“Уравнения с частными производными и их приложения”
Новосибирск, 2–4 октября 2023 г.

К теории энтропийных суб- и суперрешений вырождающихся нелинейных параболических уравнений

Е. Ю. Панов (Великий Новгород, РФ)

В полупространстве $\Pi = (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ рассмотрим нелинейное параболическое уравнение

$$u_t + \operatorname{div}_x(\varphi(u) - a(u)\nabla_x u) = 0, \qquad (1)$$

в котором вектор потока $\varphi(u) = (\varphi_1(u), \ldots, \varphi_n(u)) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, а симметричная матрица диффузии $a(u) = (a_{ij}(u))_{i,j=1}^n$ измерима по Лебегу и ограничена: $a_{ij}(u) \in L^\infty(\mathbb{R})$, $i, j = 1, \ldots, n$. Также предполагается, что $a(u) \geq 0$. Так как матрица диффузии может иметь нетривиальное ядро, уравнение (1) является вырождающимся (гиперболическим-параболическим) уравнением. В частном случае $a \equiv 0$ оно превращается в закон сохранения первого порядка $u_t + \operatorname{div}_x \varphi(u) = 0$. Уравнение (1) можно переписать в дивергентной форме

$$u_t + \operatorname{div}_x \varphi(u) - D_x^2 \cdot A(u) = 0,$$

где $A'(u) = a(u)$, а $D_x^2 \cdot A(u) \doteq \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} A_{ij}(u)$, $u = u(t, x)$, что позволяет ввести понятие слабого решения. Мы будем исследовать задачу Коши для уравнения (1) с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n). \qquad (2)$$

Ввиду нелинейности и вырожденности уравнения, слабое решение задачи (1), (2) может быть не единственно и для корректной постановки этой задачи необходимо рассматривать более узкий класс энтропийных решений. Пусть функция $g(u) \in BV_{loc}(\mathbb{R})$ имеет ограниченную на любом отрезке вариацию. Определим ограниченный линейный оператор $T_g : C(\mathbb{R})/C \to C(\mathbb{R})/C$, где C это пространство постоянных функций, в соответствии с равенством:

$$T_g(f)(u) = g(u-)f(u) - \int_0^u f(s)dg(s), \qquad (3)$$

в котором $g(u-) = \lim\limits_{v \to u-} g(v)$, а интеграл в (3) понимается как

$$\int_0^u f(s)dg(s) = \operatorname{sign} u \int_{J(u)} f(s)dg(s),$$

где $\operatorname{sign} u = 1$, $J(u) = [0, u)$, если $u > 0$; $\operatorname{sign} u = -1$, $J(u) = [u, 0)$, если $u \le 0$. При $f \in C^1(\mathbb{R})$ оператор T_g однозначно определяется равенством $T_g(f)'(u) = g(u)f'(u)$ (в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$). Фиксируем факторизацию матрицы диффузии $a(u) = b^\top(u)b(u)$, где $b(u) = (b_{kj}(u))$, $k \in \overline{1, l}$, $j \in \overline{1, n}$, – $l \times n$-матрица с компонентами $b_{kj}(u) \in L^\infty(\mathbb{R})$. Таким образом, справедливы равенства $a_{ij}(u) = \sum\limits_{k=1}^{l} b_{ki}b_{kj}$.

Определение 1

Функция $u = u(t,x) \in L^\infty(\Pi)$ называется энтропийным решением (э.р.) задачи (1), (2), если выполнены следующие условия:
(i) при всех $k = 1, \dots, l$ распределения

$$\operatorname{div}_x B_k(u(t,x)) \in L^2_{loc}(\Pi),$$

где векторы $B_k(u) = (B_{k1}(u), \dots, B_{kn}(u))$ таковы, что $B'_{ki}(u) = b_{ki}(u)$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $i = 1, \dots, n$;
(ii) для любой функции $g(u) \in C^1(\mathbb{R})$ и всех $k = 1, \dots, l$

$$\operatorname{div}_x T_g(B_k)(u(t,x)) = g(u(t,x))\operatorname{div}_x B_k(u(t,x)) \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi);$$

(iii) для любой выпуклой функции $\eta(u) \in C^2(\mathbb{R})$ (энтропии)

$$\eta(u)_t + \operatorname{div}_x T_{\eta'}(\varphi)(u) - D_x^2 \cdot T_{\eta'}(A)(u) + \eta''(u)\sum_{k=1}^{l}(\operatorname{div}_x B_k(u))^2 \le 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi); \tag{4}$$

