КОНФЕРЕНЦИЯ
«Уравнения с частными производными и их приложения»

07 — 09 октября 2024 года

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

А.Е. Мамонтов, Д.А. Прокудин

Об однозначной разрешимости и стабилизации решений начально-краевых задач для одномерных уравнений динамики сжимаемых вязких смесей

Модели динамики многокомпонентных сред (смесей)

Одним из многочисленных вариантов моделей динамики многокомпонентных (N-компонентных, $N \geqslant 2$) сред является многоскоростная многотемпературная модель[1,2,3]:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{u}_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{1}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial (\rho_i \boldsymbol{u}_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{u}_i) + \nabla p_i = \\ = \operatorname{div} \mathbb{S}_i + \boldsymbol{J}_i + \rho_i \boldsymbol{f}_i, \quad i = 1, \ldots, N,\end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial \mathcal{E}_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathcal{E}_i \boldsymbol{u}_i) + \operatorname{div}\Big(\boldsymbol{q}_i - \mathbb{S}_i \boldsymbol{u}_i + p_i \boldsymbol{u}_i\Big) = \\ = \Gamma_i + \mathcal{Q}_i + \boldsymbol{J}_i \cdot \boldsymbol{u}_i + \rho_i \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{u}_i, \quad i = 1, \ldots, N.\end{gathered} \tag{3}$$

[1] Rajagopal K.L., Tao L. Mechanics of mixtures. World Scientific Publishing, Singapore, 1995.
[2] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. Наука, Москва, 1987.
[3] Gard S.K., Prichett J.W. Dynamics of gas-fluidzed beds. Journal of Applied Physics, 1975, V. 46, № 10, P. 4493–4500.

Здесь $\rho_i \geqslant 0$ — плотность i-й компоненты; $\boldsymbol{u}_i$ — скорость i-й компоненты; $p_i = p_i(\rho_i, \theta_i)$ — давление в i-й компоненте, где $\theta_i > 0$ — температура i-й составляющей;

$$\begin{gathered}\mathbb{S}_i = \sum_{j=1}^{N} (\lambda_{ij}(\mathrm{div}\boldsymbol{u}_j)\mathbb{I} + 2\mu_{ij}\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_j)) = \\ = \sum_{j=1}^{N} \left(\left(\lambda_{ij} + \frac{2}{3}\mu_{ij}\right)(\mathrm{div}\boldsymbol{u}_j)\mathbb{I} + 2\mu_{ij}\left(\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_j) - \frac{1}{3}(\mathrm{div}\boldsymbol{u}_j)\mathbb{I}\right)\right)\end{gathered} \tag{4}$$

— вязкая часть тензора напряжений в i-й компоненте, где $\mathbb{I}$ — единичный тензор, $\mathbb{D}(\boldsymbol{w}) = \dfrac{1}{2}((\nabla \otimes \boldsymbol{w}) + (\nabla \otimes \boldsymbol{w})^*)$ — тензор скоростей деформаций векторного поля $\boldsymbol{w}$ (верхний индекс $*$ означает транспонирование), числовые коэффициенты вязкостей λ_{ij} и μ_{ij} образуют соответственно матрицы $\boldsymbol{\Lambda}$ и $\mathbf{M}$, такие, что

$$\mathbf{M} > 0, \quad \boldsymbol{\Lambda} + \frac{2}{3}\mathbf{M} \geqslant 0, \tag{5}$$

откуда в частности следует, что матрица

$$\mathbf{N} = \{\nu_{ij}\}_{i,j=1}^{N} = \boldsymbol{\Lambda} + 2\mathbf{M} > 0; \tag{6}$$

далее,

$$\boldsymbol{J}_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(\boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_i), \quad a_{ij} = a_{ji} = \mathrm{const}, \quad i, j = 1, \ldots, N \tag{7}$$

— приток импульса в i-ю компоненту из остальных компонент;

$\boldsymbol{f}_i$ — плотность внешних массовых сил, действующих из внешней среды на i-ю компоненту; $\mathcal{E}_i = \dfrac{\rho_i|\boldsymbol{u}_i|^2}{2} + \rho_i e_i$ — полная энергия i-й компоненты, где $e_i = e_i(\rho_i, \theta_i)$ — внутренняя удельная энергия i-й компоненты;

$$\boldsymbol{q}_i = -k_i(\theta_i)\nabla\theta_i \tag{8}$$

— тепловой поток внутри i-й компоненты, где k_i — внутренняя теплопроводность i-й компоненты;

$$\Gamma_i = \sum_{j=1}^{N} b_{ij}(\theta_j - \theta_i) + \Gamma, \quad b_{ij} = b_{ji} = \mathrm{const}, \quad i, j = 1, \ldots, N \tag{9}$$

— приток тепловой энергии в i-ю компоненту из остальных компонент, где

$$\Gamma = \frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}|\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_j|^2;$$

наконец, $\mathcal{Q}_i$ отвечают за приток энергии в i-ую компоненту из других компонент извне, т. е. из внешней среды и из прочих компонент (сверх того, что уже учтено в Γ_i).

Система уравнений (1)–(3) не является замкнутой, поэтому необходимо привлекать дополнительные соотношения, из которых в первую очередь следует указать соотношения Гиббса

$$\theta_i ds_i = de_i + p_i d\left(\frac{1}{\rho_i}\right), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{10}$$

где $s_i = s_i(\rho_i, \theta_i)$ — энтропия i-й компоненты, что эквивалентно соотношениям Максвелла

$$\rho_i^2 \frac{\partial e_i}{\partial \rho_i} = p_i - \theta_i \frac{\partial p_i}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{11}$$

а также условия термодинамической устойчивости

$$\frac{\partial p_i}{\partial \rho_i} > 0, \quad \frac{\partial e_i}{\partial \theta_i} > 0 \quad i = 1, \ldots, N. \tag{12}$$

Для гладких решений $(\rho_1, \ldots, \rho_N, \theta_1, \ldots \theta_N, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_N)$ системы (1)–(3) уравнения (3) (ввиду (1), (2), (11)) можно записать в одной из следующих эквивалентных форм:

$$\frac{\partial(\rho_i e_i)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho_i e_i \boldsymbol{u}_i) + p_i \mathrm{div} \boldsymbol{u}_i + \mathrm{div} \boldsymbol{q}_i = \\ = \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i) + \Gamma_i + \mathcal{Q}_i, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{13}$$

$$\frac{\partial(\rho_i s_i)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho_i s_i \boldsymbol{u}_i) + \mathrm{div}\left(\frac{\boldsymbol{q}_i}{\theta_i}\right) = \\ = \frac{\mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i)}{\theta_i} + \frac{\Gamma_i}{\theta_i} + \frac{\mathcal{Q}_i}{\theta_i} - \frac{\boldsymbol{q}_i \cdot \nabla\theta_i}{\theta_i^2}, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{14}$$

$$\frac{\partial(\rho_i \theta_i)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho_i \theta_i \boldsymbol{u}_i) = \left(\frac{\partial e_i}{\partial \theta_i}\right)^{-1} \Big(\mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i) + \\ + \Gamma_i + \mathcal{Q}_i - \mathrm{div} \boldsymbol{q}_i - \theta_i \frac{\partial p_i}{\partial \theta_i} \mathrm{div} \boldsymbol{u}_i\Big), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{15}$$

И с физической точки зрения, и с математических позиций необходимо обеспечить неотрицательность производства энтропии. Общая энтропия системы

$$S = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \rho_i s_i d\boldsymbol{x} \tag{16}$$

(Ω — область течения с границей $\partial\Omega$ в $\mathbb{R}^n$) должна не убывать со временем в случае термодинамической замкнутости, т. е. если обращается в нуль приток тепла извне, что означает $\sum\limits_{i=1}^{N} \mathcal{Q}_i = 0$ (и, по крайней мере, в случае когда все $\mathcal{Q}_i = 0$), и $\boldsymbol{u_i}|_{\partial\Omega} = 0$, $\boldsymbol{q}_i \cdot \boldsymbol{n}|_{\partial\Omega} = 0$, $i = 1, \ldots, N$, где $\boldsymbol{n}$ — вектор единичной внешней нормали к $\partial\Omega$. Тогда из (8), (14) получаем

$$\begin{gathered} \frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \frac{\mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i)}{\theta_i} d\boldsymbol{x} + \\ + \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \frac{k_i(\theta_i)|\nabla\theta_i|^2}{\theta_i^2} d\boldsymbol{x} + \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \frac{\Gamma_i}{\theta_i} d\boldsymbol{x}. \end{gathered} \tag{17}$$

Таким образом, достаточно потребовать выполнения простых условий на коэффициенты

$$k_i \geqslant 0, \quad a_{ij} \geqslant 0, \quad b_{ij} \geqslant 0, \quad i,j = 1,\ldots,N, \tag{18}$$

а также следующего условия для тензоров вязких напряжений:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i)}{\theta_i} \geqslant 0. \tag{19}$$

В рамках условий на матрицы вязкостей, перечисленных в (5), выполнение (19) неочевидно.

В широком классе задач для описания процессов теплопереноса в многокомпонентных средах используется подход, согласно которому вместо уравнений сохранения энергии для каждой компоненты применяется уравнение сохранения энергии многокомпонентной среды в целом[4,5,6,7,8].

[4] Папин А.А. Краевые задачи двухфазной фильтрации. Изд-во АлтГУ, Барнаул, 2009.

[5] Жумагулов Б.Т., Монахов В.Н. Гидродинамика нефтедобычи. КазгосИНТИ, Алматы, 2001.

[6] Воинов О.В., Пухначев В.В. Термокапиллярное движение в газожидкостной смеси. Прикладная механика и техническая физика, 1980, Т. 21, № 5, С. 38–45.

[7] Atkin R. J., Craine R. E. Continuum Theories of Mixtures: Applications. IMA Journal of Applied Mathematics, 1976, V. 17, № 2, P. 153–207.

[8] Muller I. A thermodynamic theory of mixtures of fluids. Arch. Ration. Mech. Anal., 1968, V. 28, № 1, P. 1–39.

При этом предполагается, что температуры составляющих в каждой точке среды совпадают: $\theta_i = \theta > 0$, $i = 1, \dots, N$; в соотношениях выше все θ_i заменяются на θ, т. е. $p_i = p_i(\rho_i, \theta)$, $e_i = e_i(\rho_i, \theta)$, $s_i = s_i(\rho_i, \theta)$ (соответствующим образом следует поправить (10)–(12)); $\Gamma_i = \Gamma$ вместо (9);

$$\boldsymbol{q}_i = -k_i(\theta)\nabla\theta \tag{20}$$

вместо (8).

В качестве уравнения энергии можно рассматривать, например, уравнение для суммарной внутренней энергии

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i=1}^{N}\rho_i e_i\right) + \mathrm{div}\left(\sum_{i=1}^{N}\rho_i e_i \boldsymbol{u}_i\right) + \sum_{i=1}^{N} p_i \mathrm{div}\boldsymbol{u}_i + \mathrm{div}\boldsymbol{q} = \\ &= \sum_{i=1}^{N}\mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i) + N\Gamma + \rho g, \end{aligned} \tag{21}$$

или уравнение для суммарной полной энергии

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\sum_{i=1}^{N} \mathcal{E}_i \boldsymbol{u}_i\right) + \operatorname{div}\left(\boldsymbol{q} - \sum_{i=1}^{N} \mathbb{S}_i \boldsymbol{u}_i + \sum_{i=1}^{N} p_i \boldsymbol{u}_i\right) = \\ = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{u}_i + \rho g, \tag{22}$$

где $\mathcal{E} = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{E}_i$ — суммарная полная энергия, $\boldsymbol{q} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{q}_i$ — суммарный тепловой поток, $\rho = \sum_{i=1}^{N} \rho_i$ — суммарная плотность, $\sum_{i=1}^{N} \mathcal{Q}_i = \rho g$, g — заданная плотность тепловых источников внешней среды.

Система (1), (2), (22) (многоскоростная однотемпературная модель) описывает достаточно произвольные движения многокомпонентных сред, включая случаи, когда составляющие среды плохо перемешаны, и поэтому их скорости концентрации и давления существенно отличаются от равновесных значений. Единственное наложенное предположение о равновесности состоит в гипотезе о равенстве температур составляющих среды.

Условие (19) в многоскоростной однотемпературной модели сводится к наложенным в (5) требованиям на матрицы вязкостей. Действительно,

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i) = \sum_{i,j=1}^{N} \Big(\lambda_{ij} + \frac{2}{3}\mu_{ij}\Big)(\mathrm{div}\boldsymbol{u}_i)(\mathrm{div}\boldsymbol{u}_j) + \tag{23}$$

$$+2\sum_{i,j=1}^{N} \mu_{ij}\Big(\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i) - \frac{1}{3}(\mathrm{div}\boldsymbol{u}_i)\mathbb{I}\Big) : \Big(\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_j) - \frac{1}{3}(\mathrm{div}\boldsymbol{u}_j)\mathbb{I}\Big) \geqslant 0$$

при $\mathbf{M} > 0$, $\boldsymbol{\Lambda} + \dfrac{2}{3}\mathbf{M} \geqslant 0$.

Кроме того, из условий (5) (см. (6)) и $\boldsymbol{u_i}|_{\partial\Omega} = 0$, $i = 1, \ldots, N$, следует важное с математических позиций неравенство

$$\sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} \mathbb{S}_i : (\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i)\, d\boldsymbol{x} \geqslant C \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} |\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i|^2\, d\boldsymbol{x} \tag{24}$$

с некоторой положительной постоянной $C = C(\boldsymbol{\Lambda}, \mathbf{M})$.

Еще одним из вариантов моделей динамики многокомпонентных сред является односкоростная однотемпературная модель[9,10]:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{u}) + \operatorname{div} \boldsymbol{F_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{25}$$

$$\frac{\partial (\rho \boldsymbol{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) + \nabla p = \operatorname{div} \mathbb{S} + \sum_{i=1}^{N} \rho_i \boldsymbol{f}_i, \tag{26}$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathcal{E} \boldsymbol{u}) + \operatorname{div}(\boldsymbol{q} - \mathbb{S} \boldsymbol{u} + p \boldsymbol{u}) = \sum_{i=1}^{N} (\rho_i \boldsymbol{u} + \boldsymbol{F_i}) \cdot \boldsymbol{f}_i, \tag{27}$$

где $\rho_i \geqslant 0$ — плотность i-й компоненты, $\boldsymbol{u}$ — скорость среды, $\boldsymbol{F}_i$ — диффузионный поток i-ой компоненты, $\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i = 0$, $\rho = \sum_{i=1}^{N} \rho_i$ — суммарная плотность, $p = p(\rho, \theta)$ — давление, $\theta > 0$ — температура,

[9] **Nagnibeda E., Kustova E. Non–equilibrium reacting gas flow. Springer, Berlin, 2009.**

[10] **Giovangigli V. Multicomponent flow modeling. Birkhauser, Boston, 1999.**

$\mathbb{S} = \lambda(\operatorname{div}\boldsymbol{u})\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{D}(\boldsymbol{u})$ — вязкая часть тензора напряжений, $\mu > 0$, $\lambda + \dfrac{2}{3}\mu \geqslant 0$, $\boldsymbol{f}_i$ — плотность внешних массовых сил, действующих из внешней среды на i-ю компоненту, $\mathcal{E} = \dfrac{\rho|\boldsymbol{u}|^2}{2} + \rho e$ — полная энергия, $e = e(\rho, \theta)$ — внутренняя удельная энергия, $\boldsymbol{q} = -k(\theta)\nabla\theta$ — тепловой поток, k — теплопроводность.

