

# Усреднение гиперболических уравнений с периодическими коэффициентами

Т. А. Суслина

Санкт-Петербургский государственный университет

Доклад (совместный с М. А. Дородным) посвящен обзору результатов [1–5] по усреднению гиперболических уравнений в  $\mathbb{R}^d$ .

В пространстве  $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$  рассматривается сильно эллиптический дифференциальный оператор (ДО)  $A_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}/\varepsilon) b(\mathbf{D})$ ,  $\varepsilon > 0$ . Здесь  $g(\mathbf{x})$  — ограниченная и положительно определенная матрица-функция размера  $m \times m$ , периодическая относительно некоторой решетки;  $b(\mathbf{D}) = \sum_{l=1}^d b_l D_l$  —  $(m \times n)$ -матричный ДО первого порядка. Предполагается, что  $m \geq n$  и символ  $b(\boldsymbol{\xi})$  имеет максимальный ранг. Нас интересует поведение операторов  $\cos(\tau A_\varepsilon^{1/2})$  и  $A_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau A_\varepsilon^{1/2})$  при малом  $\varepsilon > 0$  и  $\tau \in \mathbb{R}$ .

При  $\varepsilon \rightarrow 0$  эти операторы сходятся к аналогичным оператор-функциям от эффективного оператора  $A^0$  по норме операторов, действующих из пространства Соболева  $H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$  в  $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$  (с подходящим  $s$ ); погрешность имеет порядок  $O(\varepsilon)$  при фиксированном  $\tau$ . Мы обсудим возможность получения более точных аппроксимаций по  $(H^s \rightarrow L_2)$ -норме с погрешностью  $O(\varepsilon^2)$ , а также аппроксимаций по  $(H^s \rightarrow H^1)$ -норме с погрешностью  $O(\varepsilon)$ . Выясняется, что такие аппроксимации (при учете подходящих корректоров) можно получить для операторов  $A_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau A_\varepsilon^{1/2})$  и  $\cos(\tau A_\varepsilon^{1/2})(I + \varepsilon K(\varepsilon))$ , где член  $K(\varepsilon) = \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon$  содержит быстро осциллирующий коэффициент  $\Lambda^\varepsilon(\mathbf{x}) = \Lambda(\mathbf{x}/\varepsilon)$  и вспомогательный сглаживающий оператор  $\Pi_\varepsilon$ . Обсуждается точность результатов. Результаты применяются к задаче Коши для гиперболического уравнения  $\partial_\tau^2 \mathbf{u}_\varepsilon = -A_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{F}$ . Основано на теоретико-операторном подходе.

Поддержано РНФ, проект 22-11-00092.

## Список литературы

- [1] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Операторные оценки погрешности при усреднении нестационарных периодических уравнений*, Алгебра и анализ **20** (2008), вып. 6, 30–107.
- [2] Meshkova Yu. M., *On operator error estimates for homogenization of hyperbolic systems with periodic coefficients*, J. Spectr. Theory **11** (2021), no. 2, 587–660.
- [3] Dorodnyi M. A., Suslina T. A., *Spectral approach to homogenization of hyperbolic equations with periodic coefficients*, J. Diff. Equ. **264** (2018), no. 12, 7463–7522.
- [4] Дородный М. А., Суслина Т. А., *Усреднение гиперболических уравнений с периодическими коэффициентами в  $\mathbb{R}^d$ : точность результатов*, Алгебра и анализ **32** (2020), вып. 4, 3–136.
- [5] Дородный М. А., Суслина Т. А., *Усреднение гиперболических уравнений с периодическими коэффициентами: результаты с корректорами, готовится к печати.*