

О резольвентной сходимости для общих операторов высокого порядка с малыми переменными сдвигами

Д. Борисов, Д.М. Поляков

Институт математики Уфимского федерального исследовательского центра РАН,
Уфа, Россия

“Уравнения с частными производными и их приложения”

115-лет со дня рождения С.Л. Соболева

Исследование выполнено за счёт Российского научного фонда
(грант № 23-11-00009), <https://rscf.ru/project/23-11-00009/>

Пример оператора с сдвигом

$$(\mathcal{H}_\varepsilon u)(x) = - \sum_{i,j=1}^d A_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{j=1}^d A_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x + \varepsilon) + A_0(x) u(x + \varepsilon)$$

в какой-нибудь области с классическим краевым условием.

Пример оператора с сдвигом

$$(\mathcal{H}_\varepsilon u)(x) = - \sum_{i,j=1}^d A_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_j}(x) + \sum_{j=1}^d A_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x + \varepsilon) + A_0(x) u(x + \varepsilon)$$

в какой-нибудь области с классическим краевым условием.

Основной вопрос: поведение резольвенты при $\varepsilon \rightarrow 0$ и наличие операторных оценок при минимальных условиях гладкости на коэффициенты.

Пример оператора с сдвигом

$$(\mathcal{H}_\varepsilon u)(x) = - \sum_{i,j=1}^d A_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_j}(x) + \sum_{j=1}^d A_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x + \varepsilon) + A_0(x) u(x + \varepsilon)$$

в какой-нибудь области с классическим краевым условием.

Основной вопрос: поведение резольвенты при $\varepsilon \rightarrow 0$ и наличие операторных оценок при минимальных условиях гладкости на коэффициенты.

Качественная теория: школа А.Л. Скубачевского.

Пример оператора с сдвигом

$$(\mathcal{H}_\varepsilon u)(x) = - \sum_{i,j=1}^d A_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_j}(x) + \sum_{j=1}^d A_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x + \varepsilon) + A_0(x) u(x + \varepsilon)$$

в какой-нибудь области с классическим краевым условием.

Основной вопрос: поведение резольвенты при $\varepsilon \rightarrow 0$ и наличие операторных оценок при минимальных условиях гладкости на коэффициенты.

Качественная теория: школа А.Л. Скубачевского.

Основная особенность: нет классического повышения гладкости решений из-за нелокальности!

Коэффициенты и сдвиги

$$A_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}(x), |\alpha| = |\beta| = m, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d, x \in \mathbb{R}^d,$$

$$A_{\alpha\beta}^i = A_{\alpha\beta}^i(x), |\alpha|, |\beta| \leq m, |\alpha| + |\beta| \leq 2m - 1, i = 1, \dots, N_{\alpha\beta},$$

Коэффициенты и сдвиги

$$\begin{aligned}
 A_{\alpha\beta} &= A_{\alpha\beta}(x), \quad |\alpha| = |\beta| = m, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d, \quad x \in \mathbb{R}^d, \\
 A_{\alpha\beta}^i &= A_{\alpha\beta}^i(x), \quad |\alpha|, |\beta| \leq m, \quad |\alpha| + |\beta| \leq 2m - 1, \quad i = 1, \dots, N_{\alpha\beta}, \\
 A_{\alpha\beta}, A_{\alpha\beta}^i &\in L_\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{M}_n), \quad A_{\alpha\beta}^i \in W_\infty^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{M}_n), \quad |\alpha| \leq m - 1, \quad |\beta| = m.
 \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} (A_{\alpha\beta}(x) z_\alpha, z_\beta)_{\mathbb{C}^d} \geq c_0 \sum_{|\alpha|=m} |z_\alpha|_{\mathbb{C}^d}^2, \quad z_\alpha \in \mathbb{C}^d, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