Суммируя уравнения (25) по i от 1 до N, получим уравнение неразрывности для среды в целом:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{u}) = 0. \tag{28}$$

Для многих практических задач единственная внешняя сила, действующая на компоненты — это сила притяжения $\boldsymbol{g}$. Полагая в (26), (27) $\boldsymbol{f}_i = \boldsymbol{g}$, $i = 1, \ldots, N$, получим

$$\frac{\partial(\rho\boldsymbol{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) + \nabla p = \operatorname{div}\mathbb{S} + \rho\boldsymbol{g}, \tag{29}$$

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathcal{E}\boldsymbol{u}) + \operatorname{div}(\boldsymbol{q} - \mathbb{S}\boldsymbol{u} + p\boldsymbol{u}) = \rho\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{u}. \tag{30}$$

Система (28)–(30) является полным аналогом системы уравнений Навье-Стокса-Фурье движений однокомпонентной сжимаемой вязкой среды.

Рассмотрим еще одну модель динамики многокомпонентных сред, состоящую из следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{v}) = 0, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{31}$$

$$\frac{\partial(\rho_i \boldsymbol{u}_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}_i) + \alpha_i \nabla p = \operatorname{div} \mathbb{S}_i + \rho_i \boldsymbol{f}_i,\ i = 1, \ldots, N, \tag{32}$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathcal{E} \boldsymbol{v}) + \left(\boldsymbol{q} - \sum_{i=1}^{N} \mathbb{S}_i \boldsymbol{u}_i + p \boldsymbol{v}\right) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{u}_i + \rho g. \tag{33}$$

Здесь $\rho_i \geqslant 0$ — плотность i-й компоненты; $\boldsymbol{u}_i$ — скорость i-й компоненты; $\boldsymbol{v} = \sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i \boldsymbol{u}_i$ — средневзвешенная скорость среды, где

$\alpha_i = \mathrm{const} \in (0, 1)$, $\sum\limits_{j=1}^{N} \alpha_j = 1$; $p = \sum\limits_{i=1}^{N} p_i$ — суммарное давление;

$\mathbb{S}_i = \sum_{j=1}^{N} \Big(\lambda_{ij} (\mathrm{div} \boldsymbol{u}_j) \mathbb{I} + 2\mu_{ij} \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_j) \Big)$ — вязкая часть тензора напряжений в i-й компоненте, где коэффициенты вязкостей λ_{ij} и μ_{ij} удовлетворяют условиям (5); $\boldsymbol{f}_i$ — плотность внешних массовых сил, действующих из внешней среды на i-ю компоненту; $\mathcal{E} = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{E}_i$ — суммарная полная энергия, где $\mathcal{E}_i = \frac{\rho_i |\boldsymbol{u}_i|^2}{2} + \rho_i e_i$ — полная энергия i-й компоненты, e_i — внутренняя удельная энергия i-й компоненты; $\boldsymbol{q} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{q}_i$ — суммарный тепловой поток, где $\boldsymbol{q}_i = -k_i(\theta) \nabla \theta$ — тепловой поток внутри i-й компоненты, k_i — внутренняя теплопроводность i-й компоненты; $\rho = \sum_{i=1}^{N} \rho_i$ — суммарная плотность; g — плотность тепловых источников внешней среды.

Модель, описываемая уравнениями (31)–(33) является так называемой подмоделью многоскоростной однотемпературной модели динамики многокомпонентных сред при следующих предположениях:

1. скорости $\boldsymbol{u}_i$ близки друг к другу[11, 12] (т. е. к средневзвешенной скорости $\boldsymbol{v}$ всей среды);
2. давления p_i близки к $\alpha_i p$[13,14, 15, 16].

В рамках приведенных предположений движение многокомпонентной среды в значительной степени характеризуется усредненными и / или суммарными характеристиками (скоростью $\boldsymbol{v}$, плотностью ρ, давлением p, температурой θ), однако нас интересуют также и отдельные плотности ρ_i и скорости $\boldsymbol{u}_i$ компонент.

---

[11] Gomez-Constante J.P., Pagilla P.R., Rajagopal K.R. A thermomechanical and photochemical description of the phase change process in roll-to-roll nanoimprinting lithography. International Journal of Engineering Science, 2021, V. 169, Article 103564.

[12] Kolotilov V. A., Fomin V. M. Two methods of mathematical formulation of heterogeneous media in problems of shock wave loading. AIP Conference Proceedings 2027, 2018, Article 030144.

[13] Surana K.S., Powell M., Reddy J.N. A simple mixture theory for ν Newtonian and generalized Newtonian constituents. Continuum Mechanics and Thermodynamics, 2012, V. 26, № 1, P. 33–65.

[14] Папин А.А. Краевые задачи двухфазной фильтрации. Изд-во АлтГУ, Барнаул, 2009.

[15] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. Наука, Москва, 1987.

[16] Рахматулин Х. А. Основы газовой динамики взаимопроникающих движений сплошных сред. Прикладная математика и механика, 1956, Т. 20, № 2, С. 184-195.

Уравнения (31)–(33) допускают эквивалентную запись

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho_i + \rho_i \mathrm{div} \boldsymbol{v} = 0, \quad i = 1, \ldots, N,$$

$$\rho_i \frac{\partial \boldsymbol{u}_i}{\partial t} + \rho_i (\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i)^* \boldsymbol{v} + \beta_i \nabla p = \mathrm{div}\, \mathbb{S}_i + \rho_i \boldsymbol{f}_i, \quad i = 1, \ldots, N,$$

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\rho_i \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{|\boldsymbol{u}_i|^2}{2} + e_i \right) + \rho_i \boldsymbol{v} \cdot \nabla \left(\frac{|\boldsymbol{u}_i|^2}{2} + e_i \right) \right) +$$

$$+\mathrm{div} \left(\boldsymbol{q} - \sum_{i=1}^{N} \mathbb{S}_i \boldsymbol{u}_i + p \boldsymbol{v} \right) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{u}_i + \rho g,$$

причем $(\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i)^* \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{u}_i$. Такая недивергентная форма записи позволяет увидеть общий для всех уравнений системы оператор материальной производной $\dfrac{d}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla$.

Из (31) и (32) вытекает уравнение баланса кинетической энергии для каждой компоненты

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho_i|\boldsymbol{u}_i|^2}{2}\right) + \operatorname{div}\left(\frac{\rho_i|\boldsymbol{u}_i|^2}{2}\boldsymbol{v}\right) + \beta_i \boldsymbol{u}_i \cdot \nabla p = \\
= \boldsymbol{u}_i \cdot \operatorname{div} \mathbb{S}_i + \rho_i \boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{f}_i, \quad i = 1, \ldots, N.
\end{gathered}
\tag{34}
$$

С учетом этого факта уравнение (33) (для полной энергии) можно записать в следующей эквивалентной форме (для внутренней энергии):

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i=1}^{N} \rho_i e_i\right) + \operatorname{div}\left(\sum_{i=1}^{N} \rho_i e_i \boldsymbol{v}\right) + p\operatorname{div}\boldsymbol{v} + \operatorname{div}\boldsymbol{q} = \\
= \sum_{i=1}^{N} \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i) + \rho g.
\end{gathered}
\tag{35}
$$

Если привлечь соотношение Гиббса для каждой компоненты (10), то уравнение (33)=(35) можно записать в следующей эквивалентной форме (для энтропии):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i=1}^{N}\rho_i s_i\right) + \operatorname{div}\left(\sum_{i=1}^{N}\rho_i s_i \boldsymbol{v}\right) + \operatorname{div}\left(\frac{\boldsymbol{q}}{\theta}\right) = \tag{36}$$

$$= \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{N}\mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i) - \frac{\boldsymbol{q}\cdot\nabla\theta}{\theta^2} + \frac{\rho g}{\theta}.$$

Из (36) и условий $\boldsymbol{u_i}|_{\partial\Omega} = 0$, $i = 1,\ldots,N$, $\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}|_{\partial\Omega} = 0$, получаем (см. обозначение (16))

$$\frac{dS}{dt} = \int\limits_{\Omega}\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{N}\mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i)d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\Omega}\frac{k(\theta)|\nabla\theta|^2}{\theta^2}d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\Omega}\frac{\rho g}{\theta}d\boldsymbol{x}, \tag{37}$$

где $k(\theta) = \sum\limits_{i=1}^{N} k_i(\theta)$, откуда следует, что общая энтропия системы не убывает

со временем, если $k \geqslant 0$, $g \geqslant 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{N}\mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i) \geqslant 0$. Последнее неравенство

выполняется ввиду условий на матрицы вязкостей, перечисленных в (5).

В одномерном нетеплопроводном (изотермическом) случае, мы приходим к следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_i v)}{\partial x} = 0, \tag{38}$$

$$\rho_i \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho_i v \frac{\partial u_i}{\partial x} + \alpha_i \frac{\partial p(\rho)}{\partial x} = \sum_{j=1}^{N} \nu_{ij} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + \rho_i f_i, \quad i = 1, \dots, N, \tag{39}$$

где $\nu_{ij} = 2\mu_{ij} + \lambda_{ij}$, $i, j = 1, \dots, N$.

В некоторых случаях, с позиций математического анализа, удобнее вместо N уравнений (38) рассматривать одно уравнение вида

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0, \tag{40}$$

если, например, дополнительно предположить, что $\rho_i = \alpha_i \rho$, $i = 1, \dots, N$.

Математические результаты для сжимаемых одномерных уравнений Навье-Стокса динамики однокомпонентных сред

- Канель (1968)
- Itaya (1974, 1976)
- Tani (1974)
- Кажихов (1975, 1976, 1979, 1982)
- Кажихов, Шелухин (1977)
- Шелухин (1979)
- Кажихов, Николаев (1979)
- Белов (1981–1983, 1994)
- Николаев (1983)
- Амосов (1985)
- Амосов, Злотник (1988, 1992, 1994-1997)
- Вайгант, Папин (1987)
- Вайгант (1990–1992)
- Злотник (1992, 1994)
- Амосов, Казенкин (1995)

Математические результаты для многоскоростных одномерных моделей динамики сжимаемых многокомпонентных сред

- Кажихов, Петров (1978): нестационарная система, баротропный случай, глобальное классическое решение, диагональная матрица вязкостей.
- Петров (1982): нестационарная теплопроводная многотемпературная модель, глобальное классическое решение, диагональная матрица вязкостей.
- Злотник (1995): нестационарная баротропная модель, равномерные оценки и стабилизация решений, диагональная матрица вязкостей.
- Bresch, Huang, Li (2012): нестационарная двухкомпонентная система, $p_1(\rho_1) = p_2(\rho_2)$, глобальное слабое решение, диагональная матрица вязкостей.
- Папин (2006, 2009, 2010, 2014): нестационарные уравнения движения двухфазных смесей, глобальное классическое решение, диагональная матрица вязкостей.

Однозначная разрешимость начально-краевой задачи для одномерных изотермических уравнений динамики сжимаемых вязких многокомпонентных сред

Рассмотрим начально-краевую задачу для одномерных изотермических уравнений динамики сжимаемых вязких многокомпонентных сред.

В замыкании $\overline{Q}_T$ области $Q_T = (0, T) \times (0, 1)$ $(T \in \mathbb{R}_+)$ требуется найти плотности $\rho_i(t, x) > 0$ и скорости $u_i(t, x)$ для каждой компоненты с номером $i = 1, \ldots, N$ $(N \in \mathbb{N},\ N \geqslant 2)$, удовлетворяющие следующей системе уравнений, начальных и краевых условий:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_i v)}{\partial x} = 0, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{41}$$

$$\rho_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + v \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) + \alpha_i K \frac{\partial \rho}{\partial x} = \sum_{j=1}^{N} \nu_{ij} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{42}$$

$$\rho_i|_{t=0} = \rho_{0i}(x), \quad u_i|_{t=0} = u_{0i}(x), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{43}$$

$$u_i|_{x=0} = u_i|_{x=1} = 0, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{44}$$

Здесь v — средневзвешенная скорость, $v = \sum\limits_{j=1}^{N} \alpha_j u_j$, $\alpha_j = \mathrm{const} \in (0,1)$, $\sum\limits_{j=1}^{N} \alpha_j = 1$, ρ — суммарная плотность, $\rho = \sum\limits_{j=1}^{N} \rho_j$, постоянные коэффициенты вязкостей ν_{ij} образуют симметричную матрицу $\mathbf{N} > 0$, коэффициент $K \in \mathbb{R}_+$, функции начальных данных $\rho_{0i}(x)$, $u_{0i}(x)$, $i = 1, \ldots, N$ заданы.

Определение 1. *Сильным решением задачи* (41)–(44) *называется совокупность $2N$ функций $(\rho_1, \ldots, \rho_N, u_1, \ldots, u_N)$ таких, что для всех $i = 1, \ldots, N$*

$$\begin{gathered} \rho_i > 0, \quad \rho_i \in L_\infty\big(0,T; W_2^1(0,1)\big), \quad \frac{\partial \rho_i}{\partial t} \in L_\infty\big(0,T; L_2(0,1)\big), \\ u_i \in L_\infty\big(0,T; W_2^1(0,1)\big) \bigcap L_2\big(0,T; W_2^2(0,1)\big), \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} \in L_2(Q_T), \end{gathered} \tag{45}$$

уравнения (41), (42) *выполнены почти всюду в Q_T, начальные условия* (43) *— для почти всех $x \in (0,1)$, а краевые условия* (44) *— для почти всех $t \in (0,T)$.*

Теорема 1. *Пусть начальные данные в (43) удовлетворяют условиям*

$$\rho_{0i} > 0, \quad \rho_{0i} \in W_2^1(0,1), \quad u_{0i} \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1), \quad i = 1, \dots, N. \tag{46}$$

Тогда существует единственное сильное решение задачи (41)–(44) в смысле Определения 1.

