

# Сильные решения импульсных псевдопараболич. уравнений с инфинитезимальным ударным слоем

Сергей Александрович Саженов  
(ИГиЛ СО РАН)

Конференция

«Уравнения с частными производными и их приложения»,  
посвящённая 115-летию со дня рождения С. Л. Соболева  
ИМ СО РАН, МЦА, Новосибирск, 2-4 октября 2023 г.

# Synopsis

- Изучаются две краевые задачи для двух псевдопараболических уравнений (п.п.у.), каждое из которых содержит регулярный младший член, моделирующий немгновенное импульсное воздействие.
- Младший член (в каждом из уравнений) зависит от малого параметра  $\varepsilon > 0$  и при  $\varepsilon \rightarrow 0$  слабо\* сходится к выражению, включающему в себя дельта-функцию Дирака, которая, в свою очередь, моделирует мгновенное импульсное воздействие в некоторый заданный момент времени  $t = \tau$ .
- При фиксированных значениях  $\varepsilon > 0$  каждая из изучаемых задач имеет единственное сильное обобщённое решение. Это гарантируется известными результатами.
- В отчётной работе на строгом математическом уровне проводится обоснование предельных переходов в задачах при  $\varepsilon \rightarrow 0$  к соответствующим **МГНОВЕННЫМ ИМПУЛЬСНЫМ** п.п.у.

- Результатом предельных переходов являются формулировки предельных корректных краевых задач для «двухмасштабных» систем уравнений, в каждой из которых величина мгновенного импульса определяется посредством решения подзадачи в переходном слое, поставленной на микроскопической («очень быстрой») шкале времени.

Исследование проведено в соавторстве с *Иваном Владимировичем Кузнецовым* (ИГиЛ СО РАН, НГУ) и опубликовано в совместных статьях

- *I. Kuznetsov and S. Sazhenkov*, Strong solutions of impulsive pseudoparabolic equations, *Nonlinear Anal.: Real World Applications*, 2022, **65**, article 103509, 19 pp.
- *I. Kuznetsov and S. Sazhenkov*, The one-dimensional impulsive Barenblatt-Zhel'tov-Kochina equation with a transition layer, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2022, **19**(2), 724–740.

# 1. Псевдо-параболическое уравнение с импульсным источником

Задача Коши для квазилинейного п.п.у с нелинейным младшим источником:

$$\partial_t u_\varepsilon = \partial_t \Delta_x u_\varepsilon + \operatorname{div}_x (\mathbb{A}(\mathbf{x}, t) \nabla_x b(u_\varepsilon)) + K_\varepsilon^T(t) \beta(\mathbf{x}, u_\varepsilon), \quad (\mathbf{x}, t) \in \Pi_T, \quad (1a)$$

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad (1b)$$

$$u_\varepsilon(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i, t) = u_\varepsilon(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \Pi_T, \quad i = 1, 2. \quad (1c)$$

Здесь,

- $\Pi_T := \mathbb{R}_x^2 \times (0, T)$  — пространственно-временной слой;
- $T = \text{const} > 0$  — произвольно фиксированный момент времени;
- $\tau$  — фиксированный момент времени,  $\tau \in (0, T)$ ;
- $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$  и  $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$  — декартов базис в  $\mathbb{R}_x^2$ .

$$\partial_t u_\varepsilon = \partial_t \Delta_x u_\varepsilon + \operatorname{div}_x (\mathbb{A}(\mathbf{x}, t) \nabla_x b(u_\varepsilon)) + K_\varepsilon^\tau(t) \beta(\mathbf{x}, u_\varepsilon) \quad (1a)$$

- $u_\varepsilon = u_\varepsilon(\mathbf{x}, t)$  — искомая функция;
- $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\mathbf{x}, t) = (a_{ij}(\mathbf{x}, t))_{i,j=1,2}$  — заданная диффузионная матрица-функция, гладкая по  $\mathbf{x}$  и  $t$ , 1-периодическая по  $\mathbf{x}$  (и не обязательно знакоопределенная);
- $b = b(u)$  — заданная диффузионная функция, дважды непр. дифференцируемая, причем  $(|b'(u)|, |b''(u)|) \leq c_b = \text{const}$ ;
- $\beta: \mathbb{R}_x^2 \times \mathbb{R}_u \mapsto \mathbb{R}$  — заданная функция источника, непр. по  $(\mathbf{x}, u)$ , липшицева по  $u$ , 1-периодическая по  $\mathbf{x}$  и сублинейная по  $u$ ;
- $u_0$  — заданная начальная функция, 1-периодическая по  $\mathbf{x}$ , принадлежащая  $W_{loc}^{2,2}(\mathbb{R}^2)$ ;
- $K_\varepsilon^\tau(t)$  — заданная функция (ядро).