Коэффициенты и сдвиги

$$A_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}(x), \quad |\alpha| = |\beta| = m, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

$$A_{\alpha\beta}^i = A_{\alpha\beta}^i(x), \quad |\alpha|, |\beta| \leq m, \quad |\alpha| + |\beta| \leq 2m - 1, \quad i = 1, \dots, N_{\alpha\beta},$$

$$A_{\alpha\beta}, A_{\alpha\beta}^i \in L_\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{M}_n), \quad A_{\alpha\beta}^i \in W_\infty^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{M}_n), \quad |\alpha| \leq m - 1, \quad |\beta| = m.$$

$$\operatorname{Re} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} (A_{\alpha\beta}(x) z_\alpha, z_\beta)_{\mathbb{C}^d} \geq c_0 \sum_{|\alpha|=m} |z_\alpha|_{\mathbb{C}^d}^2, \quad z_\alpha \in \mathbb{C}^d, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

$$\phi_{\alpha\beta}^i = \phi_{\alpha\beta}^i(x, \varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad \varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \rightarrow 0, \quad \phi_{\alpha\beta}^i(\cdot, \varepsilon) \in W_\infty^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^d)$$

$$|\phi_{\alpha\beta}^i(x, \varepsilon)|_{\mathbb{C}^d} + \sum_{j=1}^d \left| \frac{\partial \phi_{\alpha\beta}^i}{\partial x_j}(x, \varepsilon) \right|_{\mathbb{C}^d} \leq \mu(\varepsilon), \quad \mu(\varepsilon) \rightarrow 0.$$

Коэффициенты и сдвиги

$$A_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}(x), \quad |\alpha| = |\beta| = m, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

$$A_{\alpha\beta}^i = A_{\alpha\beta}^i(x), \quad |\alpha|, |\beta| \leq m, \quad |\alpha| + |\beta| \leq 2m - 1, \quad i = 1, \dots, N_{\alpha\beta},$$

$$A_{\alpha\beta}, A_{\alpha\beta}^i \in L_\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{M}_n), \quad A_{\alpha\beta}^i \in W_\infty^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{M}_n), \quad |\alpha| \leq m - 1, \quad |\beta| = m.$$

$$\operatorname{Re} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} (A_{\alpha\beta}(x) z_\alpha, z_\beta)_{\mathbb{C}^d} \geq c_0 \sum_{|\alpha|=m} |z_\alpha|_{\mathbb{C}^d}^2, \quad z_\alpha \in \mathbb{C}^d, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

$$\phi_{\alpha\beta}^i = \phi_{\alpha\beta}^i(x, \varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad \varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \rightarrow 0, \quad \phi_{\alpha\beta}^i(\cdot, \varepsilon) \in W_\infty^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^d)$$

$$|\phi_{\alpha\beta}^i(x, \varepsilon)|_{\mathbb{C}^d} + \sum_{j=1}^d \left| \frac{\partial \phi_{\alpha\beta}^i}{\partial x_j}(x, \varepsilon) \right|_{\mathbb{C}^d} \leq \mu(\varepsilon), \quad \mu(\varepsilon) \rightarrow 0.$$

$$\mathcal{T}_{\alpha\beta}^\varepsilon := \sum_{i=1}^{N_{\alpha\beta}} \mathcal{T}_{\alpha\beta}^{\varepsilon, i}, \quad (\mathcal{T}_{\alpha\beta}^{\varepsilon, i} u)(x) := A_{\alpha\beta}^i(x) u(x + \phi_{\alpha\beta}^{\varepsilon, i}(x)).$$

Оператор

$$\mathcal{H}_\varepsilon = (-1)^m \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} A_{\alpha\beta} \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} + \sum_{\substack{|\alpha|, |\beta| \leq m \\ |\alpha|+|\beta| \leq 2m-1}} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \mathcal{T}_{\alpha\beta}^\varepsilon \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta},$$

Оператор

$$\mathcal{H}_\varepsilon = (-1)^m \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} A_{\alpha\beta} \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} + \sum_{\substack{|\alpha|, |\beta| \leq m \\ |\alpha|+|\beta| \leq 2m-1}} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \mathcal{T}_{\alpha\beta}^\varepsilon \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta},$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}_\varepsilon u)(x) &= (-1)^m \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} A_{\alpha\beta}(x) \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta}(x) \\ &+ \sum_{\substack{|\alpha|, |\beta| \leq m \\ |\alpha|+|\beta| \leq 2m-1}} \sum_{i=1}^{N_{\alpha\beta}} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} A_{\alpha\beta}^i(x) \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta}(x + \phi_{\alpha\beta}^{\varepsilon, i}(x)), \end{aligned}$$