Доказательство. Докажем сначала разрешимость приближенной начально-краевой задачи, полученной из задачи (41)–(44) применением метода Галёркина по переменной x в уравнениях (42):

$$\frac{\partial \rho_i^m}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_i^m v^m)}{\partial x} = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad v^m = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j u_j^m, \tag{47}$$

$$\int_0^1 \Big(\rho_i^m \frac{\partial u_i^m}{\partial t} + \rho_i^m v^m \frac{\partial u_i^m}{\partial x} + \alpha_i K \frac{\partial \rho^m}{\partial x} - \sum_{j=1}^{N} \nu_{ij} \frac{\partial^2 u_j^m}{\partial x^2}\Big) \sin(\pi k x)\, dx = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad k = 1, \dots, m, \tag{48}$$

$$\rho_i^m|_{t=0} = \rho_{0i}(x), \quad i = 1, \dots, N, \tag{49}$$

$$u_i^m = \sum_{s=1}^{m} \xi_{is}^m(t) \sin(\pi s x),\ u_i^m|_{t=0} = \sum_{s=1}^{m} \xi_{0is}^m \sin(\pi s x),\ i = 1, \ldots, N, \tag{50}$$

где $\rho^m = \sum\limits_{j=1}^{N} \rho_j^m$, $\xi_{0is}^m = \xi_{is}^m(0) = 2 \int\limits_0^1 u_{0i}(x) \sin(\pi s x)\, dx$, $i = 1, \ldots, N$, $s = 1, \ldots, m$, $m \in \mathbb{N}$. При этом

$$\begin{gathered} \rho_i^m > 0, \quad \rho_i^m \in L_\infty\big(0, t^m; W_2^1(0,1)\big) \bigcap W_\infty^1\big(0, t^m; L_2(0,1)\big), \\ \xi_{is}^m \in C^1[0, t^m], \quad i = 1, \ldots, N, \quad s = 1, \ldots, m, \quad 0 < t^m < T. \end{gathered} \tag{51}$$

Условимся пока опускать индекс m вверху в обозначении решений. Рассмотрим множество

$$V = \left\{ \boldsymbol{\xi} \in (C[0, t^m])^{mN} \middle|\ \boldsymbol{\xi}(0) = \boldsymbol{\xi}_0,\ \|\boldsymbol{\xi}\|_{(C[0,t^m])^{mN}} \leqslant c \right\},$$

где $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_N)$, $\quad \boldsymbol{\xi}_i = (\xi_{i1}, \ldots, \xi_{im})$, $\boldsymbol{\xi}_0 = (\boldsymbol{\xi}_{01}, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{0N})$,
$\boldsymbol{\xi}_{0i} = (\xi_{0i1}, \ldots, \xi_{0im})$, $\quad i = 1, \ldots, N$,

$$c^2 = e^{\frac{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant N} \sup\limits_{[0,1]} \rho_{0i}}{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant N} \inf\limits_{[0,1]} \rho_{0i}}} \|\boldsymbol{\xi}_0\|^2_{\mathbb{R}^{mN}} + 1.$$

Построим оператор $A : V \to (C[0,t^m])^{mN}$, $\operatorname{Im} A \subset (C^1[0,t^m])^{mN}$, $A(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\psi}$, где $\boldsymbol{\psi} = (\boldsymbol{\psi}_1, \ldots, \boldsymbol{\psi}_N)$, $\boldsymbol{\psi}_i = (\psi_{i1}, \ldots, \psi_{im})$, $i = 1, \ldots, N$ следующим образом.

Сначала найдем функции

$$\rho_i > 0, \quad \rho_i \in L_\infty\big(0,t^m; W_2^1(0,1)\big) \bigcap W_\infty^1\big(0,t^m; L_2(0,1)\big), \quad i = 1, \ldots, N$$

как решения задач Коши (47), (49), где $v = \sum\limits_{j=1}^{N} \alpha_j u_j$, а u_j, $j = 1, \ldots, N$ задаются по формулам (50)[17].

При этом справедливы неравенства

$$\left(\inf_{[0,1]} \rho_{0i}\right) e^{-\sum\limits_{j=1}^{N} \int\limits_0^t \sup\limits_{[0,1]} \left|\frac{\partial u_j}{\partial x}\right| d\tau} \leqslant \rho_i(t,x) \leqslant \left(\sup_{[0,1]} \rho_{0i}\right) e^{\sum\limits_{j=1}^{N} \int\limits_0^t \sup\limits_{[0,1]} \left|\frac{\partial u_j}{\partial x}\right| d\tau}, \quad i = 1, \ldots, N. \quad (52)$$

[17] R.J. DiPerna, P.L. Lions, ***Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces***, **Inventiones Mathematicae, 98 (1989), 511–547**

Эти неравенства, в силу включения $\boldsymbol{\xi} \in V$, дают оценки

$$\left(\inf_{[0,1]} \rho_{0i}\right) e^{-\pi m^2 cNt} \leqslant \rho_i(t,x) \leqslant \left(\sup_{[0,1]} \rho_{0i}\right) e^{\pi m^2 cNt}, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{53}$$

Затем найдем функцию $\boldsymbol{\psi}$ как решение следующей задачи Коши для системы mN линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\int\limits_0^1 \Big(\rho_i \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho_i v \frac{\partial U_i}{\partial x} + \alpha_i K \frac{\partial \rho}{\partial x} \\ - \sum_{j=1}^N \nu_{ij} \frac{\partial^2 U_j}{\partial x^2}\Big) \sin(\pi k x)\, dx = 0, \quad i = 1, \ldots, N, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{54}$$

$$\boldsymbol{\psi}(0) = \boldsymbol{\xi}_0, \tag{55}$$

где

$$U_i = \sum_{s=1}^m \psi_{is}(t) \sin(\pi s x), \quad i = 1, \ldots, N.$$

Неравенство
$$\det M(t) \neq 0,$$
где
$$M(t) = \begin{pmatrix} M_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & M_N(t) \end{pmatrix},$$
$$M_i(t) = \left\{ \int\limits_0^1 \rho_i(t,x) \sin(\pi k x) \sin(\pi s x)\, dx \right\}_{k,s=1}^{m}, \quad i = 1, \dots, N,$$
выполненное в силу положительности ρ_i, $i = 1, \dots, N$, позволяет разрешить систему (54) относительно производных, что обосновывает существование функции $\boldsymbol{\psi} \in (C^1[0, t^m])^{mN}$.

Таким образом, для произвольного $t^m \in (0, T]$ определен оператор $A : V \to (C^1[0, t^m])^{mN} \subset (C[0, t^m])^{mN}$, $A(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\psi}$, неподвижная точка которого, если она существует, вместе с соответствующими функциями ρ_i, u_i, $i = 1, \dots, N$, дает решение задачи (47)–(50).

Покажем, что при достаточно малом t^m оператор A удовлетворяет условиям теоремы Шаудера.

А именно:

1. V — выпуклое замкнутое ограниченное множество (в нашем случае это очевидно);
2. $A: V \to V$;
3. A — вполне непрерывный оператор.

Установим сначала, что $A(V) \subset V$. Условимся через $C_i(\cdot)$, $i \in \mathbb{N}$, обозначать величины, принимающие конечные положительные значения и зависящие от объектов, указанных в скобках или перечисленных в комментариях.

Умножим уравнения (54) на $\psi_{ik}(t)$, а затем просуммируем по i, k и проинтегрируем по x, получим с учетом (47), что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N}\int_0^1 \rho_i U_i^2\,dx\right) + \sum_{i,j=1}^{N}\nu_{ij}\int_0^1 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial U_j}{\partial x}\right)dx = K\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\int_0^1 \rho\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)dx.$$

Поэтому, в силу неравенств (при получении которых, мы используем (53) и тот факт, что $\mathbf{N} > 0$)

$$\sum_{i,j=1}^{N} \nu_{ij} \int\limits_0^1 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial U_j}{\partial x}\right) dx \geqslant C_1(\mathbf{N}) \sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^1 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)^2 dx,$$

$$K \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \int\limits_0^1 \rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right) dx \leqslant \frac{C_1}{2} \sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^1 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)^2 dx + C_2,$$

где $C_2 = \dfrac{K^2 N^3}{2C_1} \left(\max\limits_{1\leqslant i\leqslant N} \sup\limits_{[0,1]} \rho_{0i}\right)^2 e^{2\pi m^2 cNt^m}$, получаем оценку

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^1 \rho_i U_i^2 \, dx\right) + C_1 \sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^1 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)^2 dx \leqslant 2C_2,$$

из которой, в свою очередь, следует, что

$$\sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^1 \rho_i U_i^2 \, dx \leqslant \sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^1 \rho_{0i} U_{0i}^2 \, dx + 2C_2 t^m. \tag{56}$$

Еще раз привлекая (53), получаем из (56) неравенство

$$\|\boldsymbol{\psi}\|^2_{(C[0,t^m])^{mN}} \leqslant e^{\pi m^2 cNt^m} \frac{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant N} \sup\limits_{[0,1]} \rho_{0i}}{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant N} \inf\limits_{[0,1]} \rho_{0i}} \|\boldsymbol{\xi}_0\|^2_{\mathbb{R}^{mN}} + \frac{4C_2 e^{\pi m^2 cNt^m}}{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant N} \inf\limits_{[0,1]} \rho_{0i}} t^m.$$

Выбирая

$$t^m < \min\left(T, \frac{1}{\pi m^2 cN}, \frac{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant N} \inf\limits_{[0,1]} \rho_{0i}}{4eC_3}\right), \tag{57}$$

где $C_3 = \dfrac{K^2N^3e^2}{2C_1}\left(\max\limits_{1\leqslant i\leqslant N} \sup\limits_{[0,1]} \rho_{0i}\right)^2$, получим, что $C_2 \leqslant C_3$, и придем к нужной оценке

$$\|\boldsymbol{\psi}\|_{(C[0,t^m])^{mN}} \leqslant c.$$

Таким образом, при выполнении (57) оператор A отображает множество V в себя.

Докажем теперь компактность оператора A.

Умножая (54) на $\dfrac{d\psi_{ik}(t)}{dt}$, суммируя по i, k и интегрируя по x, выводим соотношение

$$\sum_{i=1}^{N}\int_0^1 \rho_i\left(\frac{\partial U_i}{\partial t}\right)^2 dx=\sum_{i=1}^{N}\int_0^1\left(-\rho_i v\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial U_i}{\partial t}\right)\right.$$
$$\left.+\alpha_i K\rho\left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial t\partial x}\right)-\sum_{j=1}^{N}\nu_{ij}\left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial t\partial x}\right)\left(\frac{\partial U_j}{\partial x}\right)\right)dx. \quad (58)$$

Произведем оценки слагаемых в правой части (58) с помощью (53), неравенства Коши и неравенств $\|\boldsymbol{\xi}\|_{(C[0,t^m])^{mN}}\leqslant c$, $\|\boldsymbol{\psi}\|_{(C[0,t^m])^{mN}}\leqslant c$, $\left\|\dfrac{\partial U_i}{\partial x}\right\|_{L_2(0,1)}\leqslant C_4(m)\|U_i\|_{L_2(0,1)}$, $\left\|\dfrac{\partial^2 U_i}{\partial t\partial x}\right\|_{L_2(0,1)}\leqslant C_4\left\|\dfrac{\partial U_i}{\partial t}\right\|_{L_2(0,1)}$:

$$-\sum_{i=1}^{N}\int_0^1 \rho_i v\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial U_i}{\partial t}\right)dx$$
$$\leqslant\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{N}\int_0^1\rho_i\left(\frac{\partial U_i}{\partial t}\right)^2dx+C_5\left(C_4,\left\{\sup_{[0,1]}\rho_{0i}\right\}_{i=1}^{N},N,c,m,t^m\right),$$

$$K\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\int_0^1 \rho\left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial t\partial x}\right)dx \leqslant \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{N}\int_0^1 \rho_i\left(\frac{\partial U_i}{\partial t}\right)^2 dx$$

$$+ C_6\left(C_4, \left\{\inf_{[0,1]}\rho_{0i}\right\}_{i=1}^{N}, \left\{\sup_{[0,1]}\rho_{0i}\right\}_{i=1}^{N}, K, N, c, m, t^m\right),$$

$$-\sum_{i,j=1}^{N}\nu_{ij}\int_0^1\left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial t\partial x}\right)\left(\frac{\partial U_j}{\partial x}\right)dx$$

$$\leqslant \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{N}\int_0^1 \rho_i\left(\frac{\partial U_i}{\partial t}\right)^2 dx + C_7\left(C_4, \left\{\inf_{[0,1]}\rho_{0i}\right\}_{i=1}^{N}, \mathbf{N}, N, c, m, t^m\right).$$

Таким образом, из (58) получаем неравенство

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int_0^1 \rho_i\left(\frac{\partial U_i}{\partial t}\right)^2 dx \leqslant C_5 + C_6 + C_7.$$

Интегрируя последнее неравенство по времени и применяя (53), выводим оценку

$$\sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial U_i}{\partial t} \right\|_{L_2(Q_{t^m})} \leqslant C_8 \left(C_5, C_6, C_7, \left\{ \inf_{[0,1]} \rho_{0i} \right\}_{i=1}^{N}, N, c, m, t^m \right), \qquad (59)$$

где $Q_{t^m} = (0, t^m) \times (0, 1)$.

Таким образом, получена оценка $\boldsymbol{\psi}$ в $(W_2^1(0, t^m))^{mN}$. Следовательно, A является компактным оператором.

Установим далее непрерывность оператора A из V в $(C[0, t^m])^{mN}$.

Пусть $\boldsymbol{\xi}^{(1,2)} \in V$, $\boldsymbol{\psi}^{(1,2)} = A(\boldsymbol{\xi}^{(1,2)})$, $u_i^{(1,2)} = \sum_{s=1}^{m} \xi_{is}^{(1,2)} \sin(\pi s x)$,

$U_i^{(1,2)} = \sum_{s=1}^{m} \psi_{is}^{(1,2)} \sin(\pi s x)$, $i = 1, \ldots, N$.

Пусть также $\rho_i^{(1,2)}$, $i = 1, \ldots, N$ — решения задач Коши (47), (49), где вместо v стоят $v^{(1,2)} = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j u_j^{(1,2)}$ соответственно.

Обозначим $\rho_i = \rho_i^{(1)} - \rho_i^{(2)}$, $u_i = u_i^{(1)} - u_i^{(2)}$, $U_i = U_i^{(1)} - U_i^{(2)}$, $i = 1, \ldots, N$.

Введем еще обозначения $v = v^{(1)} - v^{(2)}$, $\rho = \rho^{(1)} - \rho^{(2)}$, где $\rho^{(1,2)} = \sum_{j=1}^{N} \rho_j^{(1,2)}$.

