \mathcal{P}$  в краевые условия (17).  $\Rightarrow$

Уравнения для границ  $\mathcal{G}^\pm$  :

$$\begin{aligned} \sigma^+ \mathcal{H}^+(x) + [\mathcal{P}(\rho)]|_{\mathcal{G}^+} &= 0, \quad x \in \mathcal{G}^+, \\ \sigma^- \mathcal{H}^-(x) + \mathcal{P}^-(\rho) &= 0, \quad x \in \mathcal{G}^-, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $\mathcal{H}^\pm$  – удвоенные средние кривизны поверхностей  $\mathcal{G}^\pm$ .

В простейшем случае  $\mathcal{P}^+(\mathbf{x}) \equiv \rho^+ (\frac{\omega^2}{2} |x'|^2 + c^+)$ ,  $\mathcal{P}^-(\rho) = \rho(\mathbf{x})$ ,

$\mathcal{P}^-(\rho) \equiv \frac{\rho^2(\mathbf{x})}{2} + \rho_0^-$  в  $\mathcal{F}^\pm$  с постоянными  $c^+, \rho_0^-$ . Плотность при этом

$\rho(\mathbf{x}) = \frac{\omega^2}{2} |x'|^2 + c^-, x \in \mathcal{F}^-$ . Постоянные  $\rho_0^+ \equiv \rho^+ c^+, \rho_0^-$  можно найти

из соотн-й (14) для давления внутри вложенных шаров  $B_{\rho_0^+}, B_{\rho_0^-}$

Итак, равенства для градиентов давления:

$$\nabla \mathcal{P}^+(x) = \rho^+ \nabla \left( \frac{\omega^2}{2} |x'|^2 \right), \quad \nabla \mathcal{P}^-(\rho) = \mathcal{P}'^-(\rho) \nabla \left( \frac{\omega^2}{2} |x'|^2 \right).$$

Поэтому в простейшем случае  $\mathcal{P}^+(x) \equiv \rho^+ \left( \frac{\omega^2}{2} |x'|^2 + c^+ \right)$ ,  
 $\mathcal{P}'^-(\rho) = \rho(x)$ ,  $\mathcal{P}^-(\rho) \equiv \frac{\rho^2(x)}{2} + p_0^-$  в  $\mathcal{F}^\pm$  с постоянными  $c^+$ ,  $p_0^-$ .

Плотность при этом  $\rho(x) = \frac{\omega^2}{2} |x'|^2 + c^-$ ,  $x \in \mathcal{F}^-$ , с произвольной  $c^-$ .

В общем случае функция  $\mathcal{P}^-(\rho)$  гладкая и её производная  $\mathcal{P}'^-(\rho)$  положительна. Введем  $Q(\rho)$  такую, что

$$\nabla Q(\rho) \equiv \frac{\mathcal{P}'^-(\rho) \nabla \rho}{\rho} = \nabla \left( \frac{\omega^2}{2} |x'|^2 \right). \quad (19)$$

Функция  $Q(\rho) = \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{\mathcal{P}'^-(s)}{s} ds$ ,  $\rho_1 \geq 0$ . Поскольку  $Q'(\rho) = \frac{\mathcal{P}'^-(\rho)}{\rho} > 0$ , то существует обратная функция  $Q^{-1}$ . И из (19) следует, что

$$\rho = Q^{-1} \left( \frac{\omega^2}{2} |x'|^2 + C^- \right) \text{ в } \mathcal{F}^- \quad (20)$$

с произвольной константой  $C^-$ .

Подставляя  $\rho$  в уравнения для границ (18), имеем

$$\begin{aligned} \sigma^- \mathcal{H}^-(x) + \mathcal{P}^- \left( Q^{-1} \left( \frac{\omega^2}{2} |x'|^2 + C^- \right) \right) &= 0, \quad x \in \mathcal{G}^-, \quad x' = (x_1, x_2, 0), \\ \sigma^+ \mathcal{H}^+(x) + \rho^+ \left( \frac{\omega^2}{2} |x'|^2 + c^+ \right) - \mathcal{P}^- \left( Q^{-1} \left( \frac{\omega^2}{2} |x'|^2 + C^- \right) \right) &= 0, \quad x \in \mathcal{G}^+. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь  $c^+$  — произвольная постоянная:  $\rho^+ c^+ = \frac{2\sigma^+}{R_0^+} + \frac{2\sigma^-}{R_0^-}$ . Задавая массу сжимаемой жидкости, получаем уравнение для определения  $C^-$ :

$$m^- = \int_{\mathcal{F}^-} \rho(x) dx \equiv \int_{\mathcal{F}^-} Q^{-1} \left( \frac{\omega^2}{2} |x'|^2 + C^- \right) dx. \quad (22)$$

(Масса несжимаемой жидкости вычисляется по формуле

$$m^+ = \int_{\mathcal{F}^+} \rho^+ dx \equiv \frac{4\pi}{3} \rho^+ R_0^{+3}.)$$

Еще одним параметром задачи мы считаем **угловой момент**:

$$\beta \equiv \int_{\cup \mathcal{F}^\pm} \rho(x) \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\eta}_3 dx = \omega \rho^+ \int_{\mathcal{F}^+} |x'|^2 dx + \omega \int_{\mathcal{F}^-} Q^{-1} \left( \frac{\omega^2}{2} |x'|^2 + C^- \right) |x'|^2 dx. \quad (23)$$

При этом угловая скорость  $\omega$  будет функцией от  $\beta$ .