Определение через форму

$\mathcal{H}_\varepsilon$ – неограниченный оператор в $L_2(\mathbb{R}^d)$, соответствующий полуторалинейной форме

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_\varepsilon(u, v) := & \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \left(A_{\alpha\beta} \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta}, \frac{\partial^\alpha v}{\partial x^\alpha} \right)_{L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)} \\ & + \sum_{\substack{|\alpha|, |\beta| \leq m \\ |\alpha|+|\beta| \leq 2m-1}} (-1)^{|\alpha|} \left(\mathcal{T}_{\alpha\beta}^\varepsilon \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta}, \frac{\partial^\alpha v}{\partial x^\alpha} \right)_{L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)} \end{aligned}$$

в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ на области определения $\mathfrak{D}(\mathfrak{h}_\varepsilon) := W_2^m(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$.

Определение через форму

$\mathcal{H}_\varepsilon$ – неограниченный оператор в $L_2(\mathbb{R}^d)$, соответствующий полуторалинейной форме

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_\varepsilon(u, v) := & \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \left(A_{\alpha\beta} \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta}, \frac{\partial^\alpha v}{\partial x^\alpha} \right)_{L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)} \\ & + \sum_{\substack{|\alpha|, |\beta| \leq m \\ |\alpha|+|\beta| \leq 2m-1}} (-1)^{|\alpha|} \left(\mathcal{T}_{\alpha\beta}^\varepsilon \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta}, \frac{\partial^\alpha v}{\partial x^\alpha} \right)_{L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)} \end{aligned}$$

в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ на области определения $\mathfrak{D}(\mathfrak{h}_\varepsilon) := W_2^m(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$.

Цель: поведение резольвенты при малых ε

Предельный оператор и сходимость

$$\mathcal{H}_0 = (-1)^m \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} A_{\alpha\beta} \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} + \sum_{\substack{|\alpha|, |\beta| \leq m \\ |\alpha|+|\beta| \leq 2m-1}} \sum_{i=1}^{N_{\alpha\beta}} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} A_{\alpha\beta}^i \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta},$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_0(u, v) := & \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \left(A_{\alpha\beta} \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta}, \frac{\partial^\alpha v}{\partial x^\alpha} \right)_{L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)} \\ & + \sum_{\substack{|\alpha|, |\beta| \leq m \\ |\alpha|+|\beta| \leq 2m-1}} (-1)^{|\alpha|} \left(A_{\alpha\beta}^i \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta}, \frac{\partial^\alpha v}{\partial x^\alpha} \right)_{L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)} \end{aligned}$$

Предельный оператор и сходимость

$$\mathcal{H}_0 = (-1)^m \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} A_{\alpha\beta} \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} + \sum_{\substack{|\alpha|, |\beta| \leq m \\ |\alpha|+|\beta| \leq 2m-1}} \sum_{i=1}^{N_{\alpha\beta}} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} A_{\alpha\beta}^i \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta},$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_0(u, v) := & \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \left(A_{\alpha\beta} \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta}, \frac{\partial^\alpha v}{\partial x^\alpha} \right)_{L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)} \\ & + \sum_{\substack{|\alpha|, |\beta| \leq m \\ |\alpha|+|\beta| \leq 2m-1}} (-1)^{|\alpha|} \left(A_{\alpha\beta}^i \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta}, \frac{\partial^\alpha v}{\partial x^\alpha} \right)_{L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)} \end{aligned}$$

Операторная оценка:

$$\|(\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} - (\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n) \rightarrow W_2^m(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)} \leq C\mu(\varepsilon).$$

Оператор

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – область с регулярной границей, отображения $x + \phi_{\alpha\beta}^{\varepsilon,i}$ переводят Ω в себя.

Оператор

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – область с регулярной границей, отображения $x + \phi_{\alpha\beta}^{\varepsilon,i}$ переводят Ω в себя.