Дифференцируя по переменной x уравнения

$$\frac{\partial \rho_i^{(1,2)}}{\partial t} + \frac{\partial \left(\rho_i^{(1,2)} v^{(1,2)}\right)}{\partial x} = 0, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{60}$$

затем умножая на $\dfrac{\partial \rho_i^{(1,2)}}{\partial x}$, интегрируя по x, t, используя начальные условия

$$\rho_i^{(1,2)}|_{t=0} = \rho_{0i}, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{61}$$

и неравенства (см. (53))

$$\left(\inf_{[0,1]} \rho_{0i}\right) e^{-\pi m^2 cNt} \leqslant \rho_i^{(1,2)} \leqslant \left(\sup_{[0,1]} \rho_{0i}\right) e^{\pi m^2 cNt}, \quad i = 1, \ldots, N \tag{62}$$

и Гронуолла, получаем оценки

$$\left\| \frac{\partial \rho_i^{(1,2)}}{\partial x} \right\|_{L_2(0,1)} \leqslant C_9 \left(\left\{ \|\rho_{0i}\|_{W_2^1(0,1)} \right\}_{i=1}^{N}, N, c, m, t^m \right), \; i = 1, \ldots, N. \tag{63}$$

Заметим, что из (60), (61) следуют равенства

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial \left(\rho_i v^{(1)}\right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\rho_i^{(2)} v\right)}{\partial x} = 0, \quad \rho_i|_{t=0} = 0, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{64}$$

Умножая (64) на ρ_i, интегрируя по x, приходим к соотношениям

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^1 \rho_i^2\, dx\right) = -\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2}\rho_i^2 \left(\frac{\partial v^{(1)}}{\partial x}\right) + \rho_i^{(2)}\rho_i \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial \rho_i^{(2)}}{\partial x}\right)\rho_i v\right) dx \leqslant \frac{1}{2}\left(\sup_{[0,1]}\left|\frac{\partial v^{(1)}}{\partial x}\right| \int\limits_0^1 \rho_i^2\, dx + \sup_{[0,1]} \rho_i^{(2)} \int\limits_0^1 \left(\rho_i^2\right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right) dx + \sup_{[0,1]} v^2 \int\limits_0^1 \left(\frac{\partial \rho_i^{(2)}}{\partial x}\right)^2 dx + \int\limits_0^1 \rho_i^2\, dx\right)$$
$$\leqslant C_{10}\left(C_9, \left\{\sup_{[0,1]} \rho_{0i}\right\}_{i=1}^{N}, N, c, m, t^m\right)\left(\int\limits_0^1 \rho_i^2\, dx + \sum_{j=1}^{N}\int\limits_0^1 u_j^2\, dx\right). \tag{65}$$

Из (65), применяя неравенство Гронуолла и учитывая начальные условия в (64), выводим неравенства

$$\int\limits_0^1 \rho_i^2\,dx \leqslant C_{11}(C_{10}, t^m) \sum_{j=1}^{N} \int\limits_0^t \int\limits_0^1 u_j^2\,dx d\tau, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{66}$$

Далее, из уравнений для $U_i^{(1,2)}$, $i = 1, \ldots, N$ (см. (54)) ввиду (60) следует для всех $t \in (0, t_m]$ соотношение

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^1 \rho_i^{(1)} U_i^2\,dx + \sum_{i,j=1}^{N} \nu_{ij} \int\limits_0^t \int\limits_0^1 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial U_j}{\partial x}\right) dx d\tau \\ &\quad = K \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \int\limits_0^t \int\limits_0^1 \rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right) dx d\tau - \sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^t \int\limits_0^1 \rho_i U_i \left(\frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial \tau}\right) dx d\tau \\ &- \sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^t \int\limits_0^1 \rho_i^{(1)} v U_i \left(\frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial x}\right) dx d\tau - \sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^t \int\limits_0^1 \rho_i v^{(2)} U_i \left(\frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial x}\right) dx d\tau. \end{aligned} \tag{67}$$

Первое слагаемое в левой части (67) допускает оценку

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int_0^1 \rho_i^{(1)} U_i^2\,dx \geqslant \frac{e^{-\pi m^2 cNt^m}\min\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\inf\limits_{[0,1]}\rho_{0i}}{2}\sum_{i=1}^{N}\int_0^1 U_i^2\,dx. \tag{68}$$

Для второго слагаемого в левой части (67) имеем неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{N}\int_0^t\int_0^1 \nu_{ij}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial U_j}{\partial x}\right)dxd\tau \geqslant C_1\sum_{i=1}^{N}\int_0^t\int_0^1\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)^2 dxd\tau. \tag{69}$$

Для первого слагаемого в правой части (67) получаем соотношение

$$K\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\int_0^t\int_0^1 \rho\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)dxd\tau \leqslant \frac{C_1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int_0^t\int_0^1\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)^2 dxd\tau$$
$$+\,C_{12}\left(C_1, C_{11}, K, N, t^m\right)\sum_{i=1}^{N}\int_0^t\int_0^1 u_i^2\,dxd\tau. \tag{70}$$

Для второго слагаемого в правой части (67) следует неравенство

$$-\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \rho_i U_i\left(\frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial\tau}\right)dxd\tau \leqslant \frac{e^{-\pi m^2 cNt^m}\min\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\inf\limits_{[0,1]}\rho_{0i}}{4N}\sum_{i=1}^{N}\sup_{[0,t]}\int\limits_0^1 U_i^2\,dx$$
$$+\,C_{13}\left(C_8, C_{11}, \left\{\inf_{[0,1]}\rho_{0i}\right\}_{i=1}^{N}, N, c, m, t^m\right)\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 u_i^2\,dxd\tau. \quad (71)$$

Третье слагаемое в правой части (67) оценим следующим образом:

$$-\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \rho_i^{(1)} vU_i\left(\frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial x}\right)dxd\tau \leqslant C_{14}\left(\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 u_i^2\,dxd\tau\right.$$
$$\left.+\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 U_i^2\,dxd\tau\right), \quad (72)$$

где $C_{14} = C_{14}\left(\left\{\sup\limits_{[0,1]}\rho_{0i}\right\}_{i=1}^{N}, N, c, m, t^m\right)$.

Наконец, для последнего слагаемого в правой части (67) получаем соотношение

$$-\sum_{i=1}^{N}\int_0^t\int_0^1 \rho_i v^{(2)} U_i \left(\frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial x}\right) dx d\tau \leqslant C_{15}\left(\sum_{i=1}^{N}\int_0^t\int_0^1 u_i^2\, dx d\tau + \sum_{i=1}^{N}\int_0^t\int_0^1 U_i^2\, dx d\tau\right), \quad (73)$$

где $C_{15} = C_{15}\left(C_{11}, N, c, m, t^m\right)$.

Таким образом, из (67), с учетом (68)–(73), следует неравенство

$$\sum_{i=1}^{N}\int_0^1 U_i^2\, dx \leqslant C_{16}\left(\sum_{i=1}^{N}\int_0^t\int_0^1 u_i^2\, dx d\tau + \sum_{i=1}^{N}\int_0^t\int_0^1 U_i^2\, dx d\tau\right),$$

где $C_{16} = C_{16}\left(C_{12}, \ldots, C_{15}, \left\{\inf\limits_{[0,1]} \rho_{0i}\right\}_{i=1}^{N}, N, c, m, t^m\right)$.

Из последнего неравенства, пользуясь неравенством Гронуолла, получаем оценку

$$\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{0}^{1} U_i^2\,dx \leqslant C_{17}(C_{16},t^m)\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{0}^{t^m}\int\limits_{0}^{1} u_i^2\,dxdt,$$

а отсюда — неравенство

$$\|\boldsymbol{\psi}^{(1)}-\boldsymbol{\psi}^{(2)}\|_{(C[0,t^m])^{mN}} \leqslant C_{18}(C_{17},t^m)\|\boldsymbol{\xi}^{(1)}-\boldsymbol{\xi}^{(2)}\|_{(C[0,t^m])^{mN}},$$

обосновывающее непрерывность оператора A.

Поскольку оператор A удовлетворяет перечисленным выше условиям теоремы Шаудера, то в V существует неподвижная точка $\boldsymbol{\xi}$ оператора A, определяющая, вместе с соответствующими функциями ρ_i, $i=1,\dots,N$, решение приближенной задачи (47)–(50).

Получим теперь равномерные по параметру m оценки решений приближенной начально-краевой задачи (47)–(50), которые позволят впоследствии совершить предельный переход при $m\to\infty$. Введем следующее обозначение:

$$\alpha(t)=\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{0}^{1}\left(\rho_i\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}\right)^2\right)dxd\tau,\quad \alpha'(t)\geqslant 0. \qquad (74)$$

Поскольку уравнения (47) влекут выполнение неравенств (52), то из этих неравенств следуют оценки

$$C_{19}^{-1}e^{-C_{19}\alpha(t)} \leqslant \rho_i(x,t) \leqslant C_{19}e^{C_{19}\alpha(t)}, \quad i=1,\ldots,N, \tag{75}$$

где $C_{19} = C_{19}\left(\left\{\sup\limits_{[0,1]}\rho_{0i}\right\}_{i=1}^{N}, \left\{\inf\limits_{[0,1]}\rho_{0i}\right\}_{i=1}^{N}, N, T\right)$.

Далее заметим, что из (47) вытекают равенства

$$\rho_i\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}\left(\frac{1}{\rho_i}\right) + \rho_i v\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\rho_i}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad i=1,\ldots,N, \tag{76}$$

из которых получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^1 \rho_i\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho_i}\right)\right)^2 dx\right) = 2\int\limits_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho_i}\right)\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)dx, \quad i=1,\ldots,N. \tag{77}$$

Из (77) следуют соотношения

$$\int_0^1 \rho_i \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho_i}\right)\right)^2 dx \leqslant \int_0^1 \rho_{0i}\left(\left(\frac{1}{\rho_{0i}}\right)'\right)^2 dx + \int_0^t\int_0^1 \rho_i \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho_i}\right)\right)^2 dx d\tau$$
$$+ \int_0^t\int_0^1 \frac{1}{\rho_i}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 dx d\tau, \quad i = 1, \ldots, N. \quad (78)$$

Из (78), пользуясь (74), (75) и неравенством Гронуолла, получаем оценки

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho_i}\right)\right)^2 dx + \int_0^1 \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial x}\right)^2 dx \leqslant C_{20} e^{C_{20}\alpha(t)}, \quad i = 1, \ldots, N, \quad (79)$$

где $C_{20} = C_{20}\left(C_{19}, \left\{\|\rho_{0i}\|_{W_2^1(0,1)}\right\}_{i=1}^N, \left\{\inf_{[0,1]} \rho_{0i}\right\}_{i=1}^N, N, T\right)$.

Далее, умножая (48) на $\psi'_{ik}+\pi^2k^2\psi_{ik}$, суммируя по i, k, и, учитывая (47), (50), приходим к соотношению (здесь используется симметричность матрицы **N**)

$$\sum_{i=1}^{N}\int_0^1 \rho_i\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)^2 dx+\sum_{i,j=1}^{N}\nu_{ij}\int_0^1\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}\right)dx$$
$$+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N}\int_0^1 \rho_i\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2 dx\right)+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\sum_{i,j=1}^{N}\nu_{ij}\int_0^1\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u_j}{\partial x}\right)dx\right)$$
$$=-\sum_{i=1}^{N}\int_0^1 \rho_i v\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)dx-K\int_0^1\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)dx$$
$$+K\int_0^1\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)dx-\sum_{i=1}^{N}\int_0^1\left(\frac{\partial \rho_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)dx$$
$$+2\sum_{i=1}^{N}\int_0^1 \rho_i v\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}\right)dx. \quad (80)$$

Левая часть (80) допускает оценку (т. к. $\mathbf{N} > 0$)

$$\sum_{i=1}^{N} \int_0^1 \rho_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)^2 dx + \sum_{i,j=1}^{N} \nu_{ij} \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}\right) dx$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \int_0^1 \rho_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2 dx\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\sum_{i,j=1}^{N} \nu_{ij} \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u_j}{\partial x}\right) dx\right) \geqslant C_{21}(C_1)\alpha'(t) + \beta'(t), \quad (81)$$

где

$$\beta(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \int_0^1 \rho_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} \nu_{ij} \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u_j}{\partial x}\right) dx.$$

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое в правой части (80).

Для первого слагаемого в правой части (80) имеем

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{i=1}^{N}\int_{0}^{1}\rho_i v\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)dx\\
&\qquad\leqslant \sum_{i=1}^{N}\sup_{[0,1]}|v|\left(\int_{0}^{1}\rho_i\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{0}^{1}\rho_i\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\qquad\qquad\leqslant \frac{C_{21}}{10}\alpha'(t)+C_{22}\,\beta^2(t)e^{C_{22}\alpha(t)},
\end{aligned}
\tag{82}
$$

где $C_{22}=C_{22}(C_{19},C_{21},N)$. Для второго и третьего слагаемых в правой части (80) получаем соответственно

$$
-K\int_{0}^{1}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)dx\leqslant\frac{C_{21}}{10}\alpha'(t)+C_{23}e^{C_{23}\alpha(t)},\tag{83}
$$

$$
K\int_{0}^{1}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)dx\leqslant\frac{C_{21}}{10}\alpha'(t)+C_{24}e^{C_{24}\alpha(t)},\tag{84}
$$

где $C_{23}=C_{23}(C_{19},C_{20},C_{21},K,N)$, $C_{24}=C_{24}(C_{20},C_{21},K,N)$.

Для четвертого слагаемого в правой части (80) выводим

$$-\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^1\left(\frac{\partial\rho_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)dx$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{N}\sup_{[0,1]}\left|\frac{\partial u_i}{\partial x}\right|\left(\int\limits_0^1\frac{1}{\rho_i}\left(\frac{\partial\rho_i}{\partial x}\right)^2dx\right)^{\frac12}\left(\int\limits_0^1\rho_i\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)^2dx\right)^{\frac12}$$

$$\leqslant\frac{C_{21}}{10}\alpha'(t)+C_{25}\,\beta(t)e^{C_{25}\alpha(t)},\quad C_{25}=C_{25}(C_{19},C_{20},C_{21},N).\quad(85)$$

Наконец, для последнего слагаемого в правой части (80) получаем

$$2\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^1\rho_i v\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}\right)dx$$

$$\leqslant 2\sum_{i=1}^{N}\sup_{[0,1]}|v|\sup_{[0,1]}\sqrt{\rho_i}\left(\int\limits_0^1\rho_i\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2dx\right)^{\frac12}\left(\int\limits_0^1\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}\right)^2dx\right)^{\frac12}$$

$$\leqslant\frac{C_{21}}{10}\alpha'(t)+C_{26}\,\beta^2(t)e^{C_{26}\alpha(t)},\quad C_{26}=C_{26}(C_{19},C_{21},N).\quad(86)$$

Таким образом, из (82)–(85) следует, что правая часть (80)

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{i=1}^{N}\int_0^1 \rho_i v\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)dx - K\int_0^1\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)dx\\
&\qquad + K\int_0^1\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)dx - \sum_{i=1}^{N}\int_0^1\left(\frac{\partial \rho_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)dx\\
&\qquad\qquad + 2\sum_{i=1}^{N}\int_0^1 \rho_i v\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}\right)dx \leqslant \frac{C_{21}}{2}\alpha'(t)\\
&\qquad\qquad\quad + C_{27}(1+\beta^2(t))e^{C_{27}\alpha(t)}, \quad C_{27} = C_{27}(C_{22},\ldots,C_{26}). \qquad (87)
\end{aligned}
$$

В итоге, объединяя соотношения (81) и (87), получаем из (80) неравенство

$$
\left(\frac{C_{21}}{2}\alpha(t)+\beta(t)\right)' \leqslant C_{28}e^{C_{28}\left(C_{21}\frac{\alpha(t)}{2}+\beta(t)\right)}, \quad C_{28} = C_{28}(C_{21}, C_{27}). \qquad (88)
$$

Зададим любое $C_{29} > \beta(0)$, например, $C_{29} = 2\beta(0)$.