(iv) $\operatorname{ess\,lim}_{t\to 0} |u(t,\cdot) - u_0| = 0$ в $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Следует отметить, что требования (iii), (iv) эквивалентны следующему интегральному условию: $\forall \eta(u) \in C^2(\mathbb{R})$, $\eta'' \ge 0$ $\forall f = f(t,x) \in C_0^\infty(\bar{\Pi})$, $f \ge 0$ ($\bar{\Pi} = [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n$)

$$\int_\Pi \Big[\eta(u)f_t + T_{\eta'}(\varphi)(u) \cdot \nabla_x f + T_{\eta'}(A)(u) \cdot D_x^2 f -$$

$$-f\eta''(u)\sum_{k=1}^{l}(\operatorname{div}_x B_k(u))^2\Big]dtdx + \int_{\mathbb{R}^n} \eta(u_0(x))f(0,x)dx \ge 0. \qquad (5)$$

Определение 1 предложено в работе

1. G.-Q. Chen, B. Perthame, Well-posedness for non-isotropic degenerate parabolic-hyperbolic equations, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 2 (2003) 645–668.

В случае скалярной диффузии $A(u) = g(u)E$ определение э.р. значительно упрощается и было дано ранее в

2. J. Carrillo, Entropy solutions for nonlinear degenerate problems, Arch. Ration. Mech. Anal. 147 (1999) 269–361.

Для законов сохранения $a(u) \equiv 0$ понятие э.р. сводится к известному понятию обобщенного э.р. в смысле Кружкова

3. С. Н. Кружков, Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными, Математ. сборник 81:2 (1970) 228–255.

Если в (4) ограничиться неубывающими (невозрастающими) энтропиями $\eta(u)$, а в начальном условии (iv) заменить $|u(t,\cdot)-u_0|$ на $(u(t,\cdot)-u_0)^+$ ($(u(t,\cdot)-u_0)^-$), то получим понятия энтропийного субрешения (э.субр.) и энтропийного суперрешения (э.суперр.) задачи (1), (2). Нетрудно проверить, что э.р. задачи (1), (2) является э.субр. и э.суперр. этой задачи одновременно. Легко также видеть, что $u = u(t,x)$ – э.суперр. задачи (1), (2) тогда и только тогда, когда $v = -u$ – э.субр. задачи

$$v_t + \operatorname{div}_x(-\varphi(-v) - a(-v)\nabla_x v) = 0, \quad v(0,x) = -u_0(x). \tag{6}$$

Теорема 1

Пусть $u_1 = u_1(t,x)$ – э.субр., а $u_2 = u_2(t,x)$ – э.суперр. задачи (1), (2). Тогда $\forall c \in \mathbb{R}$ для п.в. $t > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (u_1(t,x) - c)^+ dx \le \int_{\mathbb{R}^n} (u_0(x) - c)^+ dx,$$
$$\int_{\mathbb{R}^n} (u_2(t,x) - c)^- dx \le \int_{\mathbb{R}^n} (u_0(x) - c)^- dx.$$

Следствие

Если $u_1 = u_1(t,x)$ – э.субр., а $u_2 = u_2(t,x)$ – э.суперр. задачи (1), (2), то $u_1(t,x) \le \operatorname{ess\,sup} u_0(x)$, $u_2(t,x) \ge \operatorname{ess\,inf} u_0(x)$ п.в. на Π (принципы максимума/минимума).

Теорема 2

Пусть $u_1 = u_1(t,x)$ – э.субр., а $u_2 = u_2(t,x)$ – э.суперр. задачи (1), (2) с начальными функциями u_{01}, u_{02}, соответственно. Тогда

$$(u_1-u_2)_t^+ + \operatorname{div}_x[\theta(u_1-u_2)(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))] - D_x^2[\theta(u_1-u_2)(A(u_1)-A(u_2))] \le 0$$

в $\mathcal{D}'(\Pi)$. Предположим дополнительно, что для любого $T > 0$ множество $A_T \doteq \{ (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^n \mid u_1(t,x) > u_2(t,x) \}$ имеет конечную меру Лебега. Тогда для п.в. $t > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (u_1(t,x) - u_2(t,x))^+ dx \le \int_{\mathbb{R}^n} (u_{01}(x) - u_{02}(x))^+ dx.$$

В частности, если $u_{01} \le u_{02}$, то $u_1 \le u_2$ п.в. на Π (принцип сравнения).