Форма:

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_{\varepsilon}(u, v) := & \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \left(A_{\alpha\beta} \frac{\partial^{\beta} u}{\partial x^{\beta}}, \frac{\partial^{\alpha} v}{\partial x^{\alpha}} \right)_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)} \\ & + \sum_{\substack{|\alpha|, |\beta| \leq m \\ |\alpha|+|\beta| \leq 2m-1}} (-1)^{|\alpha|} \left(\mathcal{T}_{\alpha\beta}^{\varepsilon} \frac{\partial^{\beta} u}{\partial x^{\beta}}, \frac{\partial^{\alpha} v}{\partial x^{\alpha}} \right)_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)} \\ & + \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m-1} \left(\mathcal{Q}_{\alpha\beta}^{\varepsilon} \frac{\partial^{\beta} u}{\partial x^{\beta}}, \frac{\partial^{\alpha} v}{\partial x^{\alpha}} \right)_{L_2(\partial\Omega; \mathbb{C}^n)} \end{aligned}$$

Операторы с отображениями в себя

Сдвиги в граничных слагаемых:

$$\mathcal{Q}_{\alpha\beta}^\varepsilon := \sum_{i=1}^{K_{\alpha\beta}} \mathcal{Q}_{\alpha\beta}^{\varepsilon,i}, \quad (\mathcal{Q}_{\alpha\beta}^{\varepsilon,i} u)(x) := \gamma_{\alpha\beta}^i(x) u(x + \psi_{\alpha\beta}^{\varepsilon,i}(x)).$$

Операторы с отображениями в себя

Сдвиги в граничных слагаемых:

$$\mathcal{Q}_{\alpha\beta}^\varepsilon := \sum_{i=1}^{K_{\alpha\beta}} \mathcal{Q}_{\alpha\beta}^{\varepsilon,i}, \quad (\mathcal{Q}_{\alpha\beta}^{\varepsilon,i} u)(x) := \gamma_{\alpha\beta}^i(x) u(x + \psi_{\alpha\beta}^{\varepsilon,i}(x)).$$

$\mathfrak{D}(\mathfrak{h}_\varepsilon) = \mathfrak{W} \subseteq W_2^m(\Omega; \mathbb{C}^n)$ определяется краевыми условиями

$$\sum_{|\alpha| \leq m-1} \sum_{k=1}^{K_j} B_\alpha^{jk} \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega, \quad j = 1, \dots, K.$$

Операторы с отображениями в себя

Сдвиги в граничных слагаемых:

$$\mathcal{Q}_{\alpha\beta}^\varepsilon := \sum_{i=1}^{K_{\alpha\beta}} \mathcal{Q}_{\alpha\beta}^{\varepsilon,i}, \quad (\mathcal{Q}_{\alpha\beta}^{\varepsilon,i} u)(x) := \gamma_{\alpha\beta}^i(x) u(x + \psi_{\alpha\beta}^{\varepsilon,i}(x)).$$

$\mathfrak{D}(\mathfrak{h}_\varepsilon) = \mathfrak{W} \subseteq W_2^m(\Omega; \mathbb{C}^n)$ определяется краевыми условиями

$$\sum_{|\alpha| \leq m-1} \sum_{k=1}^{K_j} B_\alpha^{jk} \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega, \quad j = 1, \dots, K.$$

Предельный оператор $\mathcal{H}_0$ – повторить построение с $\varepsilon = 0$ (без сдвигов).

Операторная оценка:

$$\|(\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} - (\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1}\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^n) \rightarrow W_2^m(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)} \leq C\mu(\varepsilon).$$

Оператор

Оператор в области Ω , но теперь отображения $x + \phi_{\alpha\beta}^{\varepsilon,i}(x)$ **не** переводят область Ω в себя.

Оператор

Оператор в области Ω , но теперь отображения $x + \phi_{\alpha\beta}^{\varepsilon,i}(x)$ **не** переводят область Ω в себя.

$$\mathcal{R}u := u \quad \text{on} \quad \Omega,$$

$$\mathcal{R} : L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n) \rightarrow L_2(\Omega; \mathbb{C}^n),$$

$$\mathcal{L}u := \begin{cases} u & \text{in } \Omega, \\ 0 & \text{outside } \Omega, \end{cases}$$

$$\mathcal{L} : L_2(\Omega; \mathbb{C}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n).$$