Тогда при

$$t_0 = \min\left(T, \frac{e^{-C_{28}\beta(0)} - e^{-C_{28}C_{29}}}{C_{28}^2}\right) \tag{89}$$

из (88) получаем оценку

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant t_0} (\alpha+\beta) \leqslant \left(1+\frac{2}{C_{21}}\right) C_{30}, \quad C_{30} = \frac{1}{C_{28}} \ln\left(\frac{1}{e^{-C_{28}\beta(0)} - C_{28}^2 t_0}\right),$$

из которой и (47), (75), (79) следует, что

$$\sum_{i=1}^{N} \Bigg(\|\rho_i\|_{L_\infty\left(0,t_0;W_2^1(0,1)\right)} + \|u_i\|_{L_\infty\left(0,t_0;W_2^1(0,1)\right)} + \|u_i\|_{L_2\left(0,t_0;W_2^2(0,1)\right)} + \left\|\frac{\partial\rho_i}{\partial t}\right\|_{L_\infty\left(0,t_0;L_2(0,1)\right)} + \left\|\frac{\partial u_i}{\partial t}\right\|_{L_2(Q_{t_0})} + \left\|\frac{1}{\rho_i}\right\|_{L_\infty(Q_{t_0})} \Bigg) \leqslant C_{31}, \tag{90}$$

где $Q_{t_0} = [0,t_0]\times[0,1]$, $C_{31} = C_{31}\left(C_{19}, C_{20}, C_{21}, C_{30}, N\right)$.

Таким образом, построив решения $(\rho_1^m, \ldots, \rho_N^m, u_1^m, \ldots, u_N^m)$ задач (47)–(50) при всех $m \in \mathbb{N}$, а затем при необходимости продолжив их на интервал $(0, t_0)$, мы можем использовать для них оценку (90).

На основании этой оценки может быть выделена подпоследовательность (которую мы обозначим так же, далее эта процедура также будет подразумеваться при необходимости), для которой при $m \to \infty$ для всех $i = 1, \ldots, N$ имеют место сходимости

$$\rho_i^m \to \rho_i \quad * -\text{слабо в } \ L_\infty\big(0, t_0; W_2^1(0,1)\big),$$

$$u_i^m \to u_i \quad * -\text{слабо в } \ L_\infty\big(0, t_0; W_2^1(0,1)\big) \ \text{ и слабо в } \ L_2\big(0, t_0; W_2^2(0,1)\big).$$

Кроме того, оставшиеся свойства, перечисленные в (45), выполнены для нашей подпоследовательности в Q_{t_0} равномерно по m, а значит предельные функции попадают в соответствующие классы.

Покажем, что совокупность функций $(\rho_1, \ldots, \rho_N, u_1, \ldots, u_N)$ является сильным решением задачи (41)–(44) на $(0, t_0)$.

Из равномерных оценок ρ_i^m, u_i^m в $L_\infty\big(0, t_0; W_2^1(0,1)\big)$ и $\dfrac{\partial \rho_i^m}{\partial t}$, $\dfrac{\partial u_i^m}{\partial t}$ в $L_2(Q_{t_0})$ (см. (90)) получаем по теореме Арцела–Асколи сходимости

$$\rho_i^m \to \rho_i \ \text{ при } \ m \to \infty \ \text{ сильно в } \ C\big([0, t_0]; L_2(0,1)\big), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{91}$$

$$u_i^m \to u_i \ \text{ при } \ m \to \infty \ \text{ сильно в } \ C\big([0, t_0]; L_2(0,1)\big), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{92}$$

Из ограниченности $\dfrac{\partial u_i^m}{\partial t}$ в $L_2(Q_{t_0})$ следует равномерная оценка $\dfrac{\partial^2 u_i^m}{\partial t \partial x}$ в $L_2(0,t_0;W_2^{-1}(0,1))$, что вместе с оценкой $\dfrac{\partial u_i^m}{\partial x}$ в $L_2(0,t_0;W_2^1(0,1))$ приводит, по теореме Обена–Лионса, к сходимостям

$$\frac{\partial u_i^m}{\partial x} \to \frac{\partial u_i}{\partial x} \text{ при } m \to \infty \text{ сильно в } L_2(Q_{t_0}), \quad i = 1, \dots, N. \tag{93}$$

Отсюда и из (92) следуют соотношения

$$u_i^m \to u_i \text{ при } m \to \infty \text{ сильно в } L_2\big(0,t_0;C[0,1]\big), \quad i = 1, \dots, N. \tag{94}$$

Таким образом, предельные функции ρ_i, u_i, $i = 1, \dots, N$, удовлетворяют уравнениям неразрывности (41) почти всюду в Q_{t_0}, в которых $v = \sum\limits_{j=1}^{N} \alpha_j u_j$, начальным условиям (43) — для почти всех $x \in (0,1)$ и граничным условиям (44) — для почти всех $t \in (0,t_0)$.

Далее, из ограниченности $\dfrac{\partial u_i^m}{\partial t}$ в $L_2(Q_{t_0})$ следует слабая сходимость $\dfrac{\partial u_i^m}{\partial t}$ к $\dfrac{\partial u_i}{\partial t}$ в $L_2(Q_{t_0})$.

А это вместе с (91) и ограниченностью $\rho_i^m \dfrac{\partial u_i^m}{\partial t}$ в $L_2(Q_{t_0})$ влечет

$$\rho_i^m \frac{\partial u_i^m}{\partial t} \to \rho_i \frac{\partial u_i}{\partial t} \text{ при } m \to \infty \text{ слабо в } L_2(Q_{t_0}), \quad i = 1, \ldots, N.$$

Далее, из (91) и (93) следует, что

$$\rho_i^m \frac{\partial u_i^m}{\partial x} \to \rho_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \text{ при } m \to \infty \text{ сильно в } L_2\big(0, t_0; L_1(0,1)\big), \ \ i = 1, \ldots, N,$$

откуда и из (94) получаем для всех $i, j = 1, \ldots, N$ сходимости

$$\left(\rho_i^m \frac{\partial u_i^m}{\partial x}\right) u_j^m \to \left(\rho_i \frac{\partial u_i}{\partial x}\right) u_j \text{ при } m \to \infty \text{ сильно в } L_1(Q_{t_0}). \tag{95}$$

Из (48) следует, что для любых функций вида $(i = 1, \ldots, N)$

$$\varphi_i = \sum_{k=1}^{M} \eta_{ik}(t) \sin(\pi k x), \ \ \eta_{ik} \in C[0, t_0], \ \ k = 1, \ldots, M, \ \ M \leqslant m, \tag{96}$$

выполнены равенства $(i = 1, \ldots, N)$

$$\int_0^{t_0}\int_0^1 \left(\rho_i^m \frac{\partial u_i^m}{\partial t} + \rho_i^m v^m \frac{\partial u_i^m}{\partial x} + \alpha_i K \frac{\partial \rho^m}{\partial x} - \sum_{j=1}^{N} \nu_{ij} \frac{\partial^2 u_j^m}{\partial x^2}\right) \varphi_i \, dxdt = 0.$$

Переходя в последних равенствах, благодаря полученным выше сходимостям, к пределу при $m \to \infty$, получаем, поскольку множество функций φ_i, $i = 1, \ldots, N$ вида (96) всюду плотно в $L_2(Q_{t_0})$, справедливость уравнений баланса импульсов (42) для предельных функций ρ_i, u_i, $i = 1, \ldots, N$ почти всюду в Q_{t_0}, в которых $\rho = \sum\limits_{i=1}^{N} \rho_i$.

Таким образом, доказано существование решения начально-краевой задачи (41)–(44) в малом по времени.

Чтобы продолжить решение с интервала $(0, t_0)$ на весь рассматриваемый интервал $(0, T)$, необходимо для локального решения получить априорные оценки, константы в которых зависят лишь от данных задачи и от величины T, но не от малого параметра t_0.

При дальнейшем исследовании однозначной разрешимости задачи (41)–(44) иногда будет удобнее пользоваться массовыми лагранжевыми координатами.

Возьмем за новые независимые переменные t и $y(t,x) = \int\limits_0^x \rho(t,s)\,ds$.

Тогда уравнения (41), (42) примут вид

$$\frac{\partial \widetilde{\rho}_i}{\partial t} + \widetilde{\rho}\widetilde{\rho}_i \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial y} = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad \widetilde{v} = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \widetilde{u}_j \tag{97}$$

$$\frac{\widetilde{\rho}_i}{\widetilde{\rho}} \frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial t} + \alpha_i K \frac{\partial \widetilde{\rho}}{\partial y} = \sum_{j=1}^{N} \nu_{ij} \frac{\partial}{\partial y} \left(\widetilde{\rho} \frac{\partial \widetilde{u}_j}{\partial y} \right), \quad i = 1, \dots, N, \quad \widetilde{\rho} = \sum_{j=1}^{N} \widetilde{\rho}_j. \tag{98}$$

Область Q_T при таком переходе отображается в прямоугольник $\Pi_T = (0, T) \times (0, d)$, где $d = \int\limits_0^1 \rho_0 \, dx > 0$, $\rho_0 = \sum\limits_{j=1}^{N} \rho_{0j}$, начальные и граничные условия (43), (44) преобразуются к виду

$$\widetilde{\rho}_i|_{t=0} = \widetilde{\rho}_{0i}(y), \quad \widetilde{u}_i|_{t=0} = \widetilde{u}_{0i}(y), \quad y \in [0, d], \quad i = 1, \dots, N, \tag{99}$$

$$\widetilde{u}_i|_{y=0} = \widetilde{u}_i|_{y=d} = 0, \quad t \in [0, T], \quad i = 1, \dots, N. \tag{100}$$

Приступим к выводу априорных оценок. Отметим сначала, что суммируя (97) по i, получаем

$$\frac{\partial \widetilde{\rho}}{\partial t} + \widetilde{\rho}^2 \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial y} = 0. \tag{101}$$

Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\widetilde{\rho}_i}{\widetilde{\rho}}\right) = 0, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Отсюда и из (99) тогда следует, что для всех $i = 1, \ldots, N$

$$\frac{\widetilde{\rho}_i(t, y)}{\widetilde{\rho}(t, y)} = \frac{\widetilde{\rho}_{0i}(y)}{\widetilde{\rho}_0(y)} \quad \text{при} \quad (t, y) \in [0, T] \times [0, d], \tag{102}$$

где $\widetilde{\rho}_0 = \sum_{j=1}^{N} \widetilde{\rho}_{0j}$.

В эйлеровых переменных отношения $\dfrac{\rho_i}{\rho}$ удовлетворяют уравнениям переноса и, в этом случае, мы имеем только неравенства $(i = 1, \ldots, N)$

$$0 < \inf_{[0,1]} \frac{\rho_{0i}}{\rho_0} \leqslant \frac{\rho_i(t, x)}{\rho(t, x)} \leqslant \sup_{[0,1]} \frac{\rho_{0i}}{\rho_0} \leqslant 1 \quad \text{при} \quad (t, x) \in [0, T] \times [0, 1]. \tag{103}$$

Умножим далее уравнения (42) на u_i, проинтегрируем по x и просуммируем по i. Учитывая, что в силу (41), (44) и условия $\mathbf{N} > 0$, имеют место соотношения

$$\sum_{i=1}^{N} \int_0^1 \Big(\rho_i \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho_i v \frac{\partial u_i}{\partial x}\Big) u_i \, dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{N} \int_0^1 \rho_i u_i^2 \, dx \right),$$

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i K \int_0^1 u_i \frac{\partial \rho}{\partial x} \, dx = -K \int_0^1 \rho \frac{\partial v}{\partial x} \, dx$$

$$= K \frac{d}{dt} \left(\int_0^1 (\rho \ln \rho - (\ln d + 1)\rho + d) \, dx \right),$$

$$\sum_{i,j=1}^{N} \nu_{ij} \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} \right) u_i \, dx = - \sum_{i,j=1}^{N} \nu_{ij} \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} \right) dx$$

$$\leqslant -C_1 \sum_{i=1}^{N} \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (104)$$

получим неравенство

$$\frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^1\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\rho_i u_i^2 + K\left(\rho\ln\rho - (\ln d + 1)\rho + d\right)\right)dx\right) + C_1\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^1\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2 dx \leqslant 0. \quad (105)$$

Неравенство (105) проинтегрируем по t, используя (43), получим

$$\int\limits_0^1\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\rho_i u_i^2 + K\left(\rho\ln\rho - (\ln d + 1)\rho + d\right)\right)dx + C_1\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^t\int\limits_0^1\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2 dx d\tau \leqslant \int\limits_0^1\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\rho_{0i}u_{0i}^2 + K\left(\rho_0\ln\rho_0 - (\ln d + 1)\rho_0 + d\right)\right)dx,$$

Из последнего неравенства и из (103) следует оценка

$$\sum_{i=1}^{N} \int_0^1 \rho u_i^2 dx + \int_0^1 (\rho \ln \rho - (\ln d + 1)\rho + d)\, dx + \sum_{i=1}^{N} \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2 dxdt \leqslant C_{32}, \quad (106)$$

где $C_{32} = C_{32}\left(C_1, \left\{\inf\limits_{[0,1]} \frac{\rho_{0i}}{\rho_0}\right\}_{i=1}^{N}, \left\{\sup\limits_{[0,1]} \rho_{0i}\right\}_{i=1}^{N}, \{\|u_{0i}\|_{L_2(0,1)}\}_{i=1}^{N}, K,\ N, d\right)$.

Перепишем (106), используя массовые лагранжевы координаты, в виде

$$\sum_{i=1}^{N} \int_0^d \widetilde{u}_i^2 dy + \int_0^d \frac{\widetilde{\rho} \ln \widetilde{\rho} - (\ln d + 1)\widetilde{\rho} + d}{\widetilde{\rho}} dy + \sum_{i=1}^{N} \int_0^T \int_0^d \widetilde{\rho} \left(\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial y}\right)^2 dydt \leqslant C_{32}. \quad (107)$$

Заметим, что из оценки (106), ввиду (44), очевидно вытекает неравенство

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{0}^{T} \left(\sup_{[0,1]} |u_i| \right)^2 dt \leqslant C_{32}. \tag{108}$$

Запишем теперь уравнения (42) с учетом (41) в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^{N} \widetilde{\nu}_{ij} \left(\frac{\partial(\rho_j u_j)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_j v u_j)}{\partial x} \right) \\ + K \left(\sum_{j=1}^{N} \widetilde{\nu}_{ij} \alpha_j \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}, \quad i = 1, \dots, N, \tag{109}$$

где $\widetilde{\nu}_{ij}$ — элементы симметричной матрицы $\widetilde{\mathbf{N}} = \mathbf{N}^{-1} > 0$.