Опишем это ядро на следующих трёх слайдах.

$$\partial_t u_\varepsilon = \partial_t \Delta_x u_\varepsilon + \operatorname{div}_x (\mathbb{A}(\mathbf{x}, t) \nabla_x b(u_\varepsilon)) + K_\varepsilon^\tau(t) \beta(\mathbf{x}, u_\varepsilon) \quad (1a)$$

## Регуляризация дельта-функции Дирака

Ядро  $K_\varepsilon^\tau = K_\varepsilon^\tau(t)$  с носителем на множестве  $\{\tau \leq t \leq \tau + \varepsilon\}$  определено по формуле

$$K_\varepsilon^\tau(t) = \frac{2}{\varepsilon} K\left(\frac{t - \tau}{\varepsilon}\right) \theta(t - \tau), \quad t \in [0, T],$$

где

$K = K(\vartheta)$  — это неотрицательная чётная гладкая функция с носителем на отрезке  $\{-1 \leq \vartheta \leq 1\}$  и средним значением, равным

единице, т.е.  $\int_{-1}^1 K(\vartheta) d\vartheta = 1$ ;

$\theta(\vartheta) = \mathbf{1}_{(\vartheta \geq 0)}$  — ступенчатая функция Хевисайда и  $\varepsilon > 0$  — малый параметр.

$$K_{\varepsilon}^{\tau}(t) = \frac{2}{\varepsilon} K\left(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\right) \theta(t-\tau)$$

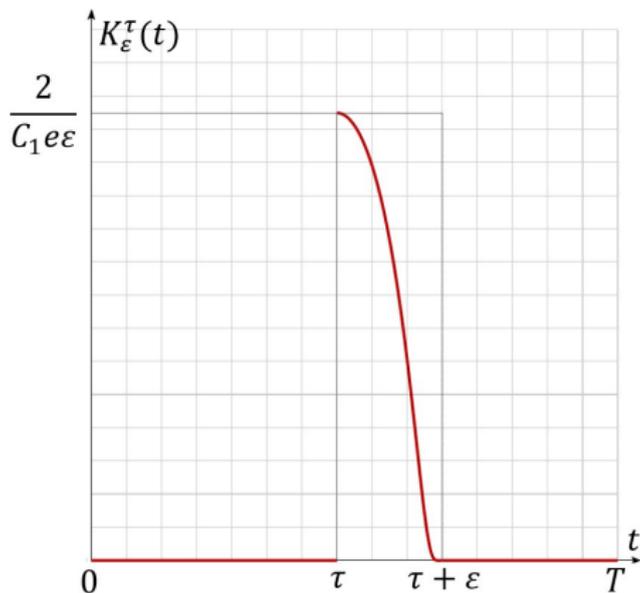


Рис.: Сглаженная функция Дирака  $K_{\varepsilon}^{\tau} = (\delta_{(t=\tau+0)})_{\varepsilon}$

$$\partial_t u_\varepsilon = \partial_t \Delta_x u_\varepsilon + \operatorname{div}_x (\mathbb{A}(\mathbf{x}, t) \nabla_x b(u_\varepsilon)) + K_\varepsilon^\tau(t) \beta(\mathbf{x}, u_\varepsilon) \quad (1a)$$

$$K_\varepsilon^\tau(t) = \frac{2}{\varepsilon} K \left( \frac{t - \tau}{\varepsilon} \right) \theta(t - \tau)$$

Полагаем, что  $\varepsilon$  не превосходит некоторого малого значения  $\varepsilon_0$ .