Для э.р. приведённые результаты установлены в

4. E. Yu. Panov, On some properties of entropy solutions of degenerate non-linear anisotropic parabolic equations, J. Differ. Equa. 275 (2021) 139–166,

где, в частности, установлено существование наибольшего и наименьшего э.р. задачи (1), (2).

Теорема 3

Максимум конечного множества э.субр. задачи (1), (2) также является э.субр. этой задачи.

Следствие

Минимум конечного множества э.суперр. задачи (1), (2) также является э.суперр. этой задачи.

Теорема 4

Существует наибольшее э.субр. u_+ и наименьшее э.суперр. u_- задачи (1), (2). Эти функции являются и э.р. этой задачи.

Обозначим Sub – множество э.субр. задачи (1), (2). По Теореме 1 $\forall u \in \mathrm{Sub}\ u \le b \doteq \operatorname{ess\,sup} u_0(x)$ п.в. в Π. Поэтому линейный функционал $J(u) = \int_\Pi u(t,x)e^{-|x|-t}dtdx$ ограничен сверху на Sub: $\sup\limits_{u\in \mathrm{Sub}} J(u) = R < +\infty$. Выберем последовательность $u_r \in \mathrm{Sub}$, $r \in \mathbb{N}$ так, что $J(u_r) > R - 1/r$. По Теореме 3 тогда $\bar{u}_r = \max\limits_{1\le k\le r} u_k(t,x) \in \mathrm{Sub}$. Последовательность $\bar{u}_r$, $r \in \mathbb{N}$, возрастает и ограничена. Поэтому $\bar{u}_r \to u_+ \in L^\infty(\Pi)$ п.в. на Π и в $L^1_{loc}(\Pi)$, причём $J(u_+) = R$.
Из энтропийного неравенства (4) (при $\eta(u) = u^2$) легко следует ограниченность последовательностей $\operatorname{div}_x B_k(u_r)$ в $L^2_{loc}(\Pi)$. Поэтому, для некоторых $d_k = d_k(t,x) \in L^2_{loc}(\Pi)$, $k = 1,\dots,l$

$$\operatorname{div}_x B_k(\bar{u}_r) \rightharpoonup d_k, \quad \text{слабо в } L^2_{loc}(\Pi).$$

Переходя к пределу при $r \to \infty$ в тождестве (ii) из Определения 1 для э.субр. $\bar{u}_r$, получим

$$\operatorname{div}_x T_g(B_k)(u_+) = g(u_+)d_k \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi).$$

При $g(u) \equiv 1$ отсюда следует, что $d_k = \operatorname{div}_x B_k(u_+)$ и значит для u_+ выполнены требования (i), (ii) Определения 1.

Далее, из свойства слабой полунепрерывности снизу L^2-нормы $\forall f \in C_0(\Pi)$, $f \ge 0$

$$\int_\Pi \eta''(u_+) \sum_{k=1}^{l} (\operatorname{div}_x B_k(u_+))^2 f dt dx \le \liminf_{r\to\infty} \int_\Pi \eta''(\bar{u}_r) \sum_{k=1}^{l} (\operatorname{div}_x B_k(\bar{u}_r))^2 f dt dx,$$

что позволяет перейти к пределу при $r \to \infty$ в неравенствах (5) для $\bar{u}_r$ и вывести (5) для предельной функции u_+. Покажем, что u_+ – наибольшее э.субр. задачи (1), (2). Действительно, если $u \in Sub$, то по Теореме 3 $\bar{u} = \max(u, u_+) \in Sub$ и $\bar{u} \ge u_+$. Однако, $J(\bar{u} - u_+) = J(\bar{u}) - J(u_+) \le R - R = 0$, откуда $\bar{u} = u_+ \Leftrightarrow u \le u_+$ п.в. на Π. Ясно, что $u_- = -v_+$, где v_+ – наибольшее э.субр. задачи (6), является наименьшим э.суперр. задачи (1), (2).

Покажем, что $u_\pm$ являются также и э.р. задачи (1), (2). Достаточно доказать это для u_+. Выберем строго убывающую последовательность b_r, $r \in \mathbb{N}$, такую что $b_r > b = \operatorname{ess\,sup} u_0(x)$ для всех $r \in \mathbb{N}$ и определим соответствующую последовательность начальных функций

$$u_{0r}(x) = \begin{cases} u_0(x) & , \quad |x| \le r, \\ b_r & , \quad |x| > r. \end{cases}$$

Заметим, что $\forall r \in \mathbb{N}$

$$u_0(x) \le u_{0r+1}(x) \le u_{0r}(x) \le b_r \quad \text{п.в. } \mathbb{R}^n, \text{ и } \lim_{r\to\infty} u_{0r}(x) = u_0(x).$$

Пусть $u_r = u_r(t,x)$ – э.р. задачи (1), (2) с начальной функцией $u_{0r}(x)$. Как показано в [4], последовательность u_r убывает и сходится при $r \to \infty$ к наибольшему э.р. $\tilde{u}$ исходной задачи. По принципу максимума $u_+ \le b$ п.в. на Π. Поэтому в слое $\Pi_T = (0,T) \times \mathbb{R}^n$ множество $\{u_+ > u_r\} \subset \{b > u_r\} = \{b_r - u_r > b_r - b\}$ и следовательно

$$\operatorname{meas}\{u_+ > u_r\} \le \frac{1}{b_r - b} \int_{\Pi_T} (u_r - b_r)^- dtdx \le \frac{T}{b_r - b} \int_{|x|<r} (u_0 - b_r)^- dx < +\infty,$$

где мы использовали неравенство Чебышёва и Теорему 1 для э.суперр. u_r. Таким образом выполнено требование Теоремы 2 и значит выполнен принцип сравнения для э.субр. u_+ и э.суперр. u_r, так что из неравенства $u_0 \le u_{0r}$ следует, что $u_+ \le u_r$ п.в. на Π. В пределе при $r \to \infty$ получаем, что $u_+ \le \tilde{u}$ п.в. на Π. Но так как $\tilde{u}$ – э.р., а значит и э.субр. задачи (1), (2), в то время как u_+ – наибольшее э.субр. этой задачи, верно обратное неравенство $\tilde{u} \le u_+$ п.в. на Π. Итак, $u_+ = \tilde{u}$ является э.р.

Если начальная функция u_0 периодическая, $u_0(x+e) = u_0(x)$ п.в. на $\mathbb{R}^n$ $\forall e \in L$, где L – решётка периодов, то функции $u_\pm(t, x+e)$ также являются соответственно наибольшим о.э.субр. и наименьшим э.суперр. задачи (1), (2) при всех $e \in L$. В силу единственности $u_\pm(t, x+e) = u_\pm(t, x)$ п.в. в Π, то есть функции $u_\pm$ пространственно периодические. Интегрируя соотношение

$$(u_+ - u_-)_t + \operatorname{div}_x(\varphi(u_+) - \varphi(u_-)) - D_x^2(A(u_+) - A(u_-)) \le 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi)$$

по ячейке периодичности $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/L$, получим, что для п.в. $t > 0$

$$\int_{\mathbb{T}^n} (u_+(t,x) - u_-(t,x))dx \le \int_{\mathbb{T}^n} (u_+(0,x) - u_-(0,x))dx = 0.$$

Ввиду условия $u_+ \ge u_-$ получаем равенство $u_+ = u_-$ п.в. в Π, откуда следует единственность э.р.

В случае законов сохранения представленные результаты получены ранее в

6. Е. Ю. Панов, К теории обобщенных энтропийных суб- и супер-решений задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка, Дифф. уравнения 37:2 (2001) 252–259.
7. Е. Ю. Панов, О наибольших и наименьших обобщенных энтропийных решениях задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка, Математ. сборник 193:5 (2002) 95–112.
8. Е. Ю. Панов, К теории обобщенных энтропийных решений задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка в классе локально суммируемых функций, Известия РАН 66:6 (2002) 91–136.
9. E. Yu. Panov, On Entropy Solutions of Scalar Conservation Laws with Discontinuous Flux, Arch. Rational Mech. Anal. 247, 78 (2023).

Представленные в докладе результаты опубликованы в

10. Е. Ю. Панов, К теории энтропийных суб- и суперрешений нелинейных вырождающихся параболических уравнений, Соврем. мат. Фундам. направл. 69:2 (2023) 306–331.

Спасибо за внимание!