Умножим (109) на α_i и просуммируем по i, получим

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \widetilde{K} \rho - v V \right), \tag{110}$$

где $V = \sum_{i,j=1}^{N} \widetilde{\nu}_{ij} \alpha_i \rho_j u_j$, $\widetilde{K} = K \sum_{i,j=1}^{N} \widetilde{\nu}_{ij} \alpha_i \alpha_j > 0$.

Введем обозначение

$$\gamma(t,x) = \int\limits_0^t \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \widetilde{K}\rho - vV \right) d\tau + \int\limits_0^x V_0\, ds, \tag{111}$$

где $V_0(x) = V(0,x) = \sum\limits_{i,j=1}^{N} \widetilde{\nu}_{ij}\alpha_i\rho_{0j}u_{0j}$.

Т. к. в силу (106)

$$\sup_{[0,T]} \int\limits_0^1 \left| \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right| dx = \sup_{[0,T]} \int\limits_0^1 |V|\, dx \leqslant C_{33}(C_{32}, \mathbf{N}, N, d),$$

$$\sup_{[0,T]} \left| \int\limits_0^1 \gamma\, dx \right| \leqslant C_{34} \left(C_{32}, \{\|\rho_{0i}u_{0i}\|_{L_1(0,1)}\}_{i=1}^N, \widetilde{\mathbf{N}}, \widetilde{K}, N, T, d \right),$$

то, используя неравенство Пуанкаре, получим

$$\sup_{[0,T]} \int\limits_0^1 |\gamma|\, dx \leqslant C_{35}(C_{33}, C_{34}),$$

и мы приходим к ограниченности γ в $L_\infty\big(0,T; W_1^1(0,1)\big)$.

Отсюда и из того, что $W_1^1(0,1) \hookrightarrow L_\infty(0,1)$, следует оценка

$$\|\gamma\|_{L_\infty(Q_T)} \leqslant C_{36}\left(C_{33}, C_{35}\right).$$

Заметим, что в силу (41), (110) и (111) справедливы соотношения

$$\frac{\partial(\rho e^\gamma)}{\partial t} + v\frac{\partial(\rho e^\gamma)}{\partial x} = -\widetilde{K} e^\gamma \rho^2 \leqslant 0,$$

откуда следует, что

$$\rho(t,x)e^{\gamma(t,x)} \leqslant \left(\sup_{[0,1]} \rho_0\right) e^{\int\limits_0^1 |V_0|\,dx},$$

а поэтому верна оценка

$$\rho(t,x) \leqslant C_{37} \quad \text{при} \quad (t,x) \in [0,T]\times[0,1], \tag{112}$$

где $C_{37} = C_{37}\left(C_{36}, \left\{\sup\limits_{[0,1]} \rho_{0i}\right\}_{i=1}^N, \{\|\rho_{0i}u_{0i}\|_{L_1(0,1)}\}_{i=1}^N, \widetilde{\mathbf{N}}, N\right)$.

Воспользуемся далее записью уравнений (41), (42) в форме (97), (98). Перепишем уравнения (98) в виде

$$\sum_{j=1}^{N} \widetilde{\nu}_{ij} \frac{\widetilde{\rho}_j}{\widetilde{\rho}} \frac{\partial \widetilde{u}_j}{\partial t} + K \left(\sum_{j=1}^{N} \widetilde{\nu}_{ij} \alpha_j \right) \frac{\partial \widetilde{\rho}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\widetilde{\rho} \frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial y} \right), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{113}$$

а затем умножим (113) на α_i и просуммируем по i, получим, с учетом (102), что

$$\sum_{i,j=1}^{N} \widetilde{\nu}_{ij} \alpha_i \frac{\widetilde{\rho}_{0j}}{\widetilde{\rho}_0} \frac{\partial \widetilde{u}_j}{\partial t} + \widetilde{K} \frac{\partial \widetilde{\rho}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\widetilde{\rho} \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial y} \right). \tag{114}$$

Выражая из уравнения (101)

$$\widetilde{\rho} \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial y} = -\frac{\partial \ln \widetilde{\rho}}{\partial t} \tag{115}$$

и подставляя в (114), приходим к равенству

$$\frac{\partial^2 \ln \widetilde{\rho}}{\partial t \partial y} + \widetilde{K} \frac{\partial \widetilde{\rho}}{\partial y} = -\sum_{i,j=1}^{N} \widetilde{\nu}_{ij} \alpha_i \frac{\widetilde{\rho}_{0j}}{\widetilde{\rho}_0} \frac{\partial \widetilde{u}_j}{\partial t}.$$

Умножим это равенство на $\dfrac{\partial \ln \widetilde{\rho}}{\partial y}$ и проинтегрируем по y, получим соотношение

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^d \left(\frac{\partial \ln \widetilde{\rho}}{\partial y}\right)^2 dy\right) + \widetilde{K}\int_0^d \widetilde{\rho}\left(\frac{\partial \ln \widetilde{\rho}}{\partial y}\right)^2 dy$$
$$= -\sum_{i,j=1}^{N} \widetilde{\nu}_{ij}\alpha_i \int_0^d \left(\frac{\widetilde{\rho}_{0j}}{\widetilde{\rho}_0}\frac{\partial \widetilde{u}_j}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \ln \widetilde{\rho}}{\partial y}\right) dy. \quad (116)$$

Правую часть (116) преобразуем, интегрируя по частям и используя (115):

$$-\sum_{i,j=1}^{N} \widetilde{\nu}_{ij}\alpha_i \int_0^d \left(\frac{\widetilde{\rho}_{0j}}{\widetilde{\rho}_0}\frac{\partial \widetilde{u}_j}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \ln \widetilde{\rho}}{\partial y}\right) dy$$
$$= -\frac{d}{dt}\left(\sum_{i,j=1}^{N} \widetilde{\nu}_{ij}\alpha_i \int_0^d \left(\frac{\widetilde{\rho}_{0j}}{\widetilde{\rho}_0} u_j\right)\left(\frac{\partial \ln \widetilde{\rho}}{\partial y}\right) dy\right)$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{N} \widetilde{\nu}_{ij}\alpha_i \int_0^d \left(\frac{\widetilde{\rho}_{0j}}{\widetilde{\rho}_0}\right)' \widetilde{\rho}\,\widetilde{u}_j \left(\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial y}\right) dy \quad (117)$$

$$+\sum_{i,j=1}^{N}\widetilde{\nu}_{ij}\alpha_i\int\limits_0^d\frac{\widetilde{\rho}_{0j}\widetilde{\rho}}{\widetilde{\rho}_0}\left(\frac{\partial\widetilde{u}_j}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial y}\right)dy.$$

Таким образом, после интегрирования (116) по t, учитывая (112) и (117), находим

$$\int\limits_0^d\left(\frac{\partial\ln\widetilde{\rho}}{\partial y}\right)^2dy+2\widetilde{K}\int\limits_0^t\int\limits_0^d\widetilde{\rho}\left(\frac{\partial\ln\widetilde{\rho}}{\partial y}\right)^2dyd\tau\leqslant\int\limits_0^d\left((\ln\widetilde{\rho}_0)'\right)^2dy$$

$$-2\sum_{i,j=1}^{N}\widetilde{\nu}_{ij}\alpha_i\int\limits_0^d\left(\frac{\widetilde{\rho}_{0j}}{\widetilde{\rho}_0}u_j\right)\left(\frac{\partial\ln\widetilde{\rho}}{\partial y}\right)dy+2\sum_{i,j=1}^{N}\widetilde{\nu}_{ij}\alpha_i\int\limits_0^d\left(\frac{\widetilde{\rho}_{0j}}{\widetilde{\rho}_0}\widetilde{u}_{0j}\right)(\ln\widetilde{\rho}_0)'dy$$

$$+2\sqrt{C_{37}}\sum_{i,j=1}^{N}|\widetilde{\nu}_{ij}|\int\limits_0^t\left\|\left(\frac{\widetilde{\rho}_{0j}}{\widetilde{\rho}_0}\right)'\right\|_{L_2(0,d)}\|\widetilde{u}_j\|_{L_\infty(0,d)}\left\|\sqrt{\widetilde{\rho}}\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial y}\right\|_{L_2(0,d)}d\tau$$

$$+2\sum_{i,j=1}^{N}|\widetilde{\nu}_{ij}|\sup_{[0,d]}\frac{\widetilde{\rho}_{0j}}{\widetilde{\rho}_0}\int\limits_0^t\left\|\widetilde{\rho}\left(\frac{\partial\widetilde{u}_j}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial y}\right)\right\|_{L_1(0,d)}d\tau.$$

Используя оценки (107), (108) и (112), отсюда выводим неравенство

$$\int\limits_0^d \left(\frac{\partial \ln \widetilde{\rho}}{\partial y}\right)^2 dy + \int\limits_0^T \int\limits_0^d \widetilde{\rho} \left(\frac{\partial \ln \widetilde{\rho}}{\partial y}\right)^2 dydt \leqslant C_{38}, \tag{118}$$

где $C_{38} = C_{38}\Bigg(C_{32}, C_{37}, \left\{\left\|\frac{\widetilde{\rho}_{0i}}{\widetilde{\rho}_0}\right\|_{W_2^1(0,d)}\right\}_{i=1}^N, \|(\ln \widetilde{\rho}_0)'\|_{L_2(0,d)},$
$\{\|\widetilde{u}_{0i}\|_{L_2(0,d)}\}_{i=1}^N, \widetilde{K}, \widetilde{\mathbf{N}}, N\Bigg)$.

Из (99)–(101) очевидно следует, что при каждом $t \in [0, T]$ хотя бы в одной точке $\delta(t) \in [0, d]$

$$\widetilde{\rho}(t, \delta(t)) = d. \tag{119}$$

Следовательно, можно воспользоваться представлением

$$\ln \widetilde{\rho}(t, y) = \ln \widetilde{\rho}(t, \delta(t)) + \int\limits_{\delta(t)}^y \frac{\partial \ln \widetilde{\rho}(t, s)}{\partial s}\, ds.$$

Из поледнего равенства по неравенству Гельдера, с учетом (118) и (119) получаем, что

$$|\ln\widetilde{\rho}(t,y)| \leqslant |\ln d| + \sqrt{d}\left\|\frac{\partial \ln\widetilde{\rho}}{\partial y}\right\|_{L_2(0,d)} \leqslant C_{39}(C_{38},d).$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$\widetilde{\rho}(t,y) \geqslant C_{40}(C_{39}) \quad \text{при} \quad (t,y)\in[0,T]\times[0,d]. \tag{120}$$

Из (102), (112) и (120) получаем, что для всех $i=1,\ldots,N$

$$C_{41} \leqslant \widetilde{\rho}_i(t,y) \leqslant C_{37} \quad \text{при} \quad (t,y)\in[0,T]\times[0,d], \tag{121}$$

где $C_{41} = C_{41}\left(C_{40}, \left\{\inf\limits_{[0,d]}\dfrac{\widetilde{\rho}_{0i}}{\widetilde{\rho}_0}\right\}_{i=1}^{N}\right)$.

Значит для всех $i=1,\ldots,N$

$$C_{41} \leqslant \rho_i(t,x) \leqslant C_{37} \quad \text{при} \quad (t,x)\in[0,T]\times[0,1]. \tag{122}$$

Из (102), (112) и (118) тогда следует, что

$$\int\limits_0^1 \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial x}\right)^2 dx \leqslant C_{42}, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{123}$$

где $C_{42} = C_{42}\left(C_{37}, C_{38}, \left\{\sup\limits_{[0,d]} \frac{\widetilde{\rho}_{0i}}{\widetilde{\rho}_0}\right\}_{i=1}^N, \left\{\left\|\left(\frac{\widetilde{\rho}_0}{\widetilde{\rho}_{0i}}\right)'\right\|_{L_2(0,d)}\right\}_{i=1}^N\right)$, а поэтому

$$\int\limits_0^1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)^2 dx \leqslant C_{43}(C_{42}, N). \tag{124}$$

Далее возведем в квадрат уравнения (42), поделим на ρ_i и просуммируем по i, получим

$$\sum_{i=1}^N \rho_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\rho_i}\left(\sum_{j=1}^N \nu_{ij}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}\right)^2 - 2\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)\left(\sum_{j=1}^N \nu_{ij}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}\right)$$
$$= \sum_{i=1}^N \rho_i \left(v\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\alpha_i K}{\rho_i}\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)^2. \tag{125}$$

Введем следующее обозначение:

$$\theta(t) = \sum_{i,j=1}^{N} \nu_{ij} \int\limits_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u_j}{\partial x}\right) dx$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^t \int\limits_0^1 \left(\rho_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial \tau}\right)^2 + \frac{1}{\rho_i}\left(\sum_{j=1}^{N} \nu_{ij} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}\right)^2 \right) dx d\tau.$$

Тогда из (125) и неравенств (104), (122) и (124) следует, что

$$\theta'(t) \leqslant C_{44} + C_{45} \left(\sum_{j=1}^{N} \|u_j\|^2_{L_\infty(0,1)}\right) \left(\sum_{i,j=1}^{N} \nu_{ij} \int\limits_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u_j}{\partial x}\right) dx\right)$$

$$\leqslant C_{44} + C_{45} \left(\sum_{j=1}^{N} \|u_j\|^2_{L_\infty(0,1)}\right) \theta(t),$$

где $C_{44} = C_{44}(C_{41}, C_{43}, K, N)$, $C_{16} = C_{16}(C_1, C_{37}, N)$, откуда и из неравенства Гронуолла (см. также (108)) получаем, что

$$\theta(t) \leqslant C_{46} \left(C_{32}, C_{44}, C_{45}, \{\|u'_{0i}\|_{L_2(0,1)}\}_{i=1}^{N}, \mathbf{N}, N, T\right). \qquad (126)$$

Из (126) непосредственно следует оценка

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\int_0^1\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2 dx+\int_0^T\int_0^1\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)^2 dxdt\right.$$
$$\left.+\int_0^T\int_0^1\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}\right)^2 dxdt\right)\leqslant C_{47}(C_1,C_{37},C_{41},C_{46},N). \quad (127)$$

Наконец, из уравнений неразрывности (41) и оценок (122), (123) и (127) получаем, что

$$\int_0^1\left(\frac{\partial \rho_i}{\partial t}\right)^2 dx\leqslant C_{48}(C_{37},C_{42},C_{47},N), \quad i=1,\ldots,N.$$

Тем самым получены все оценки, необходимые для продолжения решения начально-краевой задачи (41)–(44) с интервала $(0,t_0)$ на интервал $(0,T)$.