Оператор

Оператор в области Ω , но теперь отображения $x + \phi_{\alpha\beta}^{\varepsilon,i}(x)$ **не** переводят область Ω в себя.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}u &:= u \quad \text{on} \quad \Omega, & \mathcal{R} &: L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n) \rightarrow L_2(\Omega; \mathbb{C}^n), \\ \mathcal{L}u &:= \begin{cases} u & \text{in} \quad \Omega, \\ 0 & \text{outside} \quad \Omega, \end{cases} & \mathcal{L} &: L_2(\Omega; \mathbb{C}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n). \end{aligned}$$

Сдвиги:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\alpha\beta}^{\varepsilon} &:= \sum_{i=1}^{N_{\alpha\beta}} \mathcal{T}_{\alpha\beta}^{\varepsilon,i}, & \mathcal{T}_{\alpha\beta}^{\varepsilon,i} u &:= A_{\alpha\beta}^i \mathcal{R} \mathcal{S}_{\alpha\beta}^{\varepsilon,i} \mathcal{L} u, \\ (\mathcal{S}_{\alpha\beta}^{\varepsilon,i} u)(x) &:= u(x + \phi_{\alpha\beta}^{\varepsilon,i}(x)), & x &\in \Omega. \end{aligned}$$

Форма

Форма:

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_\varepsilon(u, v) := & \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \left(A_{\alpha\beta} \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta}, \frac{\partial^\alpha v}{\partial x^\alpha} \right)_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)} \\ & + \sum_{\substack{|\alpha|, |\beta| \leq m \\ |\alpha|+|\beta| \leq 2m-1}} (-1)^{|\alpha|} \left(\mathcal{T}_{\alpha\beta}^\varepsilon \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta}, \frac{\partial^\alpha v}{\partial x^\alpha} \right)_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)} \end{aligned}$$

на области $\mathfrak{D}(\mathfrak{h}_\varepsilon) = \dot{W}_2^m(\Omega; \mathbb{C}^n)$.

Форма

Форма:

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_\varepsilon(u, v) := & \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \left(A_{\alpha\beta} \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta}, \frac{\partial^\alpha v}{\partial x^\alpha} \right)_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)} \\ & + \sum_{\substack{|\alpha|, |\beta| \leq m \\ |\alpha|+|\beta| \leq 2m-1}} (-1)^{|\alpha|} \left(\mathcal{T}_{\alpha\beta}^\varepsilon \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta}, \frac{\partial^\alpha v}{\partial x^\alpha} \right)_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)} \end{aligned}$$

на области $\mathfrak{D}(\mathfrak{h}_\varepsilon) = \dot{W}_2^m(\Omega; \mathbb{C}^n)$.

$$\mathcal{H}_\varepsilon = (-1)^m \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} A_{\alpha\beta} \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} + \sum_{\substack{|\alpha|, |\beta| \leq m \\ |\alpha|+|\beta| \leq 2m-1}} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \mathcal{T}_{\alpha\beta}^\varepsilon \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta},$$

$$\frac{\partial^i u}{\partial \nu^i} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \quad i = 0, \dots, m-1.$$

Предельный оператор

Предельный оператор – повторить конструкцию при $\varepsilon = 0$ (без сдвигов).

$$\mathcal{H}_0 = (-1)^m \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} A_{\alpha\beta} \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} + \sum_{\substack{|\alpha|, |\beta| \leq m \\ |\alpha|+|\beta| \leq 2m-1}} \sum_{i=1}^{N_{\alpha\beta}} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} A_{\alpha\beta}^i \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta},$$

$$\frac{\partial^i u}{\partial \nu^i} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \quad i = 0, \dots, m-1.$$

Предельный оператор

Предельный оператор – повторить конструкцию при $\varepsilon = 0$ (без сдвигов).

$$\mathcal{H}_0 = (-1)^m \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} A_{\alpha\beta} \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} + \sum_{\substack{|\alpha|, |\beta| \leq m \\ |\alpha|+|\beta| \leq 2m-1}} \sum_{i=1}^{N_{\alpha\beta}} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} A_{\alpha\beta}^i \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta},$$

$$\frac{\partial^i u}{\partial \nu^i} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \quad i = 0, \dots, m-1.$$

Операторная оценка:

$$\|(\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} - (\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1}\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^n) \rightarrow W_2^m(\Omega; \mathbb{C}^n)} \leq C\mu(\varepsilon).$$

Оператор

Снова отображения $x + \phi_{\alpha\beta}^{\varepsilon,i}(x)$ не сохраняют область Ω .

Сдвиги:

$$\mathcal{T}_{\alpha\beta}^{\varepsilon} := \sum_{i=1}^{N_{\alpha\beta}} \mathcal{T}_{\alpha\beta}^{\varepsilon,i}, \quad \mathcal{T}_{\alpha\beta}^{\varepsilon,i} u := A_{\alpha\beta}^i \mathcal{R} \mathcal{S}_{\alpha\beta}^{\varepsilon,i} \mathcal{L} u,$$

$$(\mathcal{S}_{\alpha\beta}^{\varepsilon,i} u)(x) := u(x + \phi_{\alpha\beta}^{\varepsilon,i}(x)), \quad x \in \Omega.$$

Форма

Форма:

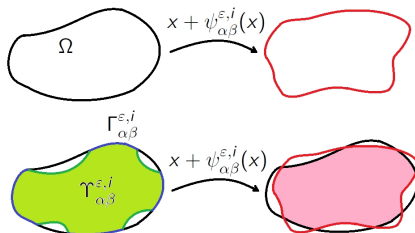
$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_\varepsilon(u, v) := & \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \left(A_{\alpha\beta} \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta}, \frac{\partial^\alpha v}{\partial x^\alpha} \right)_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)} \\ & + \sum_{\substack{|\alpha|, |\beta| \leq m \\ |\alpha|+|\beta| \leq 2m-1}} (-1)^{|\alpha|} \left(\mathcal{T}_{\alpha\beta}^\varepsilon \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta}, \frac{\partial^\alpha v}{\partial x^\alpha} \right)_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)} \\ & + \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m-1} \sum_{i=1}^{K_{\alpha\beta}} \left(\mathcal{Q}_{\alpha\beta}^{\varepsilon, i} \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta}, \frac{\partial^\alpha v}{\partial x^\alpha} \right)_{L_2(\Gamma_{\alpha\beta}^{\varepsilon, i}; \mathbb{C}^n)} \end{aligned}$$

на области $\mathfrak{D}(\mathfrak{h}_\varepsilon) = \mathfrak{W} \subseteq W_2^m(\Omega; \mathbb{C}^n)$, определяемой краевыми условиями

$$\sum_{|\alpha| \leq m-1} \sum_{k=1}^{K_j} B_\alpha^{jk} \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega, \quad j = 1, \dots, K.$$

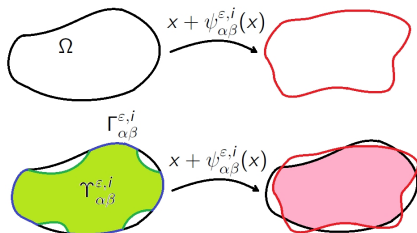
Сдвиги в граничных условиях

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{\alpha\beta}^{\varepsilon,i} u &:= \gamma_{\alpha\beta}^i \mathcal{R} \mathcal{E}_{\alpha\beta}^{\varepsilon,i} \mathcal{L} u, \\ (\mathcal{E}_{\alpha\beta}^{\varepsilon,i} u)(x) &:= \overline{u(x + \psi_{\alpha\beta}^{\varepsilon,i}(x))}, \\ \Gamma_{\alpha\beta}^{\varepsilon,i} &:= \partial\Omega \cap \overline{\Upsilon_{\alpha\beta}^{\varepsilon,i}}, \\ \Upsilon_{\alpha\beta}^{\varepsilon,i} &:= \{x \in \Omega : x + \psi_{\alpha\beta}^{\varepsilon,i}(x) \in \Omega\}. \end{aligned}$$



Сдвиги в граничных условиях

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_{\alpha\beta}^{\varepsilon,i} u &:= \gamma_{\alpha\beta}^i \mathcal{R} \mathcal{E}_{\alpha\beta}^{\varepsilon,i} \mathcal{L} u, \\ (\mathcal{E}_{\alpha\beta}^{\varepsilon,i} u)(x) &:= \overline{u(x + \psi_{\alpha\beta}^{\varepsilon,i}(x))}, \\ \Gamma_{\alpha\beta}^{\varepsilon,i} &:= \partial\Omega \cap \overline{\Upsilon_{\alpha\beta}^{\varepsilon,i}}, \\ \Upsilon_{\alpha\beta}^{\varepsilon,i} &:= \{x \in \Omega : x + \psi_{\alpha\beta}^{\varepsilon,i}(x) \in \Omega\}.\end{aligned}$$



Основное условие:

$$\max_{|\alpha|, |\beta| \leq m-1} \max_{i \in \mathbb{I}_{\alpha\beta}} \text{mes}_{d-1} \partial\Omega \setminus \Gamma_{\alpha\beta}^{\varepsilon,i} \leq \eta(\varepsilon), \quad d \geq 2, \quad \eta(\varepsilon) \rightarrow 0,$$

$$\Omega \subseteq \Upsilon_{\alpha\beta}^{\varepsilon,i} \quad \text{для всех } \varepsilon \text{ при } |\alpha|, |\beta| \leq m-1, \quad i \in \mathbb{I}_{\alpha\beta}, \quad d=1,$$

$$\mathbb{I}_{\alpha\beta} := \{i : \gamma_{\alpha\beta}^i \not\equiv 0 \text{ на } \Gamma_{\alpha\beta}^{\varepsilon,i}\}$$

Предельный оператор

Предельный оператор соответствует форме

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_0(u, v) := & \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \left(A_{\alpha\beta} \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta}, \frac{\partial^\alpha v}{\partial x^\alpha} \right)_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)} \\ & + \sum_{\substack{|\alpha|, |\beta| \leq m \\ |\alpha|+|\beta| \leq 2m-1}} \sum_{i=1}^{N_{\alpha\beta}} (-1)^{|\alpha|} \left(A_{\alpha\beta}^i \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta}, \frac{\partial^\alpha v}{\partial x^\alpha} \right)_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)} \end{aligned}$$

в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ на $\mathfrak{D}(\mathfrak{h}_0) := \mathfrak{W}$.

Операторная оценка

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} - (\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1}\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^n) \rightarrow W_2^m(\Omega; \mathbb{C}^n)} &\leq C \mu^{\frac{1}{2}}(\varepsilon), & d = 1, \\ \|(\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} - (\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1}\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^n) \rightarrow W_2^m(\Omega; \mathbb{C}^n)} &\leq C(\mu^{\frac{1}{2}}(\varepsilon) + \eta^\theta(\varepsilon)), & d \geq 2, \end{aligned}$$

где

$$\theta := \begin{cases} \text{произвольное число в } (0, 1), & d = 2, \\ \frac{1}{d-1}, & d \geq 3. \end{cases}$$

Спектры и псевдоспектры

$$\sigma_\epsilon(\mathcal{A}) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \|(\mathcal{A} - \lambda)^{-1}\|_{H \rightarrow H} > \epsilon^{-1} \right\},$$

$$\sigma_{p,\epsilon}(\mathcal{A}) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \|(\mathcal{A} - \lambda)^{-2p}\|_{H \rightarrow H}^{\frac{1}{2p}} > \epsilon^{-1} \right\}, \quad p \in \mathbb{Z}_+,$$

$$\|(\mathcal{A} - \lambda)^{-1}\|_{H \rightarrow H} = \|(\mathcal{A} - \lambda)^{-2p}\|_{H \rightarrow H}^{\frac{1}{2p}} = +\infty \quad \text{for} \quad \lambda \in \sigma(\mathcal{A}),$$

$$\text{dist}_H(K_1, K_2) := \max \left\{ \sup_{\lambda \in K_1} \inf_{z \in K_2} |\lambda - z|, \sup_{\lambda \in K_2} \inf_{z \in K_1} |\lambda - z| \right\}.$$

Спектры и псевдоспектры

$$\sigma_\epsilon(\mathcal{A}) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \|(\mathcal{A} - \lambda)^{-1}\|_{H \rightarrow H} > \epsilon^{-1} \right\},$$

$$\sigma_{p,\epsilon}(\mathcal{A}) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \|(\mathcal{A} - \lambda)^{-2^p}\|_{H \rightarrow H}^{\frac{1}{2^p}} > \epsilon^{-1} \right\}, \quad p \in \mathbb{Z}_+,$$

$$\|(\mathcal{A} - \lambda)^{-1}\|_{H \rightarrow H} = \|(\mathcal{A} - \lambda)^{-2^p}\|_{H \rightarrow H}^{\frac{1}{2^p}} = +\infty \quad \text{for} \quad \lambda \in \sigma(\mathcal{A}),$$

$$\text{dist}_H(K_1, K_2) := \max \left\{ \sup_{\lambda \in K_1} \inf_{z \in K_2} |\lambda - z|, \sup_{\lambda \in K_2} \inf_{z \in K_1} |\lambda - z| \right\}.$$

Сходимость спектров:

$$\sigma(\mathcal{H}_\epsilon) \cap K \subseteq \overline{\sigma_{\varkappa(\epsilon)}(\mathcal{H}_0)} \cap K, \quad \sigma(\mathcal{H}_0) \cap K \subseteq \overline{\sigma_{\varkappa(\epsilon)}(\mathcal{H}_\epsilon)} \cap K,$$

$$\varkappa(\epsilon) := \frac{1}{\Lambda^2(K)\zeta(\epsilon)} - \frac{1}{\Lambda(K)}, \quad \Lambda(K) := \sup_{\lambda \in K} |\lambda - \lambda_0|, \quad K \Subset \mathbb{C},$$

$$\zeta(\epsilon) := \|(\mathcal{H}_\epsilon - \lambda_0)^{-1} - (\mathcal{H}_0 - \lambda_0)^{-1}\|_{L_2(\Omega; \mathbb{C}^n) \rightarrow W_2^m(\Omega; \mathbb{C}^n)}.$$

Сходимость псевдоспектров

Пусть

$$\overline{\sigma_\epsilon(\mathcal{H}_0)} \cap K = \overline{\sigma_\epsilon(\mathcal{H}_0)} \cap K \neq \emptyset, \quad K \in \mathbb{C},$$

или

$$\overline{\sigma_{p,\epsilon}(\mathcal{H}_0)} \cap K = \overline{\sigma_{p,\epsilon}(\mathcal{H}_0)} \cap K \neq \emptyset.$$

Сходимость псевдоспектров

Пусть

$$\overline{\sigma_\epsilon(\mathcal{H}_0)} \cap K = \overline{\sigma_\epsilon(\mathcal{H}_0)} \cap K \neq \emptyset, \quad K \in \mathbb{C},$$

или

$$\overline{\sigma_{p,\epsilon}(\mathcal{H}_0)} \cap K = \overline{\sigma_{p,\epsilon}(\mathcal{H}_0)} \cap K \neq \emptyset.$$

Тогда

$$\text{dist}_H(\overline{\sigma_\epsilon(\mathcal{H}_0)} \cap K, \overline{\sigma_\epsilon(\mathcal{H}_\epsilon)} \cap K) \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0,$$

или

$$\text{dist}_H(\overline{\sigma_{p,\epsilon}(\mathcal{H}_0)} \cap K, \overline{\sigma_{p,\epsilon}(\mathcal{H}_\epsilon)} \cap K) \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0.$$

Сходимость псевдоспектров

Пусть

$$\overline{\sigma_\epsilon(\mathcal{H}_0)} \cap K = \overline{\sigma_\epsilon(\mathcal{H}_0)} \cap K \neq \emptyset, \quad K \in \mathbb{C},$$

или

$$\overline{\sigma_{p,\epsilon}(\mathcal{H}_0)} \cap K = \overline{\sigma_{p,\epsilon}(\mathcal{H}_0)} \cap K \neq \emptyset.$$

Тогда

$$\text{dist}_H(\overline{\sigma_\epsilon(\mathcal{H}_0)} \cap K, \overline{\sigma_\epsilon(\mathcal{H}_\epsilon)} \cap K) \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0,$$

или

$$\text{dist}_H(\overline{\sigma_{p,\epsilon}(\mathcal{H}_0)} \cap K, \overline{\sigma_{p,\epsilon}(\mathcal{H}_\epsilon)} \cap K) \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0.$$

В случае самосопряжённых операторов

$$\text{dist}_H(\overline{\sigma(\mathcal{H}_0)} \cap K, \overline{\sigma(\mathcal{H}_\epsilon)} \cap K) \leq \kappa(\epsilon)$$

и верна сходимость спектральных проекторов.