Пусть  $S_1$  — единичная сфера в  $\mathbb{R}^3$  с центром в нуле,  $\xi = \frac{x}{|x|} \in S_1$ , и поверхности  $\mathcal{G}^\pm$  заданы функциями  $R^\pm(\xi)$  на  $S_1$ , которые чётны по  $x_3$  и осесимметричны, т. е. зависят только от  $|\xi'| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$  и  $\xi_3$ .

## Теорема существования фигур равновесия

Пусть  $\alpha > 0$ ,  $\alpha \notin \mathbb{N}$ , и  $\mathcal{P}^-(\rho) \in C^{1+\alpha}(\mathbb{R}_+)$  — положительная возрастающая функция такая, что для неё верно равенство  $\mathcal{P}^-(\rho^-) = \frac{2\sigma^-}{R_0^-}$ , а для задачи (16), (17) выполнено условие

$$\frac{2\sigma^-(R_0^{-3} - R_0^{+3})}{3\rho^- R_0^{-4}} - \mathcal{P}'^-(\rho^-) \neq 0. \quad (24)$$

Тогда для  $\forall$  углов. момента  $\beta$ , удовлетворяющего оценке  $|\beta| < \varepsilon$  с достаточно малым  $\varepsilon$ , существует единственное решение  $(R^\pm(\xi), \omega, C^-) \in \tilde{C}^{2+\alpha}(S_1) \times \tilde{C}^{2+\alpha}(S_1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  системы (21)–(23) т., что

$$\sum_{\pm} \{|R^\pm - R_0^\pm|_{C^{2+\alpha}(S_1)} + |C^- - \rho^-|\} + |\omega| < c|\beta| < c\varepsilon.$$

Здесь  $R^\pm$  — переменные радиусы,  $\omega$  — угл. скорость,  $C^-$  — константа.

- Доказательство проводится в чётных по  $\xi_3$ , вращательно симметричных пространствах Гёльдера  $\tilde{C}^{2+\alpha}(S_1)$  с помощью теоремы о неявной функции. Вычитая массу  $m^-$  из уравн-я (22), представим систему (21)–(23) в виде нелинейного векторного уравн-я:

$$\Phi(\varphi) = 0, \quad (25)$$

где  $\Phi(\varphi) = (\Phi_1^\pm, \Phi_2, \Phi_3^-)$ ,  $\varphi \equiv (r^\pm, \omega, \lambda^-)$ ,  $r^\pm \equiv R^\pm - R_0^\pm$ ,  $\lambda^- \equiv C^- - \rho^-$ .

- Анализ задачи (25) базируется на её **линеаризации**

$$\Phi'(0)\varphi + \psi(\varphi) = 0, \quad (26)$$

где  $\Phi'(0) = (\Phi_1^{\pm'}, \Phi_2', \Phi_3^{-'})(0)$  — это производная Фреше от  $\Phi$ , а  $\psi(\varphi) = \Phi(\varphi) - \Phi'(0)\varphi \equiv (\psi_1^\pm, \psi_2, \psi_3^-)$  — нелинейный остаток.

Обращая  $\Phi'(0)$ , записываем уравнение (26) в виде:

$$\varphi + \mathcal{A}\psi(\varphi) = 0, \quad \mathcal{A} = \Phi'(0)^{-1}. \quad (27)$$

- Завершает док-во тот факт, что  $\mathcal{A}\psi$  — сжимающий оператор. Тогда теорема о неподвижной точке гарантирует существование  $\varphi$ .

# Заключение для двухслойной несжимаемой жидкости

- Мы рассмотрели условия устойчивости равномерно вращающейся конечной массы, состоящей из двух несмешивающихся вязких несжимаемых жидкостей с неизвестной границей раздела и внешней свободной границей, причём на обеих поверхностях действуют силы поверхностного натяжения.
- Доказательство устойчивости основано на анализе эволюционной задачи для малых возмущений состояния равновесия вращающейся двухслойной капли.
- Доказано, что при достаточно малых начальных данных и скорости вращения, а также при положительности второй вариации функционала энергии возмущение осесимметричной фигуры равновесия экспоненциально стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , при этом движение капли переходит во вращение жидкой массы как твёрдого тела. [4] (2021) I.Den., V.Sol., Зап. научн. семин. ПОМИ, 508;
- [10] И. В. Ден-а, В. А. Солонников. Движение капли в несжимаемой жидкости: монография. Санкт-Петербург: Лань, 2020. 296 с. — ISBN 978-5-8114-4896-8.

# Заключение для двухфазной жидкости

- Таким образом, если функция давления задается гладкой растущей функцией плотности сжимаемой жидкости, а данные задачи удовлетворяют некоторому условию, то для двухфазной жидкости при малом угловом моменте существуют осесимметричные фигуры равновесия, близкие к вложенным шарам. Исследование проведено без учёта гравитации. Такая ситуация реализуется в космосе, и наше двухфазное тело можно рассматривать, как планету с атмосферой.
- Дальнейшая цель — доказать глобальную разрешимость по времени нелинейной нестационарной двухфазной задачи с вращением при малых данных и малом отклонении формы тела от вложенных шаров. Следующий этап — доказательство стремления глобального решения нестационарной задачи к стационарному решению  $(\mathcal{V}, \mathcal{P})$  и изучение устойчивости полученных равновесных фигур.
- Аналогичный анализ был проведён для двухкомпонентной несжим. жидкости [5] (2022) I.Den., V.Sol., J Math Fluid Mech 24(2).
- По итогам работы написана статья [9] (2024) И. В. Ден., Алгебра и анализ 36(3), 62–80.