Для завершения доказательства Теоремы 1 осталось обосновать единственность решения начально-краевой задачи (41)–(44).

Пусть $(\rho_1^{(1)},\ldots,\rho_N^{(1)},u_1^{(1)},\ldots,u_N^{(1)})$ и $(\rho_1^{(2)},\ldots,\rho_N^{(2)},u_1^{(2)},\ldots,u_N^{(2)})$ — два решения задачи начально-краевой задачи (41)–(44).

Пусть также $v^{(1,2)} = \sum\limits_{j=1}^{N} \alpha_j u_j^{(1,2)}$, $\rho^{(1,2)} = \sum\limits_{j=1}^{N} \rho_j^{(1,2)}$.

Положим $\rho_i = \rho_i^{(1)} - \rho_i^{(2)}$, $u_i = u_i^{(1)} - u_i^{(2)}$, $i = 1, \dots, N$, $v = v^{(1)} - v^{(2)}$, $\rho = \rho^{(1)} - \rho^{(2)}$.

Из (41), (43) следуют равенства (см. (64))

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \partial_x \left(\rho_i v^{(1)}\right) + \partial_x \left(\rho_i^{(2)} v\right) = 0, \quad \rho_i|_{t=0} = 0, \quad i = 1, \dots, N. \tag{128}$$

Умножая (128) на $2\rho_i$ и интегрируя по x, получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^1 \rho_i^2\, dx\right) = -\int\limits_0^1 \left(\rho_i^2 \left(\frac{\partial v^{(1)}}{\partial x}\right) + 2\rho_i^{(2)} \rho_i \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + 2\rho_i v \left(\frac{\partial \rho_i^{(2)}}{\partial x}\right)\right) dx, \quad i = 1, \dots, N. \tag{129}$$

Слагаемые в правой части (129) можно оценить следующим образом:

$$-\int\limits_0^1 \rho_i^2 \left(\frac{\partial v^{(1)}}{\partial x}\right) dx \leqslant \left(\sum_{j=1}^{N} \left\| \frac{\partial u_j}{\partial x}^{(1)} \right\|_{L_\infty(0,1)}\right) \left(\int\limits_0^1 \rho_i^2\, dx\right), \quad i = 1, \ldots, N,$$

$$-2\int\limits_0^1 \rho_i^{(2)} \rho_i \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx \leqslant \left\|\rho_i^{(2)}\right\|^2_{L_\infty(Q_T)} \left(\int\limits_0^1 \rho_i^2\, dx\right) + N\sum_{j=1}^{N} \int\limits_0^1 \left(\frac{\partial u_j}{\partial x}\right)^2 dx, \quad i = 1, \ldots, N,$$

$$-2\int\limits_0^1 \rho_i v \left(\frac{\partial \rho_i^{(2)}}{\partial x}\right) dx \leqslant \int\limits_0^1 \rho_i^2\, dx + \left\|\frac{\partial \rho_i^{(2)}}{\partial x}\right\|^2_{L_\infty\left(0,T;L_2(0,1)\right)} \|v\|^2_{L_\infty(0,1)}$$

$$\leqslant \int\limits_0^1 \rho_i^2\, dx + N \left\|\frac{\partial \rho_i^{(2)}}{\partial x}\right\|^2_{L_\infty\left(0,T;L_2(0,1)\right)} \left(\sum_{j=1}^{N} \int\limits_0^1 \left(\frac{\partial u_j}{\partial x}\right)^2 dx\right), \quad i = 1, \ldots, N.$$

В силу включений

$$\rho_i^{(2)} \in L_\infty(Q_T), \quad \frac{\partial \rho_i^{(2)}}{\partial x} \in L_\infty\big(0,T; L_2(0,1)\big), \quad i = 1,\ldots,N,$$

$$\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x} \in L_2\big(0,T; L_\infty(0,1)\big), \quad i = 1,\ldots,N,$$

выводим оценки

$$\frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^1 \rho_i^2\,dx\right) \leqslant C_{49}(t)\int\limits_0^1 \rho_i^2\,dx + C_{50}\sum_{j=1}^N \int\limits_0^1 \left(\frac{\partial u_j}{\partial x}\right)^2 dx, \quad i = 1,\ldots,N,$$

где $C_{49} = C_{49}\left(\left\{\left\|\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x}\right\|_{L_\infty(0,1)}\right\}_{i=1}^N, \left\{\|\rho_i^{(2)}\|_{L_\infty(Q_T)}\right\}_{i=1}^N\right)$, $C_{49} \in L_2(0,T)$,

$C_{50} = C_{50}\left(\left\{\left\|\frac{\partial \rho_i^{(2)}}{\partial x}\right\|_{L_\infty\left(0,T;L_2(0,1)\right)}\right\}_{i=1}^N, N\right)$.

Поэтому, применяя неравенство Гронуолла, приходим к неравенствам

$$\int_0^1 \rho_i^2\,dx \leqslant C_{51} \sum_{j=1}^N \int_0^t \int_0^1 \left(\frac{\partial u_j}{\partial x}\right)^2 dx d\tau, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{130}$$

где $C_{51} = C_{51}\left(C_{50}, \|C_{49}\|_{L_1(0,T)}\right)$.

Далее, из уравнений (42) и краевых условий (44) следует равенство (см. (67))

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i^{(1)} u_i^2\,dx\right) + \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u_j}{\partial x}\right) dx \\ = -\sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i u_i \left(\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial t}\right) dx + K \int_0^1 \rho \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx \\ -\sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i^{(1)} v u_i \left(\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x}\right) dx - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_i v^{(2)} u_i \left(\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x}\right) dx. \end{aligned}$$

Из последнего равенства вытекает соотношение

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^1 \rho_i^{(1)}u_i^2\,dx+\sum_{i,j=1}^{N}\nu_{ij}\int\limits_0^t\int\limits_0^1\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u_j}{\partial x}\right)dxd\tau\right)$$
$$\leqslant-\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^1\rho_i u_i\left(\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial t}\right)dx+K\int\limits_0^1\rho\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx$$
$$-\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^1\rho_i^{(1)}vu_i\left(\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x}\right)dx-\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^1\rho_i v^{(2)}u_i\left(\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x}\right)dx. \quad (131)$$

Оценим слагаемые в правой части соотношения (131) следующим образом:

$$-\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^1\rho_i u_i\left(\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial t}\right)dx\leqslant\frac{C_1}{4}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^1\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2dx$$
$$+C_{53}\left(C_1,\left\{\left\|\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial t}\right\|_{L_2(0,1)}\right\}_{i=1}^{N}\right)\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^1\rho_i^2\,dx,$$

$$K\int_0^1 \rho\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx \leqslant \frac{C_1}{4}\sum_{i=1}^N\int_0^1\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2dx + C_{52}\left(C_1,K,N\right)\sum_{i=1}^N\int_0^1 \rho_i^2\,dx,$$

$$-\sum_{i=1}^N\int_0^1 \rho_i^{(1)} v u_i\left(\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x}\right)dx$$

$$\leqslant C_{54}\left(\left\{\left\|\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x}\right\|_{L_\infty(0,1)}\right\}_{i=1}^N, N\right)\frac{1}{2}\sum_{i=1}^N\int_0^1 \rho_i^{(1)} u_i^2\,dx,$$

$$-\sum_{i=1}^N\int_0^1 \rho_i v^{(2)} u_i\left(\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x}\right)dx \leqslant C_{55}\left(\left\{\|u_i^{(2)}\|_{L_\infty(Q_T)}\right\}_{i=1}^N, N\right)\sum_{i=1}^N\int_0^1 \rho_i^2\,dx$$

$$+ C_{56}\left(\left\{\left\|\frac{1}{\rho_i^{(1)}}\right\|_{L_\infty(Q_T)}\right\}_{i=1}^N, \left\{\left\|\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x}\right\|_{L_\infty(0,1)}\right\}_{i=1}^N\right)\frac{1}{2}\sum_{i=1}^N\int_0^1 \rho_i^{(1)} u_i^2\,dx,$$

где $C_{53}, C_{56} \in L_1(0,T)$, $C_{54} \in L_2(0,T)$.

Таким образом, из (131), с учетом уже доказанного соотношения (см. (130))

$$\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^1 \rho_i^2\,dx \leqslant C_{57}(C_1,C_{51},N)\frac{C_1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^t\int\limits_0^1\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2 dxd\tau,$$

следует неравенство

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^1 \rho_i^{(1)}u_i^2\,dx+\frac{C_1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^t\int\limits_0^1\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2 dxd\tau$$
$$\leqslant \int\limits_0^t C_{58}(C_{52},\ldots,C_{57})\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^1 \rho_i^{(1)}u_i^2\,dx+\frac{C_1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^\tau\int\limits_0^1\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2 dxds\right)d\tau,$$

где $C_{58}\in L_1(0,T)$, из которого получаем тождества $\rho_i\equiv 0$, $u_i\equiv 0$, $i=1,\ldots,N$, завершающие доказательство Теоремы 1.

□

Асимптотическое поведение решения начально-краевой задачи одномерного движения вязкой баротропной смеси

Рассмотрим начально-краевую задачу для одномерных уравнений динамики сжимаемой вязкой баротропной смеси в области $\Omega = (0,1)$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0, \tag{132}$$

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho v \frac{\partial u_i}{\partial x} + \alpha_i \frac{\partial p(\rho)}{\partial x} = \sum_{j=1}^{N} \nu_{ij} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}, \quad i = 1, \dots, N, \tag{133}$$

$$\rho|_{t=0} = \rho_0(x), \quad u_i|_{t=0} = u_{0i}(x), \quad i = 1, \dots, N, \tag{134}$$

$$u_i|_{x=0} = u_i|_{x=1} = 0, \quad i = 1, \dots, N. \tag{135}$$

Здесь $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant 2$ — число компонент смеси, $\rho(t,x)$ — плотность смеси и $u_i(t,x)$, $i = 1, \dots, N$ — скорости компонент смеси, являются искомыми функциями времени t и точки x, v — средневзвешенная скорость,
$v = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j u_j$, $\alpha_j = \mathrm{const} \in (0,1)$, $\sum_{j=1}^{N} \alpha_j = 1$,

$p(\rho)$ — давление, является заданной функцией плотности ρ, ν_{ij} — постоянные коэффициенты вязкостей, образуют матрицу $\mathbf{N}$, $\rho_0(x)$, $u_{0i}(x)$, $i = 1, \ldots, N$ — начальные данные.

Теорема 2. *Пусть* $p \in C^1(0, \infty)$, $p(\rho) > 0$, $\dfrac{dp(\rho)}{d\rho} > 0$, $\mathbf{N} = \mathbf{N}^* > 0$, $\rho_0 > 0$, $\rho_0 \in W_2^1(0,1)$, $u_{0i} \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$, $i = 1, \ldots, N$. *Тогда* $u_i \to 0$, $i = 1, \ldots, N$, $\rho \to \int\limits_0^1 \rho_0(x)\,dx$ *при* $t \to +\infty$ *в норме пространства* $W_2^1(0,1)$.

Доказательство. Получим равномерные по времени t оценки, из которых будет следовать утверждение теоремы.

Для этого возьмем за новые независимые переменные t и $y(t,x) = \int\limits_0^x \rho(t,s)\,ds$ (массовые лагранжевы координаты).

При таком переходе область течения Ω отображается в область $\widetilde{\Omega} = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 < y < d\}$, где $d = \int\limits_0^1 \rho_0(x)\,dx > 0$.

В этом случае система (132), (133) примет вид

$$\frac{\partial \widetilde{\rho}}{\partial t} + \widetilde{\rho}^2 \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial y} = 0, \quad \widetilde{v} = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \widetilde{u}_j, \tag{136}$$

$$\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial t} + \alpha_i \frac{\partial p(\widetilde{\rho})}{\partial y} = \sum_{j=1}^{N} \nu_{ij} \frac{\partial}{\partial y}\left(\widetilde{\rho} \frac{\partial \widetilde{u}_j}{\partial y}\right), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{137}$$

Начальные и граничные условия (134), (135) преобразуются к следующему виду:

$$\widetilde{\rho}|_{t=0} = \widetilde{\rho}_0(y), \quad \widetilde{u}_i|_{t=0} = \widetilde{u}_{0i}(y), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{138}$$

$$\widetilde{u}_i|_{y=0} = \widetilde{u}_i|_{y=d} = 0, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{139}$$

Умножим уравнения (137) на u_i, просуммируем по i и проинтегрируем по y, получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^d \widetilde{u}_i^2 dy\right) + \sum_{i=1}^{N}\nu_{ij}\int\limits_0^d \widetilde{\rho}\left(\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \widetilde{u}_j}{\partial y}\right)dy = -\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\int\limits_0^d \widetilde{u}_i\left(\frac{\partial p(\widetilde{\rho})}{\partial y}\right)dy. \quad (140)$$

Поскольку **N** > 0, то для второго слагаемого в левой части (140) справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{N}\nu_{ij}\int\limits_0^d \widetilde{\rho}\left(\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \widetilde{u}_j}{\partial y}\right)dy \geqslant C\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^d \widetilde{\rho}\left(\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial y}\right)^2 dy. \quad (141)$$

Условимся через C обозначать положительные постоянные, которые зависят только от данных задачи (132)-(135), но не зависят от времени t.

Умножим уравнение (136) на $G'(\widetilde{\rho})$, где $G(\widetilde{\rho}) = \int\limits_d^{\widetilde{\rho}} \frac{p(s) - p(d)}{s^2} ds$,

проинтегрируем по y, и для правой части (140) получим, что

$$-\sum_{i=1}^N \alpha_i \int\limits_0^d \widetilde{u}_i \left(\frac{\partial p(\widetilde{\rho})}{\partial y} \right) dy = \int\limits_0^d p(\widetilde{\rho}) \left(\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial y} \right) dy = -\frac{d}{dt} \left(\int\limits_0^d G(\widetilde{\rho})\, dy \right). \qquad (142)$$

Благодаря (141) и (142), из (140) следует соотношение

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \int\limits_0^d \widetilde{u}_i^2 dy \right) + \frac{d}{dt} \left(\int\limits_0^d G(\widetilde{\rho})\, dy \right) + C \sum_{i=1}^N \int\limits_0^d \widetilde{\rho} \left(\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial y} \right)^2 dy \leqslant 0. \qquad (143)$$

Из (143), после интегрирования по t, получаем неравенство

$$\sum_{i=1}^N \int\limits_0^d \widetilde{u}_i^2 dy + \int\limits_0^d G(\widetilde{\rho})\, dy + \sum_{i=1}^N \int\limits_0^t \int\limits_0^d \widetilde{\rho} \left(\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial y} \right)^2 dy d\tau \leqslant C \qquad (144)$$

(все слагаемые в левой части (144) неотрицательны).

