КОНФЕРЕНЦИЯ

«Уравнения с частными производными и их приложения», посвященная 115-летию со дня рождения С.Л. Соболева

02 — 04 октября 2023 года

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

А.Е. Мамонтов, Д.А. Прокудин

Об обобщениях уравнений Навье-Стокса динамики вязкой сжимаемой жидкости на многокомпонентный случай

Одним из многочисленных вариантов моделей динамики многокомпонентных (N-компонентных, $N \geqslant 2$) сред является многоскоростная многотемпературная модель[1,2,3]:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{u}_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{1}$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial (\rho_i \boldsymbol{u}_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{u}_i) + \nabla p_i = \\ = \operatorname{div} \mathbb{S}_i + \boldsymbol{J}_i + \rho_i \boldsymbol{f}_i, \quad i = 1, \ldots, N, \end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial \mathcal{E}_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathcal{E}_i \boldsymbol{u}_i) + \operatorname{div}\Big(\boldsymbol{q}_i - \mathbb{S}_i \boldsymbol{u}_i + p_i \boldsymbol{u}_i\Big) = \\ = \Gamma_i + \mathcal{Q}_i + \boldsymbol{J}_i \cdot \boldsymbol{u}_i + \rho_i \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{u}_i, \quad i = 1, \ldots, N. \end{gathered} \tag{3}$$

[1] Rajagopal K.L., Tao L. Mechanics of mixtures. World Scientific Publishing, Singapore, 1995.
[2] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. Наука, Москва, 1987.
[3] Gard S.K., Prichett J.W. Dynamics of gas-fluidzed beds. Journal of Applied Physics, 1975, V. 46, № 10, P. 4493–4500.

Здесь $\rho_i \geqslant 0$ — плотность i-й компоненты; $\boldsymbol{u}_i$ — скорость i-й компоненты; $p_i = p_i(\rho_i, \theta_i)$ — давление в i-й компоненте, где $\theta_i > 0$ — температура i-й составляющей;

$$\begin{gathered}\mathbb{S}_i = \sum_{j=1}^{N} (\lambda_{ij}(\mathrm{div}\boldsymbol{u}_j)\mathbb{I} + 2\mu_{ij}\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_j)) = \\ = \sum_{j=1}^{N} \left(\left(\lambda_{ij} + \frac{2}{3}\mu_{ij} \right) (\mathrm{div}\boldsymbol{u}_j)\mathbb{I} + 2\mu_{ij} \left(\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_j) - \frac{1}{3}(\mathrm{div}\boldsymbol{u}_j)\mathbb{I} \right) \right)\end{gathered} \tag{4}$$

— вязкая часть тензора напряжений в i-й компоненте, где $\mathbb{I}$ — единичный тензор, $\mathbb{D}(\boldsymbol{w}) = \dfrac{1}{2}((\nabla \otimes \boldsymbol{w}) + (\nabla \otimes \boldsymbol{w})^*)$ — тензор скоростей деформаций векторного поля $\boldsymbol{w}$ (верхний индекс $*$ означает транспонирование), числовые коэффициенты вязкостей λ_{ij} и μ_{ij} образуют соответственно матрицы $\mathbf{\Lambda}$ и $\mathbf{M}$, такие, что

$$\mathbf{M} > 0, \quad \mathbf{\Lambda} + \frac{2}{3}\mathbf{M} \geqslant 0, \tag{5}$$

откуда в частности следует, что так называемая «матрица полных вязкостей»

$$\mathbf{N} = \{\nu_{ij}\}_{i,j=1}^{N} = \mathbf{\Lambda} + 2\mathbf{M} > 0; \tag{6}$$

далее,

$$\boldsymbol{J}_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(\boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_i), \quad a_{ij} = a_{ji} = \mathrm{const}, \quad i, j = 1, \ldots, N \tag{7}$$

— приток импульса в i-ю компоненту из остальных компонент;

$\boldsymbol{f}_i$ — плотность внешних массовых сил, действующих из внешней среды на i-ю компоненту; $\mathcal{E}_i = \dfrac{\rho_i|\boldsymbol{u}_i|^2}{2} + \rho_i e_i$ — полная энергия i-й компоненты, где $e_i = e_i(\rho_i, \theta_i)$ — внутренняя удельная энергия i-й компоненты;

$$\boldsymbol{q}_i = -k_i(\theta_i)\nabla\theta_i \tag{8}$$

— тепловой поток внутри i-й компоненты, где k_i — внутренняя теплопроводность i-й компоненты;

$$\Gamma_i = \sum_{j=1}^{N} b_{ij}(\theta_j - \theta_i) + \Gamma, \quad b_{ij} = b_{ji} = \mathrm{const}, \quad i, j = 1, \ldots, N \tag{9}$$

— приток тепловой энергии в i-ю компоненту из остальных компонент, где

$$\Gamma = \frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}|\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_j|^2;$$

наконец, $\mathcal{Q}_i$ отвечают за приток энергии в i-ую компоненту из других компонент извне, т. е. из внешней среды и из прочих компонент (сверх того, что уже учтено в Γ_i).

Система уравнений (1)–(3) не является замкнутой, поэтому необходимо привлекать дополнительные соотношения, из которых в первую очередь следует указать соотношения Гиббса

$$\theta_i ds_i = de_i + p_i d\left(\frac{1}{\rho_i}\right), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{10}$$

где $s_i = s_i(\rho_i, \theta_i)$ — энтропия i-й компоненты, что эквивалентно соотношениям Максвелла

$$\rho_i^2 \frac{\partial e_i}{\partial \rho_i} = p_i - \theta_i \frac{\partial p_i}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{11}$$

а также условия термодинамической устойчивости

$$\frac{\partial p_i}{\partial \rho_i} > 0, \quad \frac{\partial e_i}{\partial \theta_i} > 0 \quad i = 1, \ldots, N. \tag{12}$$

Для гладких решений $(\rho_1, \dots, \rho_N, \theta_1, \dots \theta_N, \boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_N)$ системы (1)–(3) уравнения (3) (ввиду (1), (2), (11)) можно записать в одной из следующих эквивалентных форм:

$$\frac{\partial(\rho_i e_i)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho_i e_i \boldsymbol{u}_i) + p_i \mathrm{div} \boldsymbol{u}_i + \mathrm{div} \boldsymbol{q}_i = \\ = \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i) + \Gamma_i + \mathcal{Q}_i, \quad i = 1, \dots, N, \tag{13}$$

$$\frac{\partial(\rho_i s_i)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho_i s_i \boldsymbol{u}_i) + \mathrm{div}\left(\frac{\boldsymbol{q}_i}{\theta_i}\right) = \\ = \frac{\mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i)}{\theta_i} + \frac{\Gamma_i}{\theta_i} + \frac{\mathcal{Q}_i}{\theta_i} - \frac{\boldsymbol{q}_i \cdot \nabla \theta_i}{\theta_i^2}, \quad i = 1, \dots, N, \tag{14}$$

$$\frac{\partial(\rho_i \theta_i)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho_i \theta_i \boldsymbol{u}_i) = \left(\frac{\partial e_i}{\partial \theta_i}\right)^{-1} \Big(\mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i) + \\ + \Gamma_i + \mathcal{Q}_i - \mathrm{div} \boldsymbol{q}_i - \theta_i \frac{\partial p_i}{\partial \theta_i} \mathrm{div} \boldsymbol{u}_i\Big), \quad i = 1, \dots, N. \tag{15}$$

И с физической точки зрения, и с математических позиций необходимо обеспечить неотрицательность производства энтропии. Общая энтропия системы

$$S = \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} \rho_i s_i d\boldsymbol{x} \tag{16}$$

(Ω — область течения с границей $\partial\Omega$ в $\mathbb{R}^n$) должна не убывать со временем в случае термодинамической замкнутости, т. е. если обращается в нуль приток тепла извне, что означает $\sum\limits_{i=1}^{N} \mathcal{Q}_i = 0$ (и, по крайней мере, в случае когда все $\mathcal{Q}_i = 0$), и $\boldsymbol{u_i}|_{\partial\Omega} = 0$, $\boldsymbol{q}_i \cdot \boldsymbol{n}|_{\partial\Omega} = 0$, $i = 1, \ldots, N$, где $\boldsymbol{n}$ — вектор единичной внешней нормали к $\partial\Omega$. Тогда из (8), (14) получаем

$$\begin{gathered} \frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} \frac{\mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i)}{\theta_i} d\boldsymbol{x} + \\ + \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} \frac{k_i(\theta_i)|\nabla\theta_i|^2}{\theta_i^2} d\boldsymbol{x} + \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} \frac{\Gamma_i}{\theta_i} d\boldsymbol{x}. \end{gathered} \tag{17}$$

Таким образом, достаточно потребовать выполнения простых условий на коэффициенты

$$k_i \geqslant 0, \quad a_{ij} \geqslant 0, \quad b_{ij} \geqslant 0, \quad i, j = 1, \ldots, N, \tag{18}$$

а также следующего условия для тензоров вязких напряжений:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i)}{\theta_i} \geqslant 0. \tag{19}$$

В рамках условий на матрицы вязкостей, перечисленных в (5), выполнение (19) неочевидно.

В широком классе задач для описания процессов теплопереноса в многокомпонентных средах используется подход, согласно которому вместо уравнений сохранения энергии для каждой компоненты применяется уравнение сохранения энергии многокомпонентной среды в целом[4,5,6,7,8].

[4] Папин А.А. Краевые задачи двухфазной фильтрации. Изд-во АлтГУ, Барнаул, 2009.

[5] Жумагулов Б.Т., Монахов В.Н. Гидродинамика нефтедобычи. КазгосИНТИ, Алматы, 2001.

[6] Воинов О.В., Пухначев В.В. Термокапиллярное движение в газожидкостной смеси. Прикладная механика и техническая физика, 1980, Т. 21, № 5, С. 38–45.

[7] Atkin R. J., Craine R. E. Continuum Theories of Mixtures: Applications. IMA Journal of Applied Mathematics, 1976, V. 17, № 2, P. 153–207.

[8] Muller I. A thermodynamic theory of mixtures of fluids. Arch. Ration. Mech. Anal., 1968, V. 28, № 1, P. 1–39.

При этом предполагается, что температуры составляющих в каждой точке среды совпадают: $\theta_i = \theta > 0$, $i = 1, \ldots, N$; в соотношениях выше все θ_i заменяются на θ, т. е. $p_i = p_i(\rho_i, \theta)$, $e_i = e_i(\rho_i, \theta)$, $s_i = s_i(\rho_i, \theta)$ (соответствующим образом следует поправить (10)–(12)); $\Gamma_i = \Gamma$ вместо (9);

$$\boldsymbol{q}_i = -k_i(\theta)\nabla\theta \tag{20}$$

вместо (8).

В качестве уравнения энергии можно рассматривать, например, уравнение для суммарной внутренней энергии

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i=1}^{N}\rho_i e_i\right) + \operatorname{div}\left(\sum_{i=1}^{N}\rho_i e_i \boldsymbol{u}_i\right) + \sum_{i=1}^{N} p_i \operatorname{div}\boldsymbol{u}_i + \operatorname{div}\boldsymbol{q} = \\ = \sum_{i=1}^{N}\mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i) + N\Gamma + \rho g, \end{aligned} \tag{21}$$

или уравнение для суммарной полной энергии

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\sum_{i=1}^{N} \mathcal{E}_i \boldsymbol{u}_i\right) + \operatorname{div}\left(\boldsymbol{q} - \sum_{i=1}^{N} \mathbb{S}_i \boldsymbol{u}_i + \sum_{i=1}^{N} p_i \boldsymbol{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{u}_i + \rho g, \tag{22}$$

где $\mathcal{E} = \sum\limits_{i=1}^{N} \mathcal{E}_i$ — суммарная полная энергия, $\boldsymbol{q} = \sum\limits_{i=1}^{N} \boldsymbol{q}_i$ — суммарный тепловой поток, $\rho = \sum\limits_{i=1}^{N} \rho_i$ — суммарная плотность, $\sum\limits_{i=1}^{N} \mathcal{Q}_i = \rho g$, g — заданная плотность тепловых источников внешней среды.

Система (1), (2), (22) (многоскоростная однотемпературная модель) описывает достаточно произвольные движения многокомпонентных сред, включая случаи, когда составляющие среды плохо перемешаны, и поэтому их скорости концентрации и давления существенно отличаются от равновесных значений. Единственное уже наложенное предположение о равновесности состоит в гипотезе о равенстве температур составляющих среды, благодаря чему нет необходимости записывать уравнения энергии для каждой компоненты, и можно обойтись одним уравнением (22).

Условие (19) в многоскоростной однотемпературной модели сводится к наложенным в (5) требованиям на матрицы вязкостей. Действительно,

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i) = \sum_{i,j=1}^{N} \Big(\lambda_{ij} + \frac{2}{3}\mu_{ij}\Big)(\mathrm{div}\boldsymbol{u}_i)(\mathrm{div}\boldsymbol{u}_j) + \tag{23}$$

$$+2\sum_{i,j=1}^{N} \mu_{ij}\Big(\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i) - \frac{1}{3}(\mathrm{div}\boldsymbol{u}_i)\mathbb{I}\Big) : \Big(\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_j) - \frac{1}{3}(\mathrm{div}\boldsymbol{u}_j)\mathbb{I}\Big) \geqslant 0$$

при $\mathbf{M} > 0$, $\boldsymbol{\Lambda} + \dfrac{2}{3}\mathbf{M} \geqslant 0$.

Кроме того, из условий (5) (см. (6)) и $\boldsymbol{u_i}|_{\partial\Omega} = 0$, $i = 1, \ldots, N$, следует важное с математических позиций неравенство

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \mathbb{S}_i : (\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i)\, d\boldsymbol{x} \geqslant C \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i|^2\, d\boldsymbol{x} \tag{24}$$

с некоторой положительной постоянной $C = C(\boldsymbol{\Lambda}, \mathbf{M})$.

Еще одним из вариантов моделей динамики вязких сжимаемых многокомпонентных сред является односкоростная однотемпературная модель[9,10]:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{u}) + \operatorname{div} \boldsymbol{F_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{25}$$

$$\frac{\partial (\rho \boldsymbol{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) + \nabla p = \operatorname{div} \mathbb{S} + \sum_{i=1}^{N} \rho_i \boldsymbol{f}_i, \tag{26}$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathcal{E} \boldsymbol{u}) + \operatorname{div}(\boldsymbol{q} - \mathbb{S}\boldsymbol{u} + p\boldsymbol{u}) = \sum_{i=1}^{N} (\rho_i \boldsymbol{u} + \boldsymbol{F_i}) \cdot \boldsymbol{f}_i, \tag{27}$$

где $\rho_i \geqslant 0$ — плотность i-й компоненты, $\boldsymbol{u}$ — скорость среды, $\boldsymbol{F}_i$ — диффузионный поток i-ой компоненты, $\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i = 0$, $\rho = \sum_{i=1}^{N} \rho_i$ — суммарная плотность, $p = p(\rho, \theta)$ — давление, $\theta > 0$ — температура,

[9] Nagnibeda E., Kustova E. Non–equilibrium reacting gas flow. Springer, Berlin, 2009.