Таким образом,  $K_\varepsilon^\tau$  аппроксимирует правостороннюю дельта-функцию Дирака  $\delta_{(t=\tau+0)}$  в слабом\* смысле при  $\varepsilon \rightarrow 0+$ , т. е. имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\mathbb{R}} \phi(t) K_\varepsilon^\tau(t) dt = \phi(\tau + 0)$$

при любой интегрируемой в окрестности точки  $t = \tau \in \mathbb{R}$  функции  $\phi$ , имеющей след в точке  $t = \tau$  справа:  $\phi(\tau + 0) = \lim_{t \rightarrow \tau+0} \phi(t)$ .

$$\partial_t u_\varepsilon = \partial_t \Delta_x u_\varepsilon + \operatorname{div}_x (\mathbb{A}(\mathbf{x}, t) \nabla_x b(u_\varepsilon)) + K_\varepsilon^T(t) \beta(\mathbf{x}, u_\varepsilon) \quad (1a)$$

## О физическом смысле уравнения (1a)

Уравнение (1a) возникает, например, в

- теории фильтрации в трещиновато-пористом грунте, где  $u$  имеет смысл распределения давления в галерее трещин,
- в исследованиях неравновесных процессов перетока тепла, где  $u$  играет роль одной из температур в двухтемпературном континууме,
- в некоторых задачах динамики, связанных с неньютоновскими жидкостями второго рода, сводящихся к краевым задачам для уравнения (1a), где  $u$  является определённым выражением компонент вектора скорости.

## Об импульсных эффектах (процессах)

Наличие в уравнении коэффициента, аппроксимирующего дельта-функцию Дирака, соответствует импульсным (очень быстро протекающим) процессам.

## Разрешимость задачи (1)

При каждой заданной функции  $u_0 \in H^{2,2}$  задача (1) имеет единственное сильное решение при каждом фиксированном  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ . Понятие сильного решения формулируется следующим образом.

## Определение 1 (сильное решение).

Функция  $u_\varepsilon: \Pi_T \mapsto \mathbb{R}$  называется *сильным решением* задачи (1), если

- (i)  $u_\varepsilon, \partial_t u_\varepsilon \in L^\infty(0, T; H^{2,2})$ ;
- (ii)  $u_\varepsilon$  удовлетворяет (1a) п.в. в  $\Pi_T$  и (1b) в сильном смысле, т.е.

$$\|u_\varepsilon(\cdot, t) - u_0(\cdot)\|_{H^{2,2}} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0.$$

## Обозначение.

Через

$$L^p \subset L^p_{loc}(\mathbb{R}^2_x), \quad H^{l,p} \subset H^{l,p}_{loc}(\mathbb{R}^2_x) \equiv W^{l,p}_{loc}(\mathbb{R}^2_x)$$

обозначаются банаховы пространства, состоящие из 1-периодических функций, снабжённые соответственно нормами

$$\|u\|_{L^p} = \|u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \|u\|_{H^{l,p}} = \|u\|_{H^{l,p}(\Omega)},$$

где  $\Omega$  — это квадрат периодичности  $(0, 1) \times (0, 1)$ .

## Обоснование разрешимости задачи (1) при фиксированном $\varepsilon > 0$

Справедливость утверждения об однозначной разрешимости непосредственно следует из результатов М. Пташник (Applicable Analysis, 2006).

## Основные результаты исследования

Главные результаты сформулируем в виде следующей теоремы.

### Теорема 1. (Предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0+$ .)

Положим, что  $u_0$ ,  $\mathbb{A}$ ,  $b$ ,  $K_\varepsilon^T$  и  $\beta$  удовлетворяют приведенным выше условиям. Пусть  $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]}$  — это семейство сильных решений задачи (1) в смысле определения 1. Тогда справедливы следующие утверждения.

#### 1. (Относит. компактность семейства $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]}$ .)

Семейство  $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]}$  относительно компактно в  $L^2(0, T; H^{1,2})$  и относительно слабо\* компактно в  $L^\infty(0, T; H^{2,2})$  при  $\varepsilon \rightarrow 0+$ .

Другими словами, существуют подпоследовательность из  $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]}$  и предельная функция  $u \in L^\infty(0, T; H^{2,2})$ , такие, что

$$u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} u \quad \text{сильно в } L^2(0, T; H^{1,2}), \text{ слабо* в } L^\infty(0, T; H^{2,2}). \quad (2)$$

## 2. (Относительная компактность семейства ремасштабированных решений.)

Семейство ремасштабированных решений  $\{\bar{u}_\varepsilon: \mathbb{R}_x^2 \times [0, 1] \mapsto \mathbb{R}\}_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]}$ , определенных формулой

$$\bar{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \bar{t}) \stackrel{\text{def}}{=} u_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau + \varepsilon \bar{t}), \quad \bar{t} \in [0, 1], \quad \varepsilon > 0,$$

относительно компактно в  $L^2(0, 1; L^2)$  и относительно слабо\* компактно в  $L^\infty(0, 1; H^{2,2})$ .

Другими словами, существуют последовательность в  $\{\bar{u}_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]}$  и предельная функция  $\bar{u} \in L^\infty(0, 1; H^{2,2})$ , такие, что

$$\bar{u}_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0^+]{\quad} \bar{u} \quad \text{сильно в } L^2(0, 1; L^2), \text{ слабо}^* \text{ в } L^\infty(0, 1; H^{2,2}). \quad (3)$$

### Примечание.

Как видно, ремасштабирование происходит на интервале времени  $\{\tau \leq t \leq \tau + \varepsilon\}$ , то есть на носителе функции  $K_\varepsilon^\tau = K_\varepsilon^\tau(t)$ .

### 3. (Предельная модель.)

Пара функций  $(u, \bar{u})$  служит сильным решением трёх следующих задач Коши, которые нужно решать последовательно.

- (i) Во-первых, найти  $u = u(\mathbf{x}, t)$  — решение *макроскопической* задачи Коши до переходного слоя:

$$\partial_t u = \partial_t \Delta_x u + \operatorname{div}_x(\mathbb{A}(\mathbf{x}, t) \nabla_x b(u)), \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}_x^2 \times (0, \tau), \quad (4a)$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}_x^2, \quad (4b)$$

$$u(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i, t) = u(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}_x^2 \times (0, \tau), \quad i = 1, 2. \quad (4c)$$

- (ii) Во-вторых, найти  $\bar{u} = \bar{u}(\mathbf{x}, \bar{t})$  — решение *микроскопической* задачи Коши на переходном слое:

$$\partial_{\bar{t}} \bar{u} = \partial_{\bar{t}} \Delta_x \bar{u} + 2K(\bar{t})\beta(\mathbf{x}, \bar{u}), \quad (\mathbf{x}, \bar{t}) \in \mathbb{R}_x^2 \times (0, 1), \quad (5a)$$

$$\bar{u}(\mathbf{x}, 0+) = u(\mathbf{x}, \tau - 0), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}_x^2, \quad (5b)$$

$$\bar{u}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i, \bar{t}) = \bar{u}(\mathbf{x}, \bar{t}), \quad (\mathbf{x}, \bar{t}) \in \mathbb{R}_x^2 \times (0, 1), \quad i = 1, 2, \quad (5c)$$

где  $u(\mathbf{x}, \tau - 0)$  — решение задачи (4) в момент времени  $t = \tau$ .

(iii) В-третьих, найти  $u = u(\mathbf{x}, t)$  — решение макроскопической задачи Коши после переходного слоя:

$$\partial_t u = \partial_t \Delta_x u + \operatorname{div}_x(\mathbb{A}(\mathbf{x}, t) \nabla_x b(u)), \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}_x^2 \times (\tau, T), \quad (6a)$$

$$u(\mathbf{x}, \tau + 0) = \bar{u}(\mathbf{x}, 1 - 0), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}_x^2, \quad (6b)$$

$$u(\mathbf{x} + \mathbf{e}_j, t) = u(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}_x^2 \times (\tau, T), \quad i = 1, 2, \quad (6c)$$

где  $\bar{u}(\mathbf{x}, 1 - 0)$  — решение задачи (5) в момент времени  $\bar{t} = 1$ .

#### 4. (Единственность решения.)

Последовательность задач (4)–(6) имеет не более одного решения.

Проще говоря, сильное решение  $(u, \bar{u})$ , определенное в пп. 2-3 теоремы, является единственным решением системы (4)–(6).

## Замечание 1.

- Ур-ия (4а), (5а) и (6а) выполняются п.в. в  $\mathbb{R}_x^2 \times (0, \tau)$ ,  $\mathbb{R}_x^2 \times (0, 1)$  и  $\mathbb{R}_x^2 \times (\tau, T)$ , соответственно.
- Начальные условия (4b