Преобразуем теперь уравнения (137) к виду

$$\alpha_i \sum_{j=1}^{N} \widetilde{\nu}_{ij} \frac{\partial \widetilde{u}_j}{\partial t} + \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \widetilde{\nu}_{ij} \right) \frac{\partial p(\widetilde{\rho})}{\partial y} = \alpha_i \frac{\partial}{\partial y} \Big(\widetilde{\rho} \frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial y} \Big), \quad i = 1, \ldots, N, \quad (145)$$

где $\{\widetilde{\nu}_{ij}\}_{i,j=1}^{N} = \mathbf{N}^{-1} > 0$.

Просуммируем (145) по i:

$$\sum_{i,j=1}^{N} \alpha_i \widetilde{\nu}_{ij} \frac{\partial \widetilde{u}_j}{\partial t} + \widetilde{K} \frac{\partial p(\widetilde{\rho})}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \Big(\widetilde{\rho} \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial y} \Big), \quad (146)$$

где $\widetilde{K} = \sum_{i,j=1}^{N} \widetilde{\nu}_{ij} \alpha_i \alpha_j > 0$.

Отметим, что из уравнения (136) следует

$$\widetilde{\rho}\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial y} = -\frac{\partial \ln \widetilde{\rho}}{\partial t}. \tag{147}$$

Подставляя $\widetilde{\rho}\dfrac{\partial \widetilde{v}}{\partial y}$ из (147) в (146), приходим к равенству

$$\frac{\partial^2 \ln \widetilde{\rho}}{\partial t \partial y} + \widetilde{K}\frac{\partial p(\widetilde{\rho})}{\partial y} = -\sum_{i,j=1}^{N} \alpha_i \widetilde{\nu}_{ij} \frac{\partial \widetilde{u}_j}{\partial t}. \tag{148}$$

Умножая (148) на $\dfrac{\partial \ln \widetilde{\rho}}{\partial y}$ и интегрируя по y, получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^d \left(\frac{\partial \ln \widetilde{\rho}}{\partial y}\right)^2 dy\right) + \widetilde{K}\int\limits_0^d \left(\frac{\partial p(\widetilde{\rho})}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \ln \widetilde{\rho}}{\partial y}\right) dy$$
$$= -\sum_{i,j=1}^{N} \alpha_i \widetilde{\nu}_{ij} \int\limits_0^d \left(\frac{\partial \widetilde{u}_j}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \ln \widetilde{\rho}}{\partial y}\right) dy. \tag{149}$$

Преобразуем правую часть (149), используя формулу интегрирования по частям и (139), (147):

$$-\sum_{i,j=1}^{N}\alpha_i\widetilde{\nu}_{ij}\int_0^d\left(\frac{\partial\widetilde{u}_j}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\ln\widetilde{\rho}}{\partial y}\right)dy=-\frac{d}{dt}\left(\sum_{i,j=1}^{N}\alpha_i\widetilde{\nu}_{ij}\int_0^d\widetilde{u}_j\left(\frac{\partial\ln\widetilde{\rho}}{\partial y}\right)dy\right)$$
$$+\sum_{i,j=1}^{N}\alpha_i\widetilde{\nu}_{ij}\int_0^d\widetilde{\rho}\left(\frac{\partial\widetilde{u}_j}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial y}\right)dy. \quad (150)$$

Тогда перепишем (149) в виде

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^d\left(\frac{\partial\ln\widetilde{\rho}}{\partial y}\right)^2dy\right)+\widetilde{K}\int_0^d\left(\frac{\partial p(\widetilde{\rho})}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\ln\widetilde{\rho}}{\partial y}\right)dy$$
$$=-\frac{d}{dt}\left(\sum_{i,j=1}^{N}\alpha_i\widetilde{\nu}_{ij}\int_0^d\widetilde{u}_j\left(\frac{\partial\ln\widetilde{\rho}}{\partial y}\right)dy\right)$$
$$+\sum_{i,j=1}^{N}\alpha_i\widetilde{\nu}_{ij}\int_0^d\rho\left(\frac{\partial\widetilde{u}_j}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial y}\right)dy. \quad (151)$$

Проинтегрируем равенство (151) по t, получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^d \left(\frac{\partial \ln\widetilde{\rho}}{\partial y}\right)^2 dy + \widetilde{K}\int\limits_0^t\int\limits_0^d \left(\frac{\partial p(\widetilde{\rho})}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \ln\widetilde{\rho}}{\partial y}\right) dyd\tau$$

$$= -\sum_{i,j=1}^N \alpha_i\widetilde{\nu}_{ij}\int\limits_0^d \widetilde{u}_j\left(\frac{\partial \ln\widetilde{\rho}}{\partial y}\right) dy + \sum_{i,j=1}^N \alpha_i\widetilde{\nu}_{ij}\int\limits_0^t\int\limits_0^d \widetilde{\rho}\left(\frac{\partial \widetilde{u}_j}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial y}\right) dyd\tau$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^d \frac{1}{\widetilde{\rho}_0^2}\left(\frac{\partial \widetilde{\rho}_0}{\partial y}\right)^2 dy + \sum_{i,j=1}^N \alpha_i\widetilde{\nu}_{ij}\int\limits_0^d \frac{\widetilde{u}_{0j}}{\widetilde{\rho}_0}\left(\frac{\partial \widetilde{\rho}_0}{\partial y}\right) dy.$$

Отсюда и из (144) тогда следует оценка

$$\int\limits_0^d \left(\frac{\partial \ln\widetilde{\rho}}{\partial y}\right)^2 dy + \int\limits_0^t\int\limits_0^d \widetilde{\rho}p'(\widetilde{\rho})\left(\frac{\partial \ln\widetilde{\rho}}{\partial y}\right)^2 dyd\tau \leqslant C. \tag{152}$$

Далее, из уравнения (136) получаем, что при каждом $t \in [0,T]$ хотя бы в одной точке $\xi(t) \in [0,d]$ верно

$$\widetilde{\rho}(t,\xi(t)) = d.$$

Тогда, т. к.

$$\ln \widetilde{\rho}(t,y) = \ln \widetilde{\rho}(t,\xi(t)) + \int\limits_{\xi(t)}^{y} \frac{\partial(\ln \widetilde{\rho}(t,s))}{\partial s}\, ds,$$

то используя неравенство Гельдера, получим

$$|\ln \widetilde{\rho}(t,y)| \leqslant |\ln d| + \sqrt{d} \left\| \frac{\partial \ln \widetilde{\rho}}{\partial y} \right\|_{L_2(0,d)} \leqslant C.$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$0 < \frac{1}{C} \leqslant \widetilde{\rho}(t,y) \leqslant C. \tag{153}$$

Тогда из (144), (152) и (153) имеем, что

$$\sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^t \int\limits_0^d \left(\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial y}\right)^2 dy d\tau + \int\limits_0^d \left(\frac{\partial \widetilde{\rho}}{\partial y}\right)^2 dy + \int\limits_0^t \int\limits_0^d \left(\frac{\partial \widetilde{\rho}}{\partial y}\right)^2 dy d\tau \leqslant C. \tag{154}$$

Умножим теперь (137) на $\dfrac{\partial^2 \widetilde{u}_i}{\partial y^2}$ и проинтегрируем по y, получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^d \left(\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial y}\right)^2 dy\right) + \sum_{j=1}^N \nu_{ij} \int_0^d \widetilde{\rho}\left(\frac{\partial^2 \widetilde{u}_i}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \widetilde{u}_j}{\partial y^2}\right) dy$$

$$= -\sum_{j=1}^N \nu_{ij} \int_0^d \left(\frac{\partial \widetilde{\rho}}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 \widetilde{u}_i}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial \widetilde{u}_j}{\partial y}\right) dy + \alpha_i \int_0^d \left(\frac{\partial p(\widetilde{\rho})}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 \widetilde{u}_i}{\partial y^2}\right) dy. \quad (155)$$

Просуммируем (155) по i и проинтегрируем по t:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^N \int_0^d \left(\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial y}\right)^2 dy + \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^t \int_0^d \widetilde{\rho}\left(\frac{\partial^2 \widetilde{u}_i}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \widetilde{u}_j}{\partial y^2}\right) dy d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N \int_0^d \left(\frac{\partial \widetilde{u}_{0i}}{\partial y}\right)^2 dy - \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^t \int_0^d \left(\frac{\partial \widetilde{\rho}}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 \widetilde{u}_i}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial \widetilde{u}_j}{\partial y}\right) dy d\tau$$

$$+ \int_0^t \int_0^d \left(\frac{\partial p(\widetilde{\rho})}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 \widetilde{v}}{\partial y^2}\right) dy d\tau. \quad (156)$$

Для левой части (156) имеет место оценка

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int_0^d\left(\frac{\partial\widetilde{u}_i}{\partial y}\right)^2 dy+\sum_{i,j=1}^{N}\nu_{ij}\int_0^t\int_0^d\widetilde{\rho}\left(\frac{\partial^2\widetilde{u}_i}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2\widetilde{u}_j}{\partial y^2}\right)dyd\tau$$

$$\geqslant C\left(\sum_{i=1}^{N}\int_0^d\left(\frac{\partial\widetilde{u}_i}{\partial y}\right)^2 dy+\sum_{i=1}^{N}\int_0^t\int_0^d\left(\frac{\partial^2\widetilde{u}_i}{\partial y^2}\right)^2 dyd\tau\right). \quad (157)$$

Для второго слагаемого в правой части (156), ввиду (154) и неравенств

$$\left\|\frac{\partial\widetilde{u}_i}{\partial y}\right\|^2_{C[0,d]}\leqslant 2\left\|\frac{\partial\widetilde{u}_i}{\partial y}\right\|_{L_2(0,d)}\left\|\frac{\partial^2\widetilde{u}_i}{\partial y^2}\right\|_{L_2(0,d)}, \quad i=1,\ldots,N, \quad (158)$$

справедлива оценка

$$-\sum_{i,j=1}^{N}\nu_{ij}\int_0^t\int_0^d\left(\frac{\partial\widetilde{\rho}}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2\widetilde{u}_i}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial\widetilde{u}_j}{\partial y}\right)dyd\tau$$

$$\leqslant\frac{C}{4}\sum_{i=1}^{N}\int_0^t\int_0^d\left(\frac{\partial^2\widetilde{u}_i}{\partial y^2}\right)^2 dyd\tau+C. \quad (159)$$

Третье слагаемое в правой части (156) оценим следующим образом:

$$\int_0^t \int_0^d \left(\frac{\partial p(\widetilde{\rho})}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial^2 \widetilde{v}}{\partial y^2}\right) dy d\tau \leqslant \frac{C}{4} \sum_{i=1}^{N} \int_0^t \int_0^d \left(\frac{\partial^2 \widetilde{u}_i}{\partial y^2}\right)^2 dy d\tau + C. \tag{160}$$

Таким образом, из (156), благодаря (157), (159) и (160), следует оценка

$$\sum_{i=1}^{N} \int_0^d \left(\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial y}\right)^2 dy + \sum_{i=1}^{N} \int_0^t \int_0^d \left(\frac{\partial^2 \widetilde{u}_i}{\partial y^2}\right)^2 dy d\tau \leqslant C. \tag{161}$$

Интегрируя далее (155) по t, приходим к неравенствам

$$\int_0^t \left| \frac{d}{d\tau} \int_0^d \left(\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial y}\right)^2 dy \right| d\tau \leqslant C, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{162}$$

Из (154) и (162) непосредственно следуют при $t \to +\infty$ сходимости

$$\left\| \frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial y} \right\|_{L_2(0,d)} \to 0, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{163}$$

Дифференцируя (136) по y и умножая на $\dfrac{\partial\widetilde{\rho}}{\partial y}$, с использованием (158), получаем оценку

$$\int\limits_0^t \left| \frac{d}{d\tau} \int\limits_0^d \left(\frac{\partial\widetilde{\rho}}{\partial y} \right)^2 dy \right| d\tau \leqslant C. \tag{164}$$

Следовательно, при $t \to +\infty$

$$\left\| \frac{\partial\widetilde{\rho}}{\partial y} \right\|_{L_2(0,d)} \to 0. \tag{165}$$

Таким образом доказано, что в норме $W_2^1(0,d)$ при $t \to +\infty$

$$\widetilde{u}_i \to 0, \quad i = 1, \ldots, N, \quad \widetilde{\rho} \to d. \tag{166}$$

Несложно проверить теперь, что такие же сходимости имеют место в эйлеровых переменных в норме $W_2^1(0,1)$.

Теорема 2 доказана.

$\square$

Публикации

1. Mamontov A.E., Prokudin D.A. Asymptotic behavior of the solution to the initial-boundary value problem for one-dimensional motions of a barotropic compressible viscous multifluid. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2024, V. 45, P. 1463-1471.
2. Prokudin D.A. On the stabilization of the solution to the initial boundary value problem for one-dimensional isothermal equations of viscous compressible multicomponent media dynamics. Mathematics, 2023, V. 11, № 14, Art. 3065.
3. Мамонтов А.Е., Прокудин Д.А. Асимптотическое поведение решения начально-краевой задачи одномерного движения вязкой баротропной многокомпонентной смеси. Сибирские электронные математические известия, 2023, Т. 20, № 2, С. 1490–1498.
4. Мамонтов А. Е., Прокудин Д.А. Глобальная однозначная разрешимость начально-краевой задачи для одномерных баротропных уравнений динамики бинарных смесей вязких сжимаемых жидкостей. Сибирский журнал индустриальной математики, 2021, Т. 24, № 1, С. 32–47.
5. Прокудин Д.А. О стабилизации решения начально-краевой задачи для уравнений динамики вязких сжимаемых многокомпонентных сред. Сибирские электронные математические известия, 2021, Т. 18, № 2, С. 1278-1285.

6. Mamontov A. E., Prokudin D. A. Galerkin approximations in the problem of one-dimensional unsteady motion of a viscous compressible two-component fluid. Siberian Electronic Mathematical Reports, 2020, V. 17, P. 406–415.
7. Mamontov A.E., Prokudin D.A. Global unique solvability of the initial-boundary value problem for the equations of one-dimensional polytropic flows of viscous compressible multifluids. Journal of Mathematical Fluid Mechanics, 2019, V. 21, Art. 9.
8. Mamontov A.E., Prokudin D.A. Unique solvability of initial-boundary value problem for one-dimensional equations of polytropic flows of multicomponent viscous compressible fluids. Siberian Electronic Mathematical Reports, 2018, V. 15, P. 631-649.
9. Mamontov A. E., Prokudin D. A. Local solvability of the initial-boundary value problem for one-dimensional equations of polytropic flows of viscous compressible multifluids. Journal of Mathematical Sciences, 2018, V. 231, № 2, P. 227–242.
10. Прокудин Д. А. Об однозначной разрешимости начально–краевой задачи для модельной системы уравнений политропного движения смеси вязких сжимаемых жидкостей. Сибирские электронные математические известия, 2017, Т. 14, С. 568–585.

Спасибо за внимание!