[10] Giovangigli V. Multicomponent flow modeling. Birkhauser, Boston, 1999.

$\mathbb{S} = \lambda(\operatorname{div}\boldsymbol{u})\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{D}(\boldsymbol{u})$ — вязкая часть тензора напряжений, $\mu > 0$, $\lambda + \dfrac{2}{3}\mu \geqslant 0$, $\boldsymbol{f}_i$ — плотность внешних массовых сил, действующих из внешней среды на i-ю компоненту, $\mathcal{E} = \dfrac{\rho|\boldsymbol{u}|^2}{2} + \rho e$ — полная энергия, $e = e(\rho, \theta)$ — внутренняя удельная энергия, $\boldsymbol{q} = -k(\theta)\nabla\theta$ — тепловой поток, k — теплопроводность.

Суммируя уравнения (25) по i от 1 до N, получим уравнение неразрывности для среды в целом:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{u}) = 0. \tag{28}$$

Для многих практических задач единственная внешняя сила, действующая на компоненты — это сила притяжения $\boldsymbol{g}$. Полагая в (26), (27) $\boldsymbol{f}_i = \boldsymbol{g}$, $i = 1, \ldots, N$, получим

$$\frac{\partial(\rho\boldsymbol{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}) + \nabla p = \operatorname{div}\mathbb{S} + \rho\boldsymbol{g}, \tag{29}$$

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathcal{E}\boldsymbol{u}) + \operatorname{div}(\boldsymbol{q} - \mathbb{S}\boldsymbol{u} + p\boldsymbol{u}) = \rho\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{u}. \tag{30}$$

Система (28)–(30) является полным аналогом системы уравнений Навье-Стокса движений однокомпонентной вязкой сжимаемой среды.

Рассмотрим еще одну модель динамики вязких сжимаемых многокомпонентных сред, состоящую из следующей системы уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{v}) = 0, \quad i = 1, \dots, N, \tag{31}$$

$$\frac{\partial(\rho_i \boldsymbol{u}_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}_i) + \beta_i \nabla p = \operatorname{div} \mathbb{S}_i + \rho_i \boldsymbol{f}_i, \; i = 1, \dots, N, \tag{32}$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathcal{E} \boldsymbol{v}) + \left(\boldsymbol{q} - \sum_{i=1}^{N} \mathbb{S}_i \boldsymbol{u}_i + p \boldsymbol{v} \right) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{u}_i + \rho g. \tag{33}$$

Здесь $\rho_i \geqslant 0$ — плотность i-й компоненты; $\boldsymbol{u}_i$ — скорость i-й компоненты; $\boldsymbol{v} = \sum\limits_{i=1}^{N} \beta_i \boldsymbol{u}_i$ — средневзвешенная скорость среды, где $\beta_i = \mathrm{const} \in (0, 1)$, $\sum\limits_{j=1}^{N} \beta_j = 1$; $p = \sum\limits_{i=1}^{N} p_i$ — суммарное давление;

$\mathbb{S}_i = \sum\limits_{j=1}^{N} \Big(\lambda_{ij} (\mathrm{div} \boldsymbol{u}_j) \mathbb{I} + 2\mu_{ij} \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_j) \Big)$ — вязкая часть тензора напряжений в i-й компоненте, где коэффициенты вязкостей λ_{ij} и μ_{ij} удовлетворяют условиям (5); $\boldsymbol{f}_i$ — плотность внешних массовых сил, действующих из внешней среды на i-ю компоненту; $\mathcal{E} = \sum\limits_{i=1}^{N} \mathcal{E}_i$ — суммарная полная энергия, где $\mathcal{E}_i = \dfrac{\rho_i |\boldsymbol{u}_i|^2}{2} + \rho_i e_i$ — полная энергия i-й компоненты, e_i — внутренняя удельная энергия i-й компоненты; $\boldsymbol{q} = \sum\limits_{i=1}^{N} \boldsymbol{q}_i$ — суммарный тепловой поток, где $\boldsymbol{q}_i = -k_i(\theta)\nabla\theta$ — тепловой поток внутри i-й компоненты, k_i — внутренняя теплопроводность i-й компоненты; $\rho = \sum\limits_{i=1}^{N} \rho_i$ — суммарная плотность; g — плотность тепловых источников внешней среды.

Модель, описываемая уравнениями (31)–(33) является так называемой подмоделью многоскоростной однотемпературной модели динамики взяких сжимаемых многокомпонентных сред при следующих предположениях:

1. скорости $\boldsymbol{u}_i$ близки друг к другу[11, 12] (т. е. к средневзвешенной скорости $\boldsymbol{v}$ всей среды);
2. давления p_i близки к $\beta_i p$[13,14, 15, 16].

В рамках приведенных предположений движение многокомпонентной среды в значительной степени характеризуется усредненными и / или суммарными характеристиками (скоростью $\boldsymbol{v}$, плотностью ρ, давлением p, температурой θ), однако нас интересуют также и отдельные плотности ρ_i и скорости $\boldsymbol{u}_i$ компонент.

---

[11] Gomez-Constante J.P., Pagilla P.R., Rajagopal K.R. A thermomechanical and photochemical description of the phase change process in roll-to-roll nanoimprinting lithography. International Journal of Engineering Science, 2021, V. 169, Article 103564.

[12] Kolotilov V. A., Fomin V. M. Two methods of mathematical formulation of heterogeneous media in problems of shock wave loading. AIP Conference Proceedings 2027, 2018, Article 030144.

[13] Surana K.S., Powell M., Reddy J.N. A simple mixture theory for ν Newtonian and generalized Newtonian constituents. Continuum Mechanics and Thermodynamics, 2012, V. 26, № 1, P. 33–65.

[14] Папин А.А. Краевые задачи двухфазной фильтрации. Изд-во АлтГУ, Барнаул, 2009.

[15] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. Наука, Москва, 1987.

[16] Рахматулин Х. А. Основы газовой динамики взаимопроникающих движений сплошных сред. Прикладная математика и механика, 1956, Т. 20, № 2, С. 184-195.

Уравнения (31)–(33) допускают эквивалентную запись

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho_i + \rho_i \mathrm{div} \boldsymbol{v} = 0, \quad i = 1, \ldots, N,$$

$$\rho_i \frac{\partial \boldsymbol{u}_i}{\partial t} + \rho_i (\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i)^* \boldsymbol{v} + \beta_i \nabla p = \mathrm{div}\, \mathbb{S}_i + \rho_i \boldsymbol{f}_i, \quad i = 1, \ldots, N,$$

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\rho_i \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{|\boldsymbol{u}_i|^2}{2} + e_i \right) + \rho_i \boldsymbol{v} \cdot \nabla \left(\frac{|\boldsymbol{u}_i|^2}{2} + e_i \right) \right) +$$

$$+ \mathrm{div} \left(\boldsymbol{q} - \sum_{i=1}^{N} \mathbb{S}_i \boldsymbol{u}_i + p \boldsymbol{v} \right) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{u}_i + \rho g,$$

причем $(\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i)^* \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{u}_i$. Такая недивергентная форма записи позволяет увидеть общий для всех уравнений системы оператор материальной производной $\dfrac{d}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla$.

Из (31) и (32) вытекает уравнение баланса кинетической энергии для каждой компоненты

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho_i|\boldsymbol{u}_i|^2}{2}\right)+\operatorname{div}\left(\frac{\rho_i|\boldsymbol{u}_i|^2}{2}\boldsymbol{v}\right)+\beta_i\boldsymbol{u}_i\cdot\nabla p= \tag{34}$$
$$=\boldsymbol{u}_i\cdot\operatorname{div}\mathbb{S}_i+\rho_i\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{f}_i,\quad i=1,\ldots,N.$$

С учетом этого факта уравнение (33) (для полной энергии) можно записать в следующей эквивалентной форме (для внутренней энергии):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i=1}^{N}\rho_i e_i\right)+\operatorname{div}\left(\sum_{i=1}^{N}\rho_i e_i\boldsymbol{v}\right)+p\operatorname{div}\boldsymbol{v}+\operatorname{div}\boldsymbol{q}= \tag{35}$$
$$=\sum_{i=1}^{N}\mathbb{S}_i:\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i)+\rho g.$$

Если привлечь соотношение Гиббса для каждой компоненты (10), то уравнение (33)=(35) можно записать в следующей эквивалентной форме (для энтропии):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i=1}^{N}\rho_i s_i\right)+\operatorname{div}\left(\sum_{i=1}^{N}\rho_i s_i \boldsymbol{v}\right)+\operatorname{div}\left(\frac{\boldsymbol{q}}{\theta}\right)=$$
$$=\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{N}\mathbb{S}_i:\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i)-\frac{\boldsymbol{q}\cdot\nabla\theta}{\theta^2}+\frac{\rho g}{\theta}. \tag{36}$$

Из (36) и условий $\boldsymbol{u_i}|_{\partial\Omega}=0$, $i=1,\ldots,N$, $\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}|_{\partial\Omega}=0$, получаем (см. обозначение (16))

$$\frac{dS}{dt}=\int\limits_{\Omega}\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{N}\mathbb{S}_i:\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i)d\boldsymbol{x}+\int\limits_{\Omega}\frac{k(\theta)|\nabla\theta|^2}{\theta^2}d\boldsymbol{x}+\int\limits_{\Omega}\frac{\rho g}{\theta}d\boldsymbol{x}, \tag{37}$$

где $k(\theta)=\sum\limits_{i=1}^{N}k_i(\theta)$, откуда следует, что общая энтропия системы не убывает со временем, если $k\geqslant 0$, $g\geqslant 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{N}\mathbb{S}_i:\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i)\geqslant 0$. Последнее неравенство выполняется ввиду условий на матрицы вязкостей, перечисленных в (5).

В некоторых случаях, с позиций математического анализа, удобнее вместо N уравнений (31) рассматривать одно уравнение вида

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho \boldsymbol{v}\right) = 0, \tag{38}$$

если, например, дополнительно предположить, что $\rho_i = \alpha_i \rho$, $\alpha_i = \mathrm{const} \in (0, 1)$, $i = 1, \ldots, N$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$, т. е. что концентрации компонент постоянны.

Глобальные результаты для сжимаемых уравнений Навье-Стокса динамики однокомпонентных сред $(n > 1)$

- Lions P.L. (1993, 1998, 1999): $p = \rho^\gamma$, глобальная слабая разрешимость нестационарных уравнений для достаточно больших γ.
- Feireisl, Matusu-Necasova, Petzeltova, Straskraba, Novotny (1998, 1999, 2001): дальнейший прогресс, $\gamma \searrow 3/2$.
- Lions P.L. (1998), Novotny, Straskraba (2004), Plotnikov, Sokolowski (2007), Frehse, Steinhauer, Weigant (2010, 2012), Plotnikov, Weigant (2015): глобальная слабая разрешимость стационарных уравнений с $p = \rho^\gamma$, $\gamma \searrow 1$.
- Вайгант, Кажихов (1995): существование глобальных гладких решений двумерных уравнений, $\lambda(\rho) = \rho^\beta$, $\beta > 3$, $p = \rho^\gamma$, $\gamma \geqslant 0$.
- Feireisl (2004), Feireisl, Novotny (2009): глобальная разрешимость нестационарных уравнений с учетом теплопроводности, $p = p_e(\rho) + \theta p_\theta(\rho)$ и $p = p_M(\rho, \theta) + \dfrac{a}{3}\theta^4$, $a > 0$ соотвественно, диссипативные решения.
- Mucha, Pokorny (2009, 2010), Novotny, Pokorny (2011): существование глобальных слабых решений стационарных теплопроводных уравнений, $p = \rho^\gamma + \rho\theta$.

Основная трудность переноса результатов многомерных уравнений Навье–Стокса динамики однокомпонентных сред на многокомпонентный случай $(n > 1)$

Автоматический перенос результатов теории многомерных сжимаемых уравнений Навье–Стокса на многоскоростные модели динамики многокомпонентных сред возможен, если

$$\operatorname{div}\operatorname{div}\mathbb{S}_i = \mathrm{const}_i \cdot \Delta\operatorname{div}\boldsymbol{u}_i, \quad i = 1, \ldots, N,$$

но для моделей с недиагональными матрицами вязкостей

$$\begin{bmatrix} \operatorname{div}\operatorname{div}\mathbb{S}_1 \\ \operatorname{div}\operatorname{div}\mathbb{S}_2 \\ \vdots \\ \operatorname{div}\operatorname{div}\mathbb{S}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_{11} & \nu_{12} & \ldots & \nu_{1N} \\ \nu_{21} & \nu_{22} & \ldots & \nu_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \nu_{N1} & \nu_{N2} & \ldots & \nu_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\operatorname{div}\boldsymbol{u}_1 \\ \Delta\operatorname{div}\boldsymbol{u}_2 \\ \ldots \\ \Delta\operatorname{div}\boldsymbol{u}_N \end{bmatrix}.$$

Математические результаты для многоскоростных моделей динамики сжимаемых многокомпонентных сред $(n > 1)$

- Frehse, Goj, Malek (2002, 2005): стационарная система Стокса без конвективных слагаемых, задача Коши, слабая разрешимость, единственность при дополнительных упрощениях.
- Frehse, Weigant (2007): квазистационарная система без конвективных слагаемых, ограниченная область, специальные граничные условия $(\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{n} = 0, \quad \boldsymbol{n} \times \operatorname{curl} \boldsymbol{u}_i = 0)$, $p_i = \rho_i(\rho_1 + \rho_2)^{\gamma-1}$, существование и единственность классического решения.
- Кучер, Прокудин (2011): стационарная система, ограниченная область, $p_i = \rho_i^\gamma$, треугольная матрица $\boldsymbol{N}$, существование слабых решений.
- Кучер, Мамонтов, Прокудин (2012): стационарная теплопроводная система, многотемпературная модель, нет диссипативных слагаемых в уравнениях энергии, ограниченная область, $p_i = \rho_i^\gamma + \rho_i\theta_i$, $\gamma > 3$, треугольная матрица $\boldsymbol{N}$, слабая разрешимость.
- Кучер, Жалнина (2015): стационарная система, неоднородные краевые условия, $p_i = p_i(\rho_i)$, ограничения на матрицы вязкостей, существование сильного локального решения.

Глобальные результаты для сжимаемых уравнений Навье-Стокса динамики однокомпонентных сред $(n = 1)$

- Канель (1968)
- Itaya (1974, 1976)
- Tani (1974)
- Кажихов (1975, 1976, 1979, 1982)
- Кажихов, Шелухин (1977)
- Шелухин (1979)
- Кажихов, Николаев (1979)
- Белов (1981–1983, 1994)
- Николаев (1983)
- Амосов (1985)
- Амосов, Злотник (1988, 1992, 1994-1997)
- Вайгант, Папин (1987)
- Вайгант (1990–1992)
- Злотник (1992, 1994)
- Амосов, Казенкин (1995)

Математические результаты для многоскоростных моделей динамики сжимаемых многокомпонентных сред $(n = 1)$

- Кажихов, Петров (1978): нестационарная система, баротропный случай, глобальное классическое решение, диагональная матрица вязкостей.
- Петров (1982): нестационарная теплопроводная многотемпературная модель, глобальное классическое решение, диагональная матрица вязкостей.
- Злотник (1995): нестационарная баротропная модель, равномерные оценки и стабилизация решений, диагональная матрица вязкостей.
- Bresch, Huang, Li (2012): нестационарная двухкомпонентная система, $p_1(\rho_1) = p_2(\rho_2)$, глобальное слабое решение, диагональная матрица вязкостей.
- Папин (2006, 2009, 2010, 2014): нестационарные уравнения движения двухфазных смесей, глобальное классическое решение, диагональная матрица вязкостей.

Численные результаты для многоскоростных моделей динамики многокомпонентных сред с недиагональными матрицами вязкостей

- Al-Sharif, Chamniprasart, Rajagopal, Szeri (1993)
- Wang, Szeri, Rajagopal (1993)
- Szeri (1996)
- Benner, Sadeghi, Hoeprich, Frank (2006)
- Surana, Powell, Reddy (2012)
- Lo, Yang, Lin (2013)

Простейшие потоки многокомпонентных сред с недиагональными матрицами вязкостей (течения Пуазейля, течения Куэта в каналах с различной формой сечений) рассмотрены в работах

- Beevers, Craine (1982)
- Baris (2002, 2005, 2012, 2013)
- Baris, Dokuz (2002, 2005)
- Massoudi (2008)

Р азрешимость стационарной краевой задачи для многомерных уравнений политропного движения вязких сжимаемых многокомпонентных сред

Пусть N вязких сжимаемых компонент занимает ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Искомыми являются следующие величины, описываемые $N+1$ (с учетом размерностей векторов — $3N+1$) функциями, определенными в Ω: скалярное поле $\rho \geqslant 0$ суммарной плотности многокомпонентной среды и векторные поля скоростей $\boldsymbol{u}_i$ для каждой компоненты с номером $i = 1, \ldots, N$. Для нахождения этих величин необходимо решить одно уравнение неразрывности

$$\operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \tag{39}$$

и N векторных (состоящие из $3N$ скалярных) уравнений импульсов

$$\operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}_i) + \alpha_i \nabla p = \operatorname{div} \mathbb{S}_i + \rho_i \boldsymbol{f}_i + \boldsymbol{g}_i \text{ в } \Omega,\ i = 1, \ldots, N. \tag{40}$$

В этих уравнениях использованы следующие обозначения:

$$\rho_i = \alpha_i \rho, \qquad i = 1, \ldots, N \tag{41}$$

— плотности компонент, где концентрации составляющих α_i являются известными постоянными такими, что $0 < \alpha_i < 1$, $i = 1, \ldots, N$, $\sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$;

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \boldsymbol{u}_i \tag{42}$$

— средневзвешенная скорость среды; $\boldsymbol{f}_i$ и $\boldsymbol{g}_i$ — известные внешние силы; p — суммарное давление, для него предполагается выполнение определяющего соотношения (политропное уравнение состояния)

$$p = K\rho^{\gamma} \tag{43}$$

с некоторыми постоянными $K > 0$ и $\gamma > \dfrac{3}{2}$; наконец, тензоры вязких напряжений $\mathbb{S}_i$ определяются равенствами $(i, j = 1, \ldots, N)$

$$\mathbb{S}_i = \sum_{j=1}^{N} \widehat{\mathbb{S}}_{ij}, \quad \widehat{\mathbb{S}}_{ij} = 2\mu_{ij}\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_j) + \lambda_{ij}(\operatorname{div} \boldsymbol{u}_j)\mathbb{I}, \tag{44}$$

где заданные постоянные коэффициенты вязкостей λ_{ij} и μ_{ij} образуют соответственно матрицы $\boldsymbol{\Lambda}$ и $\mathbf{M}$, такие что

$$\mathbf{M} > 0, \quad \mathbf{N} = \{\nu_{ij}\}_{i,j=1}^{N} := \boldsymbol{\Lambda} + 2\mathbf{M} > 0. \tag{45}$$

К уравнениям (39), (40) добавляются следующие краевые условия для скоростей:

$$\boldsymbol{u}_i|_{\partial\Omega} = 0, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{46}$$

(т. е. здесь граница $\partial\Omega$ области Ω предполагается неподвижной твердой стенкой), а также дополнительное условие для суммарной плотности, которое стандартно примем в виде

$$\int\limits_{\Omega} \rho \, d\boldsymbol{x} = m, \tag{47}$$

где положительная постоянная m выражает полную массу среды и предполагается известной.

Тем самым, предмет нашего исследования сформулирован — это краевая задача (39), (40), (46), (47) (см. (41)–(45)).

Введем следующие обозначения:

$$\zeta_1(\gamma) = \begin{cases} \dfrac{6(\gamma-1)}{5\gamma-7}, & \text{если} \quad \dfrac{3}{2} < \gamma \leqslant \dfrac{5}{3}, \\ \dfrac{6}{3\gamma-5}, & \text{если} \quad \dfrac{5}{3} < \gamma \leqslant 3, \\ \dfrac{6\gamma}{5\gamma-3}, & \text{если} \quad \gamma > 3, \end{cases} \tag{48}$$

$$\zeta_2(\gamma) = \begin{cases} 3(\gamma-1), & \text{если} \quad \dfrac{3}{2} < \gamma < 3, \\ 2\gamma, & \text{если} \quad \gamma \geqslant 3. \end{cases}$$

Отметим, что $\zeta_1(\gamma) \in (1, +\infty)$, $\zeta_2(\gamma) \in (\gamma, +\infty)$.

На внешние силы наложим требования

$$\boldsymbol{f}_i \in L_{\sigma_1}(\Omega), \quad \sigma_1 > \zeta_1(\gamma), \quad \boldsymbol{g}_i \in L_{\frac{6}{5}}(\Omega), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{49}$$

$$\text{причем } \boldsymbol{f}_i = 0, \quad \text{если} \quad \frac{3}{2} < \gamma \leqslant \frac{5}{3}, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{50}$$

Определение 1. Пусть в уравнениях (40) тензоры вязких напряжений заданы равенствами (44), коэффициенты вязкости удовлетворяют ограничениям (45), давление задано равенством (43), а входные данные задачи (39), (40), (46), (47) удовлетворяют условиям (49) и (50) (см. также обозначения (41) и (42)). Слабым решением задачи (39), (40), (46), (47) называется набор функций

$$\rho \in L_{\zeta_2(\gamma)}(\Omega), \quad \rho \geqslant 0, \quad \boldsymbol{u}_i \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \quad i = 1, \ldots, N,$$

удовлетворяющих (47) и следующим условиям:

1) Плотность ρ удовлетворяет уравнению неразрывности (39) в том смысле, что для любого $\psi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ выполняется интегральное тождество

$$\int\limits_{\Omega} \rho \boldsymbol{v} \cdot \nabla \psi \, d\boldsymbol{x} = 0;$$

2) Скорости $\boldsymbol{u}_i$, $i = 1, \ldots, N$ удовлетворяют уравнениям импульсов (40) (с определяющими уравнениями (44)) в том смысле, что для любых векторных полей $\boldsymbol{\varphi}_i \in C_0^\infty(\Omega)$ выполнены интегральные тождества

$$\int\limits_\Omega \Big((\rho_i \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}_i) : (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}_i) + \alpha_i p(\rho) \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_i - \mathbb{S}_i : (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}_i) +$$

$$+ \rho_i \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}_i + \boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}_i \Big)\, d\boldsymbol{x} = 0, \quad i = 1, \ldots, N$$

(краевые условия (46) выполнены автоматически — в смысле функционального класса $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$).

Теорема 2. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^2. Тогда для любых входных данных класса, описанного в Определении 1, и при оговоренных в нем условиях на параметры уравнений, существует по крайней мере одно слабое решение задачи (39), (40), (46), (47).

Слабое решение задачи (39), (40), (46), (47) получено как предел приближенных решений, а именно решений следующей краевой задачи (индексы ε и δ у величин от них зависящих пока опускаем):

$$-\varepsilon\Delta\rho + \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}) + \varepsilon\rho = \varepsilon\frac{m}{|\Omega|}, \tag{51}$$

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{N} L_{ij}\boldsymbol{u}_j + \frac{\varepsilon}{2}\rho_i\boldsymbol{u}_i + \frac{\varepsilon}{2}\frac{m}{|\Omega|}\alpha_i\boldsymbol{u}_i + \frac{1}{2}\rho_i(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_i + \\ + \frac{1}{2}\operatorname{div}(\rho_i\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}_i) + \alpha_i\nabla\widetilde{p}(\rho) = \rho_i\widetilde{\boldsymbol{f}}_i + \widetilde{\boldsymbol{g}}_i, \quad i = 1,\ldots,N,\end{gathered} \tag{52}$$

$$\boldsymbol{u}_i|_{\partial\Omega} = 0, \quad i = 1,\ldots,N, \qquad \nabla\rho\cdot\boldsymbol{n}|_{\partial\Omega} = 0. \tag{53}$$

Здесь приняты следующие обозначения: $L_{ij} = -(\lambda_{ij} + \mu_{ij})\nabla\operatorname{div} - \mu_{ij}\Delta$, $i,j = 1,\ldots,N$ (отметим, что $\operatorname{div}\mathbb{S}_i = -\sum\limits_{j=1}^{N} L_{ij}\boldsymbol{u}_j$, $i = 1,\ldots,N$); $\widetilde{p}(s) = p(s) + \delta(s^\beta + s^2)$; $\varepsilon,\delta \in (0,1]$ — малые параметры (которые впоследствии будут устремлены к нулю), а показатель

$$\beta > \max\{\gamma, 3\} \tag{54}$$

выбран произвольно и останется фиксированным;

наконец, регулярные векторные поля $\widetilde{\boldsymbol{f}}_i,\ \widetilde{\boldsymbol{g}}_i \in C(\overline{\Omega})$, $i = 1, \ldots, N$, подобраны так, чтобы

$$\|\widetilde{\boldsymbol{f}}_i\|_{L_{\sigma_1}(\Omega)} \leqslant 2\|\boldsymbol{f}_i\|_{L_{\sigma_1}(\Omega)}, \quad \|\widetilde{\boldsymbol{g}}_i\|_{L_{\frac{6}{5}}(\Omega)} \leqslant 2\|\boldsymbol{g}_i\|_{L_{\frac{6}{5}}(\Omega)}, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{55}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{f}}_i \underset{\varepsilon\to+0}{\longrightarrow} \boldsymbol{f}_i \quad \text{в} \quad L_{\sigma_1}(\Omega), \quad \widetilde{\boldsymbol{g}}_i \underset{\varepsilon\to+0}{\longrightarrow} \boldsymbol{g}_i \quad \text{в} \quad L_{\frac{6}{5}}(\Omega), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{56}$$

Как видно, задача (51)–(53) представляет собой не что иное как равномерно эллиптическую регуляризацию задачи (39), (40), (46), (47) плюс дополнительные слагаемые и граничные условия, призванные сохранить полезные свойства исходной задачи, например, интегральную ортогональность конвективных членов скоростям.

Определение 3. Сильным решением задачи (51)–(53) называется совокупность, состоящая из неотрицательной функции $\rho \in W_p^2(\Omega)$ (где $p > 3$) и векторных полей $\boldsymbol{u}_i \in W_p^2(\Omega)$, $i = 1, \ldots, N$ таких, что уравнения (51), (52) выполнены п. в. в Ω, и п. в. на $\partial\Omega$ верны краевые условия (53).

Теорема 4. В условиях Теоремы 2 при любых $\varepsilon, \delta \in (0, 1]$ и β, удовлетворяющих (54), и при любых $\widetilde{\boldsymbol{f}}_i,\ \widetilde{\boldsymbol{g}}_i \in C(\overline{\Omega})$, $i = 1, \ldots, N$, краевая задача (51)–(53) имеет по крайней мере одно сильное решение.

Предельный переход по малому параметру $\varepsilon \to +0$ совершается на основании оценок, равномерных по этому параметру:

$$\|\boldsymbol{u}_i^\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} + \sqrt{\varepsilon}\,\|\sqrt{\rho^\varepsilon}\boldsymbol{u}_i^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} + \sqrt{\varepsilon}\,\|\nabla\rho^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C, \tag{57}$$

$$\|\rho^\varepsilon\|_{L_{2\beta}(\Omega)} \leqslant C. \tag{58}$$

В силу (58) и (57) из семейства ρ^ε, $\boldsymbol{u}_i^\varepsilon$, $i = 1, \ldots, N$, $\varepsilon \in (0, 1]$, может быть выделена последовательность (которую обозначим так же), для которой при $\varepsilon \to +0$ имеют место сходимости

$$\rho^\varepsilon \to \rho \ \text{ слабо в } \ L_{2\beta}(\Omega), \tag{59}$$

$$\boldsymbol{u}_i^\varepsilon \to \boldsymbol{u}_i \ \text{ слабо в } \ \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{60}$$

$$\varepsilon\nabla\rho^\varepsilon \to 0 \ \text{ сильно в } \ L_2(\Omega), \tag{61}$$

$$(\rho^\varepsilon)^\beta \to \overline{\rho^\beta}, \ \ \widetilde{p}(\rho^\varepsilon) \to \overline{\widetilde{p}(\rho)} \ \text{ слабо в } \ L_2(\Omega), \ \ \overline{\rho^\beta} \geqslant 0 \ \text{ п. в. в } \ \Omega, \tag{62}$$

$$(\rho^\varepsilon)^\gamma \to \overline{\rho^\gamma} \ \text{ слабо в } \ L_{\frac{2\beta}{\gamma}}(\Omega), \ \ \overline{\rho^\gamma} \geqslant 0 \ \text{ п. в. в } \ \Omega,$$

где $\overline{\rho^\beta}$, $\overline{\rho^\gamma}$ и $\overline{\widetilde{p}(\rho)}$ обозначают слабые пределы последовательностей $(\rho^\varepsilon)^\beta$, $(\rho^\varepsilon)^\gamma$ и $\widetilde{p}(\rho^\varepsilon)$ в соответствующих пространствах.

Заметим, что из (60) сразу следует, что $\boldsymbol{u}_i^\varepsilon \to \boldsymbol{u}_i$ сильно в $L_p(\Omega)$ при всех $p \in [1, 6)$, $i = 1, \ldots, N$.

Таким образом, получаем, что предельные функции ρ, $\boldsymbol{u}_i$, $i = 1, \ldots, N$, удовлетворяют уравнению

$$\int\limits_{\Omega} \rho \boldsymbol{v} \cdot \nabla \psi \, d\boldsymbol{x} = 0 \qquad \forall\, \psi \in C^{\infty}(\overline{\Omega}) \tag{63}$$

— это слабая форма уравнения $\operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0$, где $\boldsymbol{v} = \sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i \boldsymbol{u}_i$, уравнениям

$$\int\limits_{\Omega} \Big((\rho_i \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}_i) : (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}_i) + \alpha_i \overline{\widetilde{p}(\rho)} \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_i + \rho_i \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}_i + \tag{64}$$

$$+ \boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}_i \Big) \, d\boldsymbol{x} = \int\limits_{\Omega} \mathbb{S}_i : (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}_i) \, d\boldsymbol{x} \qquad \forall\, \boldsymbol{\varphi}_i \in C_0^{\infty}(\Omega), \quad i = 1, \ldots, N$$

— это слабая форма уравнений импульсов

$$\operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}_i) + \alpha_i \nabla p(\rho) = \operatorname{div} \mathbb{S}_i + \rho_i \boldsymbol{f}_i + \boldsymbol{g}_i, \; i = 1, \ldots, N,$$

но в которых вместо $p(\rho)$ пока стоит $\overline{\widetilde{p}(\rho)}$), где $\rho_i = \alpha_i \rho$, $i = 1, \ldots, N$, Для завершения предельного перехода по $\varepsilon \to +0$ осталось доказать, что

$$\overline{\widetilde{p}(\rho)} = \widetilde{p}(\rho) \text{ п. в. в } \Omega. \tag{65}$$

Для этого рассмотрим для всех $i = 1, \ldots, N$ так называемые эффективные вязкие потоки компонент $\alpha_i \widetilde{p}(\rho) - \sum\limits_{j=1}^{N} \nu_{ij} \mathrm{div} \boldsymbol{u}_j$, соответствующие величины для регуляризованной задачи $\alpha_i \widetilde{p}(\rho^\varepsilon) - \sum\limits_{j=1}^{N} \nu_{ij} \mathrm{div} \boldsymbol{u}_j^\varepsilon$, и их слабые пределы в $L_2(\Omega)$ — $\alpha_i \overline{\widetilde{p}(\rho)} - \sum\limits_{j=1}^{N} \nu_{ij} \mathrm{div} \boldsymbol{u}_j$.

Соотношения для эффективных вязких потоков компонент смеси:

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{\Omega} \tau \rho^\varepsilon \left(\alpha_i \widetilde{p}(\rho^\varepsilon) - \sum_{k=1}^{N} \nu_{ik} \mathrm{div} \boldsymbol{u}_k^\varepsilon \right) d\boldsymbol{x} =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \tau \rho \left(\alpha_i \overline{\widetilde{p}(\rho)} - \sum_{k=1}^{N} \nu_{ik} \mathrm{div} \boldsymbol{u}_k \right) d\boldsymbol{x}, \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{66}$$

Из (66) следует равенство

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_\Omega \tau \rho^\varepsilon \left(\nu_0 \widetilde{p}(\rho^\varepsilon) - \mathrm{div} \boldsymbol{v}^\varepsilon \right) d\boldsymbol{x} = \int\limits_\Omega \tau \rho \left(\nu_0 \overline{\widetilde{p}(\rho)} - \mathrm{div} \boldsymbol{v} \right) d\boldsymbol{x}, \tag{67}$$

где $\nu_0 = (\mathbf{N}^{-1}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) > 0$, а $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)^*$.

Ввиду произвольности τ, равенство (67) выражает соотношение

$$\nu_0 \overline{\rho \widetilde{p}(\rho)} - \overline{\rho \mathrm{div} \boldsymbol{v}} = \nu_0 \rho \overline{\widetilde{p}(\rho)} - \rho \mathrm{div} \boldsymbol{v} \quad \text{п. в. в } \ \Omega. \tag{68}$$

Как известно из теории уравнений переноса и Навье–Стокса, все решения уравнения неразрывности являются так называемыми ренормализованными решениями, т. е. удовлетворяют в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ ренормализованным уравнениям

$$\mathrm{div}(\widetilde{G}(\rho)\boldsymbol{v}) + (\rho \widetilde{G}'(\rho) - \widetilde{G}(\rho)) \mathrm{div} \boldsymbol{v} = 0,$$

формально получающимся из уравнения неразрывности умножением на $\widetilde{G}'(\rho)$ для всех функций $\widetilde{G}$ определенного класса.

Отсюда при $\widetilde{G}(s) = s \ln s$ следует равенство

$$\int\limits_\Omega \rho \, \mathrm{div} \boldsymbol{v} \, d\boldsymbol{x} = 0.$$

С другой стороны, из приближенного уравнения неразрывности следует неравенство

$$\int\limits_{\Omega} \overline{\rho\,\mathrm{div}\boldsymbol{v}}\,d\boldsymbol{x} \leqslant 0.$$

Комбинируя последние два неравенства, приходим к соотношению

$$\int\limits_{\Omega} \left(\overline{\rho\,\mathrm{div}\boldsymbol{v}} - \rho\,\mathrm{div}\boldsymbol{v}\right) d\boldsymbol{x} \leqslant 0. \tag{69}$$

Ввиду монотонности функции $\widetilde{p}(\cdot)$ ($\widetilde{p}'(s) = K\gamma s^{\gamma-1} + \delta\beta s^{\beta-1} + 2\delta s$), верно поточечное неравенство $(\rho_\varepsilon - \rho)(\widetilde{p}(\rho^\varepsilon) - \widetilde{p}(\rho)) \geqslant 0$, благодаря которому выводим

$$\liminf_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{B} (\widetilde{p}(\rho^\varepsilon)\rho^\varepsilon - \widetilde{p}(\rho^\varepsilon)\rho)\,d\boldsymbol{x} =$$

$$= \liminf_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{B} (\widetilde{p}(\rho^\varepsilon) - \widetilde{p}(\rho))(\rho^\varepsilon - \rho)\,d\boldsymbol{x} + \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{B} \widetilde{p}(\rho)(\rho^\varepsilon - \rho)\,d\boldsymbol{x} \geqslant 0,$$

где B — произвольный шар в Ω, поэтому

$$\overline{\widetilde{p}(\rho)\rho} \geqslant \overline{\widetilde{p}(\rho)}\rho \quad \text{п. в. в} \quad \Omega.$$

Из (68) тогда приходим к неравенству

$$\overline{\rho \mathrm{div} \boldsymbol{v}} - \rho \mathrm{div} \boldsymbol{v} \geqslant 0 \quad \text{п. в. в} \quad \Omega,$$

а ввиду (69) это означает что

$$\overline{\rho \mathrm{div} \boldsymbol{v}} - \rho \mathrm{div} \boldsymbol{v} = 0 \quad \text{п. в. в} \quad \Omega,$$

но тогда из (68) получаем

$$\overline{\widetilde{p}(\rho)\rho} = \overline{\widetilde{p}(\rho)}\rho \quad \text{п. в. в} \quad \Omega.$$

Отсюда выводится требуемое:

$$\overline{\widetilde{p}(\rho)} = \widetilde{p}(\rho) \quad \text{п. в. в} \quad \Omega.$$

Процедура предельного перехода по $\delta \to +0$ в целом опирается на те же идеи, которые были использованы выше и отличается уровнем технических сложностей.

Существование решений многомерных стационарных уравнений теплопроводных течений вязких сжимаемых многокомпонентных сред

Предположим, что среда, состоящая из $N \geqslant 2$ вязких сжимаемых теплопроводных компонент занимает ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ пространства точек $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ с границей $\partial\Omega$. Искомыми являются следующие физические величины, описываемые $N + 2$ (с учетом размерностей векторов — $3N + 2$) функциями, определенными в Ω: векторные поля скоростей $\boldsymbol{u}_i(\boldsymbol{x}) = (u_{i1}(\boldsymbol{x}), u_{i2}(\boldsymbol{x}), u_{i3}(\boldsymbol{x}))$ для каждой компоненты с номером $i = 1, \ldots, N$, а также скалярное поле плотности $\rho(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$ и скалярное поле температуры среды $\theta(\boldsymbol{x}) > 0$. Для нахождения этих величин необходимо в области Ω решить одно уравнение неразрывности

$$\operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0, \tag{70}$$

N векторных (т. е. $3N$ скалярных) уравнений импульсов

$$\sum_{j=1}^{N} L_{ij} \boldsymbol{u}_j + \operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}_i) + \beta_i \nabla p = \rho_i \boldsymbol{f}_i, \quad i = 1, \ldots, N \tag{71}$$

и одно уравнение для полной энергии среды

$$\operatorname{div}\left(\mathcal{E}\boldsymbol{v} + p\boldsymbol{v} - \sum_{i=1}^{N} \mathbb{S}_i \boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{q}\right) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{u}_i, \tag{72}$$

где $\boldsymbol{v} = \sum\limits_{j=1}^{N} \beta_j \boldsymbol{u}_j$ — средневзвешенная скорость среды, $\beta_i = \mathrm{const} \in (0,1)$, $\sum\limits_{j=1}^{N} \beta_j = 1$; $L_{ij} = -(\lambda_{ij} + \mu_{ij})\nabla\mathrm{div} - \mu_{ij}\Delta$ — операторы Ламе, λ_{ij}, μ_{ij} — постоянные коэффициенты вязкостей, удовлетворяющие ограничениям, оговоренным далее; $\rho_i = \alpha_i \rho$ — плотность i-й компоненты, $\alpha_i = \mathrm{const} \in (0,1)$, $\sum\limits_{j=1}^{N} \alpha_j = 1$; p — давление в многокомпонентной среде, для него предполагается выполнение определяющего соотношения $p = \rho^\gamma + \rho\theta$, в котором постоянный показатель γ предполагается достаточно большим (точные требования будут приведены ниже); $\boldsymbol{f}_i = (f_{i1}(\boldsymbol{x}), f_{i2}(\boldsymbol{x}), f_{i3}(\boldsymbol{x}))$ — известные внешние массовые силы; $\mathcal{E} = \sum\limits_{j=1}^{N} \mathcal{E}_j$ — полная энергия среды,

$\mathcal{E}_i$ — полная энергия i-й компоненты, определяемая как $\mathcal{E}_i = \dfrac{\rho_i|\boldsymbol{u}_i|^2}{2} + \rho_i e_i$, причем внутренняя удельная энергия i-й компоненты e_i задается определяющим уравнением $e_i = \dfrac{1}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1} + \theta$; $\mathbb{S}_i$ — вязкая часть тензора напряжений в i-й компоненте, заданная определяющим уравнением $\mathbb{S}_i = \sum\limits_{j=1}^{N}(\lambda_{ij}\,(\mathrm{div}\boldsymbol{u}_j)\mathbb{I} + 2\mu_{ij}\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_j))$; наконец, $\boldsymbol{q}$ — тепловой поток, определяемый законом Фурье $\boldsymbol{q} = -k(\theta)\nabla\theta$, с коэффициентом теплопроводности, принятым в виде $k(\theta) = 1 + \theta^m$ (постоянная m будет конкретизирована ниже).

К уравнениям (70)–(72) добавляются краевые условия для скоростей и температуры:

$$\boldsymbol{u}_i = 0 \text{ на } \partial\Omega,\ \ i = 1, \ldots, N, \tag{73}$$

(т. е. граница $\partial\Omega$ области Ω предполагается неподвижной твердой стенкой),

$$k(\theta)\nabla\theta\cdot\boldsymbol{n} + L(\theta)(\theta - \widehat{\theta}) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \tag{74}$$

(т. е. происходит теплообмен с внешней средой, обладающей известным распределением температуры $\widehat{\theta} > 0$), а также дополнительное условие для плотности, которое стандартно принимается в виде

$$\int\limits_{\Omega} \rho \, d\boldsymbol{x} = M, \tag{75}$$

где положительная постоянная M выражает полную массу среды и предполагается известной. В условии (74) символ $\boldsymbol{n}$ обозначает единичную внешнюю нормаль к $\partial\Omega$, а коэффициент граничного теплообмена $L(\theta)$ принимается в виде $L(\theta) = 1 + \theta^{m-1}$.

Из термодинамических соображений следует, что коэффициенты вязкостей λ_{ij} и μ_{ij}, образующие соответственно матрицы вязкостей $\boldsymbol{\Lambda}$ и $\mathbf{M}$, не могут быть произвольными, а обязаны удовлетворять следующим требованиям:

$$\mathbf{M} > 0, \quad 3\boldsymbol{\Lambda} + 2\mathbf{M} \geqslant 0, \tag{76}$$

которые вместе с (73) обеспечивают выполнение неравенств

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{N} \mathbb{S}_i : \mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i) = \sum_{i,j=1}^{N} \Bigg(\Big(\lambda_{ij} + \frac{2}{3}\mu_{ij} \Big) (\mathrm{div}\boldsymbol{u}_i)(\mathrm{div}\boldsymbol{u}_j) + \\ + 2\mu_{ij} \Big(\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_i) - \frac{1}{3}(\mathrm{div}\boldsymbol{u}_i)\mathbb{I} \Big) : \Big(\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_j) - \frac{1}{3}(\mathrm{div}\boldsymbol{u}_j)\mathbb{I} \Big) \Bigg) \geqslant 0\end{gathered} \tag{77}$$

и

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int\limits_{\Omega} L_{ij} \boldsymbol{u}_j \cdot \boldsymbol{u}_i \, d\boldsymbol{x} \geqslant C \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} |\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i|^2 \, d\boldsymbol{x}. \tag{78}$$

Отметим, что из (76) следует, что матрица «полных вязкостей»

$$\mathbf{N} = \{\nu_{ij}\}_{i,j=1}^{N} := \boldsymbol{\Lambda} + 2\mathbf{M} > 0. \tag{79}$$

Определение 5. Слабым решением задачи (70)–(75) называются неотрицательная функция $\rho \in L_{2\gamma}(\Omega)$, положительная функция $\theta \in W_2^1(\Omega) \bigcap L_{3m}(\Omega) \bigcap L_{2m}(\partial\Omega)$ и векторные поля $\boldsymbol{u}_i \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $i = 1, \ldots, N$, такие, что:
1) Плотность ρ удовлетворяет уравнению неразрывности (70) в том смысле, что для любых $\psi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ выполняется интегральное тождество

$$\int\limits_{\Omega} \rho \boldsymbol{v} \cdot \nabla \psi \, d\boldsymbol{x} = 0,$$

причем выполнено условие (75);

2) Скорости $\boldsymbol{u}_i$ удовлетворяют уравнениям импульсов (71) в том смысле, что для любых векторных полей $\boldsymbol{\varphi}_i \in C_0^\infty(\Omega)$ выполнены интегральные тождества $(i = 1, \ldots, N)$

$$\sum_{j=1}^{N} \left(\mu_{ij} \int\limits_{\Omega} (\nabla \otimes \boldsymbol{u}_j) : (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}_i)\, d\boldsymbol{x} + \right.$$

$$\left. +(\lambda_{ij} + \mu_{ij}) \int\limits_{\Omega} (\mathrm{div} \boldsymbol{u}_j)(\mathrm{div} \boldsymbol{\varphi}_i)\, d\boldsymbol{x} \right) -$$

$$- \int\limits_{\Omega} (\rho_i \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}_i) : (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}_i)\, d\boldsymbol{x} - \beta_i \int\limits_{\Omega} p\, \mathrm{div} \boldsymbol{\varphi}_i\, d\boldsymbol{x} = \int\limits_{\Omega} \rho_i \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}_i\, d\boldsymbol{x},$$

(краевые условия (73) выполнены в смысле функционального класса);

3) Температура θ удовлетворяет уравнению энергии (72) и краевому условию (74) в том смысле, что для любых $\eta \in C^\infty(\overline{\Omega})$ выполнено интегральное тождество

$$-\int\limits_\Omega \mathcal{E}\boldsymbol{v}\cdot\nabla\eta\,d\boldsymbol{x} - \int\limits_\Omega p\boldsymbol{v}\cdot\nabla\eta\,d\boldsymbol{x} + \sum_{i=1}^N \int\limits_\Omega \mathbb{S}_i : (\boldsymbol{u}_i\otimes\nabla\eta)\,d\boldsymbol{x} =$$

$$= \sum_{i=1}^N \int\limits_\Omega \rho_i \boldsymbol{f}_i\cdot\boldsymbol{u}_i\eta\,d\boldsymbol{x} + \int\limits_\Omega \boldsymbol{q}\cdot\nabla\eta\,d\boldsymbol{x} - \int\limits_{\partial\Omega} L(\theta)(\theta-\widehat{\theta})\eta d\sigma.$$

Теорема 6. Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^2, матрицы вязкостей $\boldsymbol{\Lambda}$ и $\mathbf{M}$ удовлетворяют условиям (76), показатели $\gamma > 3$ и $m > \dfrac{2(6\gamma^2-7\gamma+3)}{3(2\gamma^2-5\gamma+1)}$, а остальные числовые параметры модели β_i, $\alpha_i \in (0,1)$, $i=1,\dots,N$, $\sum\limits_{j=1}^N \beta_j = 1$, $\sum\limits_{j=1}^N \alpha_j = 1$, $M>0$. Тогда для любых входных данных $\boldsymbol{f}_i\in C(\overline{\Omega})$, $i=1,\dots,N$, $\widehat{\theta}\in C^1(\partial\Omega)$, $\widehat{\theta}>0$ задача (70)–(75) имеет по крайней мере одно слабое решение.

Слабое решение задачи (70)–(75) получено как предел решений регуляризованной задачи. Регуляризованная задача формулируется так — требуется найти функции ρ^ε, θ^ε и $\boldsymbol{u}_i^\varepsilon$, $i = 1, \ldots, N$, удовлетворяющие следующим уравнениям, краевым и дополнительным условиям, содержащим параметр $\varepsilon \in (0, 1]$:

$$-\varepsilon\Delta\rho^\varepsilon + \operatorname{div}(\rho^\varepsilon \boldsymbol{v}^\varepsilon) + \varepsilon\rho^\varepsilon = \varepsilon\frac{M}{|\Omega|} \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{80}$$

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^N L_{ij}\boldsymbol{u}_j^\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}\rho_i^\varepsilon\boldsymbol{u}_i^\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}\frac{M}{|\Omega|}\alpha_i\boldsymbol{u}_i^\varepsilon + \frac{1}{2}\rho_i^\varepsilon(\boldsymbol{v}^\varepsilon\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_i^\varepsilon + \\ + \frac{1}{2}\operatorname{div}(\rho_i^\varepsilon\boldsymbol{v}^\varepsilon\otimes\boldsymbol{u}_i^\varepsilon) + \beta_i\nabla p^\varepsilon = \rho_i^\varepsilon\boldsymbol{f}_i \quad \text{в} \quad \Omega, \quad i = 1, \ldots, N,\end{gathered} \tag{81}$$

$$\begin{gathered}-\operatorname{div}\left(k(\theta^\varepsilon)\frac{\varepsilon+\theta^\varepsilon}{\theta^\varepsilon}\nabla\theta^\varepsilon\right) + \operatorname{div}(\rho^\varepsilon\theta^\varepsilon\boldsymbol{v}^\varepsilon) + \rho^\varepsilon\theta^\varepsilon\operatorname{div}\boldsymbol{v}^\varepsilon = \\ = \sum_{i=1}^N \mathbb{S}_i^\varepsilon : (\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i^\varepsilon) + \varepsilon\gamma(\rho^\varepsilon)^{\gamma-2}|\nabla\rho^\varepsilon|^2 \quad \text{в} \quad \Omega,\end{gathered} \tag{82}$$

$$\boldsymbol{u}_i^\varepsilon = 0, \quad i = 1, \ldots, N, \quad \nabla \rho^\varepsilon \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{83}$$

$$k(\theta^\varepsilon)\frac{\varepsilon + \theta^\varepsilon}{\theta^\varepsilon}\nabla\theta^\varepsilon \cdot \boldsymbol{n} + \varepsilon \ln \theta^\varepsilon + L(\theta^\varepsilon)(\theta^\varepsilon - \widehat{\theta}) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{84}$$

$$\int\limits_\Omega \rho^\varepsilon \, d\boldsymbol{x} = M, \tag{85}$$

где

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{v}^\varepsilon = \sum_{j=1}^N \beta_j \boldsymbol{u}_j^\varepsilon, \quad \rho_i^\varepsilon = \alpha_i \rho^\varepsilon, \quad p^\varepsilon = (\rho^\varepsilon)^\gamma + \rho^\varepsilon\theta^\varepsilon, \\
\mathbb{S}_i^\varepsilon = \sum_{j=1}^N \left(\lambda_{ij}\left(\mathrm{div}\boldsymbol{u}_j^\varepsilon\right)\mathbb{I} + 2\mu_{ij}\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_j^\varepsilon)\right). \quad i = 1, \ldots, N,
\end{gathered} \tag{86}$$

Определение 7. Сильным решением задачи (80)–(85) называются неотрицательная функция $\rho^\varepsilon \in W^2_p(\Omega)$, где $p > 3$, положительная функция $\theta^\varepsilon \in W^2_p(\Omega)$ и векторные поля $\boldsymbol{u}^\varepsilon_i \in W^2_p(\Omega)$, $i = 1, \ldots, N$, удовлетворяющие (85), уравнениям (80)–(82) п. в. в Ω, и условиям (83), (84) п. в. на $\partial\Omega$.

Теорема 8. В условиях Теоремы 6 при любых $\varepsilon \in (0, 1]$ задача (80)–(85) имеет по крайней мере одно сильное решение.

Предельный переход по малому параметру $\varepsilon \to +0$ совершается на основании оценок, равномерных по этому параметру:

$$\|\rho^\varepsilon\|_{L_{2\gamma}(\Omega)} \leqslant C, \tag{87}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \|\boldsymbol{u}^\varepsilon_i\|_{W^1_2(\Omega)} + \|\theta^\varepsilon\|_{L_{3m}(\Omega)} \leqslant C, \tag{88}$$

$$\|\nabla\theta^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} + \|\nabla s^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} + \|\theta^\varepsilon\|_{L_{2m}(\partial\Omega)} + \int\limits_{\partial\Omega} (e^{s^\varepsilon} + e^{-s^\varepsilon})d\sigma \leqslant C, \tag{89}$$

$$\|\varepsilon\nabla\rho^\varepsilon\|_{L_{\frac{6\gamma}{\gamma+3}}(\Omega)} + \|\sqrt{\varepsilon}\nabla\rho^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C, \tag{90}$$

где $s^\varepsilon = \ln\theta^\varepsilon$.

Ввиду оценок (87)–(90), имеют место сходимости

$$\rho^\varepsilon \to \rho \quad \text{слабо в} \quad L_{2\gamma}(\Omega), \tag{91}$$

$$\boldsymbol{u}_i^\varepsilon \to \boldsymbol{u}_i \quad \text{слабо в} \quad \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{92}$$

$$\theta^\varepsilon \to \theta \quad \text{слабо в} \quad W_2^1(\Omega), \quad L_{3m}(\Omega) \quad \text{и} \quad L_{2m}(\partial\Omega),$$

$$s^\varepsilon \to s \quad \text{слабо в} \quad W_2^1(\Omega),$$

$$(\rho^\varepsilon)^\gamma \to \overline{\rho^\gamma} \quad \text{слабо в} \quad L_2(\Omega), \tag{93}$$

где $(\rho, (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_N), \theta, s, \overline{\rho^\gamma})$ — некоторый элемент пространства $L_{2\gamma}(\Omega) \times (\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))^N \times (W_2^1(\Omega) \bigcap L_{3m}(\Omega) \bigcap L_{2m}(\partial\Omega)) \times W_2^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$, и следовательно

$$\boldsymbol{u}_i^\varepsilon \to \boldsymbol{u}_i \quad \text{сильно в} \quad L_p(\Omega) \quad \forall\, p \in [1, 6), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{94}$$

$$\theta^\varepsilon \to \theta \quad \text{сильно в} \quad L_p(\Omega) \quad \forall\, p \in [1, 3m),$$

$$\theta^\varepsilon|_{\partial\Omega} \to \theta|_{\partial\Omega} \quad \text{сильно в} \quad L_p(\partial\Omega) \quad \forall\, p \in [1, 2m),$$

$$s^\varepsilon \to s \quad \text{сильно в} \quad L_p(\Omega) \quad \forall\, p \in [1, 6).$$

Таким образом, получаем, что предельные функции ρ, θ, $\boldsymbol{u}_i$, $i = 1, \dots, N$, удовлетворяют уравнениям

$$\int\limits_\Omega \rho \boldsymbol{v} \cdot \nabla \psi \, d\boldsymbol{x} = 0 \qquad \forall \psi \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

где $\boldsymbol{v} = \sum\limits_{i=1}^N \alpha_i \boldsymbol{u}_i$, и

$$\sum_{j=1}^N \Bigg(\mu_{ij} \int\limits_\Omega (\nabla \otimes \boldsymbol{u}_j) : (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}_i) \, d\boldsymbol{x} +$$

$$+ (\lambda_{ij} + \mu_{ij}) \int\limits_\Omega (\mathrm{div} \boldsymbol{u}_j)(\mathrm{div} \boldsymbol{\varphi}_i) \, d\boldsymbol{x} \Bigg) -$$

$$- \int\limits_\Omega (\rho_i \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}_i) : (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}_i) \, d\boldsymbol{x} - \beta_i \int\limits_\Omega (\overline{\rho^\gamma} + \rho\theta) \, \mathrm{div} \boldsymbol{\varphi}_i \, d\boldsymbol{x} =$$

$$= \int\limits_\Omega \rho_i \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}_i \, d\boldsymbol{x} \quad \forall \boldsymbol{\varphi}_i \in C_0^\infty(\Omega), \quad i = 1, \dots, N.$$

Непосредственно в (82), (84), т. е. в соответствующем интегральном тождестве, предельный переход не приведет к успеху ввиду наличия слагаемого $\sum\limits_{i=1}^{N} \mathbb{S}_i^\varepsilon : (\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i^\varepsilon)$, которое ограничено равномерно по ε только в пространстве $L_1(\Omega)$, не являющемся слабо полным, так что возникнет проблема аналогичная доказательству равенства

$$\overline{\rho^\gamma} = \rho^\gamma. \tag{95}$$

(но которая, в отличие от (95), пока не нашла своего решения). Поэтому преобразуем указанное слагаемое по формуле

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbb{S}_i^\varepsilon : (\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i^\varepsilon) = \sum_{i=1}^{N} \left[\mathrm{div}(\mathbb{S}_i^\varepsilon \boldsymbol{u}_i^\varepsilon) - \boldsymbol{u}_i^\varepsilon \cdot \mathrm{div}\mathbb{S}_i^\varepsilon\right], \tag{96}$$

в которой, в свою очередь, последнее слагаемое выразим из (81) с привлечением ренормализованного $\left(\text{а именно, умноженного на } \dfrac{\gamma(\rho^\varepsilon)^{\gamma-1}}{\gamma-1}\right)$ уравнения (80). На языке интегральных тождеств это означает следующее.

Возьмем любую $\eta \in C^\infty(\overline{\Omega})$ и заметим, что из (80) и (83) следует соотношение

$$\varepsilon\gamma \int\limits_\Omega (\rho^\varepsilon)^{\gamma-2}|\nabla\rho^\varepsilon|^2\eta\,d\boldsymbol{x} = \int\limits_\Omega \Bigg(-(\rho^\varepsilon)^\gamma\eta\mathrm{div}\boldsymbol{v}^\varepsilon - \frac{\varepsilon\gamma}{\gamma-1}(\rho^\varepsilon)^{\gamma-1}\nabla\rho^\varepsilon\cdot\nabla\eta -$$

$$-\frac{\varepsilon\gamma}{\gamma-1}\eta(\rho^\varepsilon)^\gamma + \frac{\varepsilon\gamma}{\gamma-1}\frac{M}{|\Omega|}\eta(\rho^\varepsilon)^{\gamma-1} + \frac{1}{\gamma-1}(\rho^\varepsilon)^\gamma\boldsymbol{v}^\varepsilon\cdot\nabla\eta\Bigg)\,d\boldsymbol{x}. \qquad (97)$$

Теперь сложим три интегральных равенства:

1) (82) после умножения на η и интегрирования по Ω с учетом (84) (то есть интегральная формулировка (82), (84));

2) (81) после умножения на $\eta\boldsymbol{u}_i^\varepsilon$, интегрирования по Ω с учетом $(83)_1$ и суммирования по $i = 1, \ldots, N$ (то есть интегральное представление для последнего слагаемого в (96));

3) (97), которое означает использование ренормализованного уравнения (80).

Эта процедура дает интегральное тождество

$$-\int\limits_{\Omega}\rho^{\varepsilon}\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\alpha_i|\boldsymbol{u}_i^{\varepsilon}|^2+\frac{1}{\gamma-1}(\rho^{\varepsilon})^{\gamma-1}+\theta^{\varepsilon}\right]\boldsymbol{v}^{\varepsilon}\cdot\nabla\eta\,d\boldsymbol{x}-\int\limits_{\Omega}\Big[(\rho^{\varepsilon})^{\gamma}+$$

$$+\rho^{\varepsilon}\theta^{\varepsilon}\Big]\boldsymbol{v}^{\varepsilon}\cdot\nabla\eta\,d\boldsymbol{x}+\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\Omega}\mathbb{S}_i^{\varepsilon}:(\boldsymbol{u}_i^{\varepsilon}\otimes\nabla\eta)\,d\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\Omega}\rho_i^{\varepsilon}\boldsymbol{f}_i\cdot\boldsymbol{u}_i^{\varepsilon}\eta\,d\boldsymbol{x}-$$

$$-\int\limits_{\Omega}k(\theta^{\varepsilon})\frac{\varepsilon+\theta^{\varepsilon}}{\theta^{\varepsilon}}\nabla\theta^{\varepsilon}\cdot\nabla\eta\,d\boldsymbol{x}-\varepsilon\int\limits_{\partial\Omega}(\ln\theta^{\varepsilon})\eta\,d\sigma-\int\limits_{\partial\Omega}L(\theta^{\varepsilon})(\theta^{\varepsilon}-\widehat{\theta})\eta\,d\sigma-$$

$$-\frac{\varepsilon\gamma}{\gamma-1}\int\limits_{\Omega}(\rho^{\varepsilon})^{\gamma}\eta\,d\boldsymbol{x}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{\varepsilon M}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega}(\rho^{\varepsilon})^{\gamma-1}\eta\,d\boldsymbol{x}-\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\Omega}\rho_i^{\varepsilon}|\boldsymbol{u}_i^{\varepsilon}|^2\eta\,d\boldsymbol{x}-$$

$$-\frac{\varepsilon M}{2|\Omega|}\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\int\limits_{\Omega}|\boldsymbol{u}_i^{\varepsilon}|^2\eta\,d\boldsymbol{x}-\frac{\varepsilon\gamma}{\gamma-1}\int\limits_{\Omega}(\rho^{\varepsilon})^{\gamma-1}\nabla\rho^{\varepsilon}\cdot\nabla\eta\,d\boldsymbol{x},$$

соответствующее регуляризованной краевой задаче для уравнения энергии, модифицированной с использованием (96).

Переходя в нем к пределу при $\varepsilon \to +0$, получим

$$-\int\limits_\Omega \mathcal{E}\boldsymbol{v}\cdot\nabla\eta\,d\boldsymbol{x} - \int\limits_\Omega p\boldsymbol{v}\cdot\nabla\eta\,d\boldsymbol{x} + \sum_{i=1}^N \int\limits_\Omega \mathbb{S}_i : (\boldsymbol{u}_i\otimes\nabla\eta)\,d\boldsymbol{x} =$$

$$= \sum_{i=1}^N \int\limits_\Omega \rho_i \boldsymbol{f}_i\cdot\boldsymbol{u}_i\eta\,d\boldsymbol{x} + \int\limits_\Omega \boldsymbol{q}\cdot\nabla\eta\,d\boldsymbol{x} - \int\limits_{\partial\Omega} L(\theta)(\theta-\widehat{\theta})\eta d\sigma \quad \forall\,\eta\in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

где $\mathcal{E} = \dfrac{\rho}{2}\displaystyle\sum_{j=1}^N \alpha_j|\boldsymbol{u}_j|^2 + \dfrac{1}{\gamma-1}\overline{\rho^\gamma} + \rho\theta$, $p = \overline{\rho^\gamma} + \rho\theta$,

$\mathbb{S}_i = \displaystyle\sum_{j=1}^N (\lambda_{ij}(\mathrm{div}\boldsymbol{u}_j)\mathbb{I} + 2\mu_{ij}\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_j))$, $i = 1,\ldots,N$, $\boldsymbol{q} = -(1+\theta^m)\nabla\theta$,

$L(\theta) = 1+\theta^{m-1}$. Таким образом, последним препятствием для завершения доказательства остается соотношение (95).

Для этого рассмотрим так называемые эффективные вязкие потоки компонент $\beta_i p - \sum\limits_{j=1}^{N} \nu_{ij} \mathrm{div} \boldsymbol{u}_j, \quad i = 1, \ldots, N$, соответствующие величины для регуляризованной задачи $\beta_i (\rho^\varepsilon)^\gamma + \beta_i \rho^\varepsilon \theta^\varepsilon - \sum\limits_{j=1}^{N} \nu_{ij} \mathrm{div} \boldsymbol{u}_j^\varepsilon, \quad i = 1, \ldots, N$, и их слабые пределы в $L_2(\Omega)$ — $\beta_i \overline{\rho^\gamma} + \beta_i \rho\theta - \sum\limits_{j=1}^{N} \nu_{ij} \mathrm{div} \boldsymbol{u}_j, \quad i = 1, \ldots, N.$

Соотношения для эффективных вязких потоков:

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_\Omega \tau \rho^\varepsilon \left(\beta_i p^\varepsilon - \sum_{j=1}^{N} \nu_{ij} \mathrm{div} \boldsymbol{u}_j^\varepsilon \right) d\boldsymbol{x} = \\ = \int\limits_\Omega \tau \rho \left(\beta_i (\overline{\rho^\gamma} + \rho\theta) - \sum_{j=1}^{N} \nu_{ij} \mathrm{div} \boldsymbol{u}_j \right) d\boldsymbol{x}, \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{98}$$

Из (98) следует равенство

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\Omega}\tau\rho^{\varepsilon}\left(\nu_0 p^{\varepsilon}-\mathrm{div}\boldsymbol{v}^{\varepsilon}\right)d\boldsymbol{x}=\int\limits_{\Omega}\tau\rho\left(\nu_0(\overline{\rho^{\gamma}}+\rho\theta)-\mathrm{div}\boldsymbol{v}\right)\,d\boldsymbol{x}, \tag{99}$$

где $\nu_0=(\mathbf{N}^{-1}\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})>0$, а $\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\dots,\beta_N)^*$. Ввиду произвольности τ, равенство (99) выражает соотношение

$$\nu_0\overline{\rho p}-\overline{\rho\mathrm{div}\boldsymbol{v}}=\nu_0\rho\overline{p}-\rho\mathrm{div}\boldsymbol{v}\quad \text{п. в. в }\ \Omega. \tag{100}$$

Поскольку все решения уравнения неразрывности являются так называемыми ренормализованными решениями, т. е. удовлетворяют в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ ренормализованным уравнениям

$$\mathrm{div}(\widetilde{G}(\rho)\boldsymbol{v})+(\rho\widetilde{G}'(\rho)-\widetilde{G}(\rho))\mathrm{div}\boldsymbol{v}=0,$$

формально получающимся из уравнения неразрывности умножением на $\widetilde{G}'(\rho_i)$, то при $\widetilde{G}(s)=s\ln s$ следует равенство

$$\int\limits_{\Omega}\rho\mathrm{div}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x}=0. \tag{101}$$

С другой стороны, из приближенного уравнения неразрывности следует неравенство

$$\int\limits_{\Omega} \overline{\rho \operatorname{div} \boldsymbol{v}}\, d\boldsymbol{x} \leqslant 0. \tag{102}$$

Комбинируя (101) и (102), приходим к неравенству

$$\int\limits_{\Omega} (\overline{\rho \operatorname{div} \boldsymbol{v}} - \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{x} \leqslant 0, \tag{103}$$

откуда и из (100) следует, что

$$\int\limits_{\Omega} \Big(\overline{\rho(\rho^\gamma + \rho\theta)} - \rho(\overline{\rho^\gamma} + \rho\theta)\Big)\, d\boldsymbol{x} \leqslant 0. \tag{104}$$

Ввиду монотонности функции $z \mapsto z^\gamma + z\theta$, для любой $v \in L_{2\gamma}(\Omega)$, $v \geqslant 0$, имеем поточечное неравенство $(\rho^\varepsilon - v)((\rho^\varepsilon)^\gamma + \rho^\varepsilon\theta - v^\gamma - v\theta) \geqslant 0$, которое после интегрирования по Ω и предельного перехода по $\varepsilon \to +0$ принимает вид

$$\int\limits_{\Omega} \overline{\rho(\rho^\gamma + \rho\theta)}\, d\boldsymbol{x} \geqslant \int\limits_{\Omega} v(\overline{\rho^\gamma} + \rho\theta)\, d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\Omega} (\rho - v)(v^\gamma + v\theta)\, d\boldsymbol{x}. \tag{105}$$

Вычитая (105) из (104) и полагая $v = \rho + \sigma\psi$ с любыми $\psi \in L_{2\gamma}(\Omega)$, $\psi \geqslant 0$ и $\sigma \in (0,1]$, получаем неравенство

$$\int\limits_{\Omega} (\overline{\rho^\gamma} + \rho\theta)\psi \, d\boldsymbol{x} \leqslant \int\limits_{\Omega} [(\rho + \sigma\psi)^\gamma + (\rho + \sigma\psi)\theta]\psi \, d\boldsymbol{x},$$

переходя в котором к пределу при $\sigma \to +0$ и пользуясь поточечным свойством слабых пределов $\overline{\rho^\gamma} \geqslant \rho^\gamma$, получаем $(\overline{\rho^\gamma} - \rho^\gamma)\psi = 0$, что ввиду произвольности ψ означает, что $\overline{\rho^\gamma} = \rho^\gamma$, т.е. соотношение (95) доказано.

Как следствие, получаем, что сходимость $\rho^\varepsilon \to \rho$ при $\varepsilon \to +0$ сильная в $L_\gamma(\Omega)$, а значит (ввиду ограниченности в $L_{2\gamma}(\Omega)$) и в $L_p(\Omega)$ при всех $p \in [1, 2\gamma)$.

Разрешимость начально-краевой задачи для многомерных уравнений баротропного движения вязких сжимаемых многокомпонентных сред

В замыкании $\overline{Q}_T$ области $Q_T = (0,T) \times \Omega$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — область течения с границей $\partial\Omega$, $T > 0$ — произвольное действительное число, требуется найти скалярные поля плотностей компонент $\rho_i \geqslant 0$, $i = 1, \dots, N$ $(N \geqslant 2)$, и векторные поля скоростей компонент $\boldsymbol{u}_i$, $i = 1, \dots, N$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{v}) = 0, \quad i = 1, \dots, N, \tag{106}$$

$$\frac{\partial (\rho_i \boldsymbol{u}_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}_i) + \nabla p = \operatorname{div} \mathbb{S}_i + \rho_i \boldsymbol{f}_i, \quad i = 1, \dots, N, \tag{107}$$

а также начальным и краевым условиям

$$\rho_i|_{t=0} = \rho_{0i}, \qquad \boldsymbol{u}_i|_{t=0} = \boldsymbol{u}_{0i}, \quad i = 1, \dots, N, \tag{108}$$

$$\boldsymbol{u}_i|_{(0,T)\times\partial\Omega} = 0, \quad i = 1, \dots, N, \tag{109}$$

где $\boldsymbol{v} = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} \boldsymbol{u}_i$ — средняя скорость многокомпонентной среды; p — давление в многокомпонентной среде, которое определяется суммарной плотностью $\rho = \sum\limits_{i=1}^{N} \rho_i$; $\mathbb{S}_i$, $i = 1, \ldots, N$ — тензоры вязких напряжений, которые определяются равенствами

$$\mathbb{S}_i = 2\mu_{ij}\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_j) + \lambda_{ij}(\operatorname{div}\boldsymbol{u}_j)\mathbb{I}, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{110}$$

где постоянные коэффициенты вязкостей λ_{ij} и μ_{ij} образуют соответственно матрицы $\boldsymbol{\Lambda}$ и $\mathbf{M}$, такие что

$$\mathbf{M} > 0, \quad \boldsymbol{\Lambda} + \frac{2}{3}\mathbf{M} \geqslant 0; \tag{111}$$

векторы $\boldsymbol{f}_i$, $i = 1, \ldots, N$ являются известными полями внешних массовых сил; ρ_{0i} (начальные плотности) и $\boldsymbol{u}_{0i}$ (начальные скорости), $i = 1, \ldots, N$ — заданные функции.

На функцию $p \in C^1[0, +\infty)$ будем налагать условия

$$p(0) = 0, \quad \forall s \geqslant 0 \quad \frac{1}{a_1} s^{\gamma-1} \leqslant p'(s) \leqslant a s^{\gamma-1} + b \tag{112}$$

с некоторыми постоянными $a_1 \geqslant 1$, $a \geqslant 1$, $b > 0$ и $\gamma > \dfrac{3}{2}$.

Простейшим примером ситуации, когда наложенные требования на давление выполнены, является политропный закон $p(\rho) = \rho^\gamma$.

Начальные данные в задаче (106)–(109) будем брать из класса

$$\rho_{0i} \in L_\gamma(\Omega), \quad \rho_{0i} \geqslant 0, \quad \boldsymbol{u}_{0i} \in L_{\frac{\gamma}{\gamma-1}}(\Omega), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{113}$$

На внешние силы для простоты наложим требования

$$\boldsymbol{f}_i \in L_\infty(Q_T), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{114}$$

Определение 9. Пусть в уравнениях (107) коэффициенты вязкости удовлетворяют ограничениям (111), давление — условиям (112), а входные данные задачи (106)–(109) удовлетворяют условиям (113), (114). Слабым обобщенным решением задачи (106)–(109) называется набор функций

$$\rho_i \in L_\infty(0,T;L_\gamma(\Omega)), \quad \rho_i \geqslant 0, \quad \boldsymbol{u}_i \in L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)), \quad i=1,\ldots,N,$$

удовлетворяющих следующим условиям:

1) Плотности ρ_i удовлетворяют уравнениям неразрывности (106) и начальным условиям (108) в том смысле, что для любых $\phi_i \in C_0^1\big([0,T);C^\infty(\overline{\Omega})\big)$ выполняются интегральные тождества $(i=1,\ldots,N)$

$$\int\limits_{Q_T} \Big(\rho_i \frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \rho_i \boldsymbol{v}\cdot\nabla\phi_i\Big)\, d\boldsymbol{x}dt + \int\limits_{\Omega} \rho_{0i}\phi_i|_{t=0}\, d\boldsymbol{x} = 0;$$

2) Скорости $\boldsymbol{u}_i$ удовлетворяют уравнениям импульсов (107) (с определяющими уравнениями (110)) и начальным условиям (108) в том смысле, что для любых векторных полей $\boldsymbol{\varphi}_i \in C_0^1([0,T); C_0^\infty(\Omega))$ выполнены интегральные тождества $(i = 1, \ldots, N)$

$$\int\limits_{Q_T} \Big(\rho_i \boldsymbol{u}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial t} + (\rho_i \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}_i) : (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}_i) + p(\rho) \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_i +$$

$$+\rho_i \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}_i\Big)\, d\boldsymbol{x}\, dt = \int\limits_{Q_T} \mathbb{S}_i : (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}_i)\, d\boldsymbol{x}\, dt - \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{q}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}_i(0, \boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$$

(краевые условия (109) выполнены автоматически — в смысле функционального класса $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$).

Теорема 10. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса $C^{2+\nu_1}$, $\nu_1 \in (0,1)$, а $T > 0$ — произвольное конечное число. Тогда для любых входных данных класса, описанного в Определении 9, и при оговоренных в нем условиях на параметры уравнений, существует по крайней мере одно слабое решение задачи (106)–(109).

Сначала строится приближенное решение задачи (106)–(109) как решение следующей задачи (индексы m, ε и δ у величин, от них зависящих, пока опустим):

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{v}) = \varepsilon \Delta \rho_i, \tag{115}$$
$$\rho_i|_{t=0} = \rho_{0i}, \quad \nabla \rho_i \cdot \boldsymbol{n}|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0, \quad i = 1, \ldots, N,$$

$$\int\limits_{Q_T} \left(\rho_i \boldsymbol{u}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial t} + (\rho_i \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}_i) : (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}_i) + \widetilde{p}(\rho)\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_i + \rho_i \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}_i\right) d\boldsymbol{x}\, dt =$$
$$= \int\limits_{Q_T} \Big(\varepsilon((\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i)\boldsymbol{\varphi}_i) \cdot \nabla \rho_i + \mathbb{S}_i : (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}_i)\Big)\, d\boldsymbol{x}\, dt - \tag{116}$$
$$- \int\limits_{\Omega} \rho_{0i} \boldsymbol{u}_{0i} \cdot \boldsymbol{\varphi}_i(0, \boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}, \quad i = 1, \ldots, N$$

— эти интегральные тождества предполагаются выполненными для всех $\boldsymbol{\varphi}_i \in C_0^1([0,T); X_m)$, $i = 1, \ldots, N$.

Здесь приняты следующие обозначения:

- $X_m = \mathrm{Lin}\,\{\boldsymbol{\psi_i}\}_{i=1}^m \subset L_2(\Omega)$, где $\{\boldsymbol{\psi_i}\}_{i=1}^m$ — базис в $W_2^1(\Omega)$, ортонормированный в $L_2(\Omega)$, состоящий из гладких функций, имеющих компактный носитель в области Ω, для определенности норму в X_m положим равной норме в $L_2(\Omega)$;
- $\varepsilon \in (0,1]$ — малый параметр (который впоследствии будет устремлен к нулю),
- $m \in \mathbb{N}$ (впоследствии $m \to +\infty$),
- $\widetilde{p}(s) = p(s) + \delta s^\beta$,
- $\delta \in (0,1]$ — малый параметр (который также будет устремлен к нулю), а показатель

$$\beta > \max\{\gamma, 6\} \tag{117}$$

  выбран произвольно и останется фиксированным,
- функции ρ_{0i} заменены гладкими функциями $\rho_{0i}^\delta \in C^{2+\nu_2}(\overline{\Omega})$, $0 < \nu_2 < 1$, а именно такими, что

$$\begin{gathered} \delta \leqslant \rho_{0i}^\delta \leqslant \delta^{-\frac{1}{\beta}}, \quad \nabla \rho_{0i}^\delta \cdot \boldsymbol{n}|_{\partial\Omega} = 0, \\ \rho_{0i\delta} \xrightarrow[\delta \to 0]{} \rho_{0i} \quad \text{сильно в} \quad L_\gamma(\Omega), \quad i = 1, \ldots, N. \end{gathered} \tag{118}$$

Из теории параболических уравнений известно, что если $\boldsymbol{v} \in C([0,T]; X_m)$ задано, то:

- существуют единственные классические решения (115), т. е. $\rho_i \in V_{[0,T]}$, $i = 1, \ldots, N$, где

$$V_{[0,T]} = \Big\{ g \,\Big|\quad g \in C([0,T]; C^{2+\nu_2}(\overline{\Omega})), \quad \frac{\partial g}{\partial t} \in C([0,T]; C^{\nu_2}(\overline{\Omega})) \Big\};$$

- отображения $\mathcal{S}_i : \boldsymbol{v} \mapsto \rho_i$, $i = 1, \ldots, N$, ограничены из $C([0,T]; X_m)$ в $V_{[0,T]}$ и непрерывны со значениями в $C^1([0,T] \times \overline{\Omega})$;
- для всех $t \in [0,T]$, $\boldsymbol{x} \in \Omega$, $i = 1, \ldots, N$ верна оценка

$$\begin{aligned} \delta \exp\Big(-\|\operatorname{div} \boldsymbol{v}\|_{L_1(0,t;L_\infty(\Omega))} \Big) &\leqslant \rho_i(t, \boldsymbol{x}) \leqslant \\ &\leqslant \delta^{-\frac{1}{\beta}} \exp\Big(\|\operatorname{div} \boldsymbol{v}\|_{L_1(0,t;L_\infty(\Omega))} \Big); \end{aligned} \tag{119}$$

- если $\|\boldsymbol{v}^k\|_{L_\infty(0,T;W^1_\infty(\Omega))} \leqslant \widetilde{R}$, $k = 1, 2$, $\widetilde{R} > 0$, то при всех $t \in [0,T]$ и $i = 1, \ldots, N$

$$\begin{aligned} \|(S_i(\boldsymbol{v}^1) - S_i(\boldsymbol{v}^2))(t)\|_{L_2(\Omega)} &\leqslant \\ \leqslant \widetilde{C}(\widetilde{R}, T, \varepsilon) t \|S_i(\boldsymbol{v}^{1,2})(0, \cdot)\|_{W^1_2(\Omega)} &\|\boldsymbol{v}^1 - \boldsymbol{v}^2\|_{L_\infty(0,T;W^1_\infty(\Omega))}. \end{aligned} \tag{120}$$

Используя принцип неподвижной точки, показывается, что существуют $\tau_0 \in (0, T)$ и $\boldsymbol{u}_i \in C^1([0, \tau_0]; X_m)$, $i = 1, \dots, N$, удовлетворяющие уравнениям (116), в которых вместо T стоит τ_0, а $\rho_i = S_i(\boldsymbol{v})$, $i = 1, \dots, N$.

Чтобы продолжить локальное решение на произвольный промежуток времени $[0, T]$, доказывается равномерная по τ_0 ограниченность в пространстве $C([0, T]; X_m)$ решений $\boldsymbol{u}_i$, $i = 1, \dots, N$, уравнений (116).

Далее, осуществляется предельный переход по $m \to +\infty$, а затем по малым параметрам: сначала $\varepsilon \to +0$, а затем $\delta \to +0$. На каждом этапе получаются оценки решений, не зависящие от того параметра, по которому предполагается предельный переход.

Однозначная разрешимость начально-краевой задачи для одномерных уравнений политропных течений вязких сжимаемых многокомпонентных сред

В прямоугольнике $Q_T = (0,1) \times (0,T)$ с произвольной конечной высотой $T > 0$ рассмотрим систему уравнений

$$\partial_t \rho_i + \partial_x(\rho_i v) = 0, \quad v = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i, \tag{121}$$

$$\rho_i \left(\partial_t u_i + v \partial_x u_i\right) + K \partial_x \rho^\gamma = \sum_{j=1}^{N} \nu_{ij} \partial_{xx} u_j, \quad \rho = \sum_{i=1}^{N} \rho_i, \tag{122}$$

при следующих начальных и граничных условиях $(i = 1, \ldots, N)$:

$$\rho_i|_{t=0} = \rho_{0i}(x), \quad u_i|_{t=0} = u_{0i}(x), \quad x \in [0,1], \tag{123}$$

$$u_i|_{x=0} = u_i|_{x=1} = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{124}$$

Определение 11. Сильным решением задачи (121)–(124) называется совокупность $2N$ функций $(\rho_1, \dots, \rho_N, u_1, \dots, u_N)$ таких, что уравнения (121), (122) выполнены почти всюду в Q_T, начальные условия (123) — для п. в. $x \in (0,1)$, а краевые условия (124) — для п. в. $t \in (0,T)$, и справедливы неравенства и включения $(i = 1, \dots, N)$

$$\begin{gathered} \rho_i > 0, \quad \rho_i \in L_\infty\big(0,T; W_2^1(0,1)\big), \quad \partial_t \rho_i \in L_\infty\big(0,T; L_2(0,1)\big), \\ u_i \in L_\infty\big(0,T; W_2^1(0,1)\big) \bigcap L_2\big(0,T; W_2^2(0,1)\big), \quad \partial_t u_i \in L_2(Q_T). \end{gathered} \tag{125}$$

Теорема 12. Пусть начальные данные в (123) удовлетворяют условиям

$$\rho_{0i} \in W_2^1(0,1), \quad \rho_{0i} > 0, \quad u_{0i} \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1), \quad i = 1, \dots, N \quad (N \geqslant 2), \tag{126}$$

симметричная матрица вязкостей $\mathbf{N} = \{\nu_{ij}\}_{i,j=1}^N$ положительно определена, показатель политропы $\gamma > 1$, постоянные $0 < K, T < \infty$. Тогда существует единственное сильное решение задачи (121)–(124).

Существование единственного сильного решения задачи (121)–(124) на малом промежутке времени $[0, t_0]$ доказывается применением метода Галёркина по пространственной переменной x в уравнениях импульсов (122). Чтобы продолжить решение с сегмента $[0, t_0]$ на весь рассматриваемый сегмент $[0, T]$, необходимо для локального решения получить априорные оценки в классах (126), ограничивающие константы в которых зависят лишь от данных задачи и от величины T, но не от параметра t_0.

При получении глобальных априорных оценок иногда удобнее пользоваться массовыми лагранжевыми координатами. Возьмем за новые независимые переменные $y(x,t) = \int\limits_0^x \rho(s,t)\,ds$ и t. Тогда система (121), (122) примет вид

$$\partial_t \rho_i + \rho\rho_i \partial_y v = 0, \quad v = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i, \tag{127}$$

$$\frac{\rho_i}{\rho}\partial_t u_i + K\partial_y \rho^\gamma = \sum_{j=1}^{N} \nu_{ij}\partial_y(\rho\partial_y u_j), \quad i = 1, \dots, N, \quad \rho = \sum_{i=1}^{N} \rho_i. \tag{128}$$

Область Q_T при таком переходе отображается в прямоугольник $\Pi_T = (0,d) \times (0,T)$, где $d = \int\limits_0^1 \rho_0 \, dx > 0$, $\rho_0 = \sum\limits_{i=1}^{N} \rho_{0i}$, а начальные и граничные условия преобразуются к виду $(i = 1, \ldots, N)$

$$\rho_i|_{t=0} = \widetilde{\rho}_{0i}(y), \quad u_i|_{t=0} = \widetilde{u}_{0i}(y), \quad y \in [0,d], \tag{129}$$

$$u_i|_{y=0} = u_i|_{y=d} = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{130}$$

Приступим к выводу глобальных априорных оценок. Отметим сначала, что суммируя (127) по i от 1 до N, получаем

$$\partial_t \rho + \rho^2 \partial_y v = 0, \tag{131}$$

поэтому

$$\partial_t \left(\frac{\rho_i}{\rho} \right) = 0, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{132}$$

Отсюда и из (129) тогда следует, что для всех $i = 1, \dots, N$

$$\frac{\rho_i(y,t)}{\rho(y,t)} = \frac{\widetilde{\rho}_{0i}(y)}{\widetilde{\rho}_0(y)} \quad \text{при} \quad (y,t) \in [0,d] \times [0,T], \tag{133}$$

где $\widetilde{\rho}_0 = \sum_{i=1}^{N} \widetilde{\rho}_{0i}$.

В эйлеровых переменных (x,t) отношения $\dfrac{\rho_i}{\rho}$ удовлетворяют уравнениям переноса и, в этом случае, мы имеем только неравенства $(i = 1, \dots, N)$

$$\inf_{[0,1]} \frac{\rho_{0i}(x)}{\rho_0(x)} \leqslant \frac{\rho_i(x,t)}{\rho(x,t)} \leqslant \sup_{[0,1]} \frac{\rho_{0i}(x)}{\rho_0(x)} \leqslant 1 \quad \text{при} \quad (x,t) \in [0,1] \times [0,T]. \tag{134}$$

Теперь умножим уравнения (122) на u_i, проинтегрируем результат по $(0,1)$ и просуммируем по i от 1 до N, получим неравенство

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\int_0^1\left(\frac{1}{2}\rho_i u_i^2+\frac{K}{\gamma-1}\rho^\gamma\right)dx+C\sum_{i=1}^{N}\int_0^1|\partial_x u_i|^2\,dx\leqslant 0. \tag{135}$$

Неравенство (135) проинтегрируем по $(0,t)$, получим, используя (123), соотношение

$$\sum_{i=1}^{N}\int_0^1\left(\frac{1}{2}\rho_i u_i^2+\frac{K}{\gamma-1}\rho^\gamma\right)dx+C\sum_{i=1}^{N}\int_0^t\int_0^1|\partial_x u_i|^2\,dxd\tau\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{N}\int_0^1\left(\frac{1}{2}\rho_{0i} u_{0i}^2+\frac{K}{\gamma-1}\rho_0^\gamma\right)dx, \tag{136}$$

из которого, в силу (134), следует оценка

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\|\sqrt{\rho}u_i\|_{L_\infty\left(0,T;L_2(0,1)\right)}+\|\partial_x u_i\|_{L_2(Q_T)}\right)+\|\rho\|_{L_\infty\left(0,T;L_\gamma(0,1)\right)}\leqslant C. \quad (137)$$

В лагранжевых координатах оценка (137) имеет вид

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\|u_i\|_{L_\infty\left(0,T;L_2(0,d)\right)}+\|\sqrt{\rho}\partial_y u_i\|_{L_2(\Pi_T)}\right)+\|\rho\|_{L_\infty\left(0,T;L_{\gamma-1}(0,d)\right)}\leqslant C. \quad (138)$$

Из оценки (137) ввиду (130) очевидно вытекает неравенство

$$\sum_{i=1}^{N}\|u_i\|_{L_2\left(0,T;L_\infty(0,1)\right)}\leqslant C. \quad (139)$$

Далее перепишем уравнения (122) с учетом (121) в виде $(i = 1, \ldots, N)$

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\widetilde{\nu}_{ij}\left(\partial_t(\rho_j u_j) + \partial_x(\rho_j v u_j)\right) + \frac{K}{N}\left(\sum_{j=1}^{N}\widetilde{\nu}_{ij}\right)\partial_x\rho^\gamma = \frac{1}{N}\partial_{xx}u_i, \tag{140}$$

где $\widetilde{\nu}_{ij}$ — элементы матрицы $\widetilde{\mathbf{N}} = \mathbf{N}^{-1} > 0$, а затем просуммируем (140) по i от 1 до N, получим

$$\partial_t V = \partial_x\left(\partial_x v - \widetilde{K}\rho^\gamma - vV\right), \tag{141}$$

где $V = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i,j=1}^{N}\widetilde{\nu}_{ij}\rho_j u_j$, $\widetilde{K} = \dfrac{K}{N}\displaystyle\sum_{i,j=1}^{N}\widetilde{\nu}_{ij} > 0$.

Введем обозначение

$$\alpha(x,t) = \int\limits_0^t \left(\partial_x v - \widetilde{K}\rho^\gamma - vV\right) d\tau + \int\limits_0^x V_0\, ds, \tag{142}$$

где $V_0(x) = V(x,0)$. Т. к. в силу (137)

$$\|\partial_x \alpha\|_{L_\infty\left(0,T;L_1(0,1)\right)} = \|V\|_{L_\infty\left(0,T;L_1(0,1)\right)} \leqslant C, \tag{143}$$

$$\begin{gathered}\sup_{[0,T]} \left|\int\limits_0^1 \alpha\, dx\right| \leqslant T \max_{1\leqslant i,j\leqslant N} |\widetilde{\nu}_{ij}| \sum_{i=1}^N \sup_{[0,T]} \int\limits_0^1 \rho u_i^2\, dx + \widetilde{K}T \sup_{[0,T]} \int\limits_0^1 \rho^\gamma\, dx + \\ + \max_{1\leqslant i,j\leqslant N} |\widetilde{\nu}_{ij}| \sum_{i=1}^N \int\limits_0^1 \rho_{0i}|u_{0i}|\, dx \leqslant C,\end{gathered} \tag{144}$$

то, используя неравенство Пуанкаре, получим

$$\sup_{[0,T]} \int_0^1 |\alpha|\, dx \leqslant \sup_{[0,T]} \int_0^1 |\partial_x \alpha|\, dx + \sup_{[0,T]} \left| \int_0^1 \alpha\, dx \right| \leqslant C, \tag{145}$$

и мы приходим к ограниченности α в $L_\infty\big(0,T; W_1^1(0,1)\big)$. Отсюда и из того, что $W_1^1(0,1) \hookrightarrow L_\infty(0,1)$, следует оценка

$$\|\alpha\|_{L_\infty(Q_T)} \leqslant C. \tag{146}$$

Заметим теперь, что в силу (121), (141), (142) справедливы соотношения

$$d_t(\rho e^\alpha) = -\widetilde{K} e^\alpha \rho^{\gamma+1} \leqslant 0, \quad \text{где} \quad d_t = \partial_t + v\partial_x, \tag{147}$$

откуда следует, что

$$\rho e^\alpha \leqslant \sup_{[0,1]} \rho_0 e^{\int_0^1 |V_0|\, dx}, \tag{148}$$

и мы приходим к оценке

$$\rho(x,t) \leqslant C, \quad \text{при} \quad (x,t) \in [0,1] \times [0,T]. \tag{149}$$

Воспользуемся записью уравнений в форме (127), (128). Перепишем уравнения (128) в виде

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\widetilde{\nu}_{ij}\frac{\rho_j}{\rho}\partial_t u_j + \frac{K}{N}\left(\sum_{j=1}^{N}\widetilde{\nu}_{ij}\right)\partial_y \rho^\gamma = \frac{1}{N}\partial_y(\rho\partial_y u_i), \quad i = 1, \dots, N, \tag{150}$$

а затем просуммируем (150) по i от 1 до N, получим, с учетом (133), что

$$\frac{1}{N}\sum_{i,j=1}^{N}\widetilde{\nu}_{ij}\frac{\widetilde{\rho}_{0j}}{\widetilde{\rho}_0}\partial_t u_j + \widetilde{K}\partial_y\rho^\gamma = \partial_y\left(\rho\partial_y v\right). \tag{151}$$

Из уравнения (131) выразим

$$\rho\partial_y v = -\partial_t \ln\rho \tag{152}$$

и подставим в (151):

$$\partial_{ty}\ln\rho + \widetilde{K}\partial_y\rho^\gamma = -\frac{1}{N}\sum_{i,j=1}^{N}\widetilde{\nu}_{ij}\frac{\widetilde{\rho}_{0j}}{\widetilde{\rho}_0}\partial_t u_j. \tag{153}$$

Умножим это равенство на $\partial_y \ln\rho =: w$ и проинтегрируем по y от 0 до d, получим соотношение

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^d w^2\,dy\right) + \widetilde{K}\gamma\int\limits_0^d \rho^\gamma w^2\,dy = -\frac{1}{N}\sum_{i,j=1}^{N}\widetilde{\nu}_{ij}\int\limits_0^d\left(\frac{\widetilde{\rho}_{0j}}{\widetilde{\rho}_0}\partial_t u_j\right)w\,dy. \tag{154}$$

Правую часть (154) преобразуем, интегрируя по частям и используя (152):

$$-\frac{1}{N}\sum_{i,j=1}^{N}\widetilde{\nu}_{ij}\int\limits_0^d\left(\frac{\widetilde{\rho}_{0j}}{\widetilde{\rho}_0}\partial_t u_j\right)w\,dy = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{N}\sum_{i,j=1}^{N}\widetilde{\nu}_{ij}\int\limits_0^d\frac{\widetilde{\rho}_{0j}}{\widetilde{\rho}_0}u_j w\,dy\right)+$$

$$+\frac{1}{N}\sum_{i,j=1}^{N}\widetilde{\nu}_{ij}\int\limits_0^d \rho u_j(\partial_y v)\left(\frac{\widetilde{\rho}_{0j}}{\widetilde{\rho}_0}\right)'dy + \frac{1}{N}\sum_{i,j=1}^{N}\widetilde{\nu}_{ij}\int\limits_0^d\frac{\widetilde{\rho}_{0j}\rho}{\widetilde{\rho}_0}(\partial_y v)(\partial_y u_j)\,dy. \tag{155}$$

Таким образом, после интегрирования (154) по t, находим

$$\|w\|^2_{L_2(0,d)} + 2\widetilde{K}\gamma \int_0^t \int_0^d \rho^\gamma w^2\, dyd\tau \leqslant \|w_0\|^2_{L_2(0,d)} -$$

$$- \frac{2}{N} \sum_{i,j=1}^N \widetilde{\nu}_{ij} \int_0^d \frac{\widetilde{\rho}_{0j}}{\widetilde{\rho}_0} u_j w\, dy + \frac{2}{N} \sum_{i,j=1}^N \widetilde{\nu}_{ij} \int_0^d \frac{\widetilde{\rho}_{0j}}{\widetilde{\rho}_0} \widetilde{u}_{0j} w_0\, dy +$$

$$+ C \sum_{i,j=1}^N |\widetilde{\nu}_{ij}| \int_0^t \left\| \left(\frac{\widetilde{\rho}_{0j}}{\widetilde{\rho}_0} \right)' \right\|_{L_2(0,d)} \|u_j\|_{L_\infty(0,d)} \|\sqrt{\rho}\partial_y v\|_{L_2(0,d)}\, d\tau + \tag{156}$$

$$+ \frac{2}{N} \sum_{i,j=1}^N |\widetilde{\nu}_{ij}| \sup_{[0,d]} \frac{\widetilde{\rho}_{0j}}{\widetilde{\rho}_0} \int_0^t \|\rho(\partial_y v)(\partial_y u_j)\|_{L_1(0,d)}\, d\tau,$$

Используя (138) и (139), отсюда приходим к оценке

$$\|\partial_y \ln \rho\|_{L_\infty\left(0,T;L_2(0,d)\right)} \leqslant C. \tag{157}$$

Из уравнения неразрывности для ρ очевидно следует, что при каждом $t \in [0,T]$ хотя бы в одной точке $z(t) \in [0,d]$

$$\rho(z(t),t) = d. \tag{158}$$

Следовательно, можно воспользоваться представлением

$$\ln \rho(y,t) = \ln \rho(z(t),t) + \int\limits_{z(t)}^{y} \partial_s \ln \rho(s,t)\, ds, \tag{159}$$

из которого по неравенству Гельдера, с учетом (157) и (158), имеем

$$|\ln \rho(y,t)| \leqslant |\ln d| + \sqrt{d}\|w\|_{L_2(0,d)} \leqslant C. \tag{160}$$

Отсюда непосредственно следует

$$\rho(y,t) \geqslant C \quad \text{при} \quad (y,t) \in [0,d] \times [0,T]. \tag{161}$$

Из равенств (133) и предыдущих оценок следует, что для всех $i = 1, \ldots, N$

$$\widetilde{\mathrm{C}} \leqslant \rho_i(y,t) \leqslant \widetilde{\widetilde{\mathrm{C}}} \quad \text{при} \quad (y,t) \in [0,d] \times [0,T]. \tag{162}$$

Кроме того, из предыдущих оценок и формулы (133) следует, что

$$\|\partial_x \rho_i\|_{L_\infty(0,T;L_2(0,1))} \leqslant C, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{163}$$

Из (163) заключаем

$$\|(\partial_x \rho)(t)\|_{L_2(0,1)} \leqslant C \quad \forall\, t \in [0,T]. \tag{164}$$

Далее, возведем в квадрат уравнения импульсов (122) и просуммируем результат по i от 1 до N, получим

$$\sum_{i=1}^{N} \rho_i (\partial_t u_i)^2 + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\rho_i} \left(\sum_{j=1}^{N} \nu_{ij} \partial_{xx} u_j \right)^2 - 2 \sum_{i=1}^{N} (\partial_t u_i) \left(\sum_{j=1}^{N} \nu_{ij} \partial_{xx} u_j \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \rho_i \left(\frac{K \partial_x \rho^\gamma}{\rho_i} + v \partial_x u_i \right)^2. \tag{165}$$

Введем функцию $\beta(t)$ из соотношения

$$\beta(t) = \sum_{i,j=1}^{N} \nu_{ij} \int\limits_0^1 (\partial_x u_i)(\partial_x u_j)\, dx +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^t \int\limits_0^1 \left(\rho_i (\partial_t u_i)^2 + \frac{1}{\rho_i} \left(\sum_{j=1}^{N} \nu_{ij} \partial_{xx} u_j \right)^2 \right) dx d\tau.$$

Тогда из (165) и неравенств (149), (162), (164) следует оценка

$$\beta'(t) \leqslant C + C \left(\sum_{j=1}^{N} \|u_j\|^2_{L_\infty(0,1)} \right) \left(\sum_{i,j=1}^{N} \nu_{ij} \int\limits_0^1 (\partial_x u_i)(\partial_x u_j)\, dx \right) \leqslant$$

$$\leqslant C + C \left(\sum_{j=1}^{N} \|u_j\|^2_{L_\infty(0,1)} \right) \beta(t). \tag{166}$$

Из (166) по лемме Гронуолла (см. также (139)) следует, что

$$\beta(t) \leqslant C,$$

откуда приходим к оценке

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\|\partial_x u_i\|_{L_\infty(0,T;L_2(0,1))} + \|\partial_{xx} u_i\|_{L_2(Q_T)} + \|\partial_t u_i\|_{L_2(Q_T)}\right) \leqslant C. \tag{167}$$

Из уравнений неразрывности (121) и предыдущих оценок непосредственно следует заключительная глобальная априорная оценка

$$\|\partial_t \rho_i\|_{L_\infty(0,T;L_2(0,1))} \leqslant C, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{168}$$

которая позволяет завершить доказательство Теоремы 12.

Публикации

1. Мамонтов А. Е., Прокудин Д.А. Разрешимость нестационарных уравнений трехмерного движения теплопроводных вязких сжимаемых двухкомпонентных жидкостей. Изв. РАН. Сер. матем., 2021, Т. 85, № 4, С. 147–204.
2. Прокудин Д.А. Существование слабых решений задачи о трехмерных стационарных теплопроводных движениях вязких сжимаемых многокомпонентных смесей. Сиб. матем. журн., 2021, Т. 62, № 5, С. 1109–1123.
3. Мамонтов А. Е., Прокудин Д.А. Локальная разрешимость приближенной задачи для одномерных уравнений динамики смесей вязких сжимаемых теплопроводных жидкостей. Сиб. электр. матем. изв., 2021, Т. 18, № 2, С. 931–950.
4. Мамонтов А. Е., Прокудин Д.А. Глобальная однозначная разрешимость начально-краевой задачи для одномерных баротропных уравнений динамики бинарных смесей вязких сжимаемых жидкостей. Сиб. журн. индустр. матем., 2021, Т. 24, № 1, С. 32–47.
5. Прокудин Д.А. О стабилизации решения начально-краевой задачи для уравнений динамики вязких сжимаемых многокомпонентнных сред. Сиб. электрон. матем. изв., 2021, Т. 18, № 2, С. 1278–1285.

6. Prokudin D. A. Solvability of a regularized boundary-value problem for the system of equations of dynamics of mixtures of viscous compressible heat-conducting fluids. Sib. Electr. Math. Rep., 2020, V. 17, P. 300–312.
7. Mamontov A. E., Prokudin D. A. Galerkin approximations in the problem of one-dimensional unsteady motion of a viscous compressible two-component fluid. Sib. Electr. Math. Rep., 2020, V. 17, P. 406–415.
8. Мамонтов А. Е., Прокудин Д.А. Предельный переход в галеркинских приближениях регуляризованной задачи о трехмерном нестационарном движении вязкой сжимаемой теплопроводной многокомпонентной жидкости. Сиб. электрон. матем. изв., 2020, Т. 17, С. 227–259.
9. Mamontov A. E., Prokudin D. A. Global unique solvability of the initial-boundary value problem for the equations of one-dimensional polytropic flows of viscous compressible multifluids. Journal of Mathematical Fluid Mechanics, 2019, V. 21, № 1, Article 9.
10. Мамонтов А. Е., Прокудин Д.А. Разрешимость задачи для уравнений динамики смесей теплопроводных вязких сжимаемых жидкостей с одной температурой. Доклады Академии наук, 2019, Т. 486, № 2, С. 159–162.

11. Мамонтов А. Е., Прокудин Д.А. Глобальные оценки и разрешимость регуляризованной задачи о трехмерном нестационарном движении вязкой сжимаемой теплопроводной многокомпонентной жидкости. Сиб. электрон. матем. изв., 2019, Т. 16, С. 547–590.
12. Мамонтов А. Е., Прокудин Д.А. Разрешимость нестационарных уравнений многокомпонентных вязких сжимаемых жидкостей. Изв. РАН. Сер. матем., 2018, Т. 82, № 1, С. 151–197.
13. Mamontov A. E., Prokudin D. A. Unique solvability of initial-boundary value problem for one-dimensional equations of polytropic flows of multicomponent viscous compressible fluids. Sib. Electr. Math. Rep., 2018, V. 15, P. 631–649.
14. Mamontov A. E., Prokudin D. A. Local solvability of the initial-boundary value problem for one-dimensional equations of polytropic flows of viscous compressible multifluids. J. Math. Sci., 2018, V. 231, № 2, P. 227–242.
15. Прокудин Д. А. Об однозначной разрешимости начально–краевой задачи для модельной системы уравнений политропного движения смеси вязких сжимаемых жидкостей. Сиб. электрон. матем. изв., 2017, Т. 14, С. 568–585.

16. Мамонтов А. Е., Прокудин Д.А. Существование слабых решений задачи о трехмерных стационарных баротропных движениях смесей вязких сжимаемых жидкостей. Сиб. матем. журн., 2017, Т. 58, № 1, С. 148–164.
17. Mamontov A. E., Prokudin D. A. Viscous compressible homogeneous multi-fluids with multiple velocities: barotropic existence theory. Sib. Electr. Math. Rep., 2017, V. 14, P. 388–397.
18. Prokudin D. A. Global solvability of the initial boundary value problem for a model system of one–dimensional equations of polytropic flows of viscous compressible fluid mixtures. Journal of Physics: Conference Series, 2017, V. 894, Article 012076.
19. Прокудин Д. А. , Краюшкина М. В. Разрешимость стационарной краевой задачи для модельной системы уравнений баротропного движения смеси вязких сжимаемых жидкостей. Сиб. журн. индустр. матем., 2016, Т. 19, № 3, С. 55–67.
20. Мамонтов А. Е., Прокудин Д.А. Разрешимость стационарной краевой задачи для уравнений политропного движения вязких сжимаемых многожидкостных сред. Сиб. электрон. матем. изв., 2016, Т. 13, С. 664–693.

21. Мамонтов А. Е., Прокудин Д.А. Разрешимость начально–краевой задачи для уравнений политропного движения смесей вязких сжимаемых жидкостей. Сиб. электрон. матем. изв., 2016, Т. 13, С. 541–583.
22. Мамонтов А. Е., Прокудин Д.А. Разрешимость регуляризованной стационарной задачи о пространственных движениях многокомпонентных вязких сжимаемых жидкостей. Сиб. матем. журн., 2016, Т. 57, № 6, С. 1333–1345.
23. Мамонтов А. Е., Прокудин Д.А. Разрешимость стационарной краевой задачи для уравнений движения однотемпературной смеси вязких сжимаемых теплопроводных жидкостей. Изв. РАН. Сер. матем., 2014, Т. 78, № 3, С. 135–160.
24. Mamontov A. E., Prokudin D. A. Viscous compressible multi-fluids: modeling and multi-D existence. Methods and Applications of Analysis, 2013, V. 20, № 2, P. 179–196.

Спасибо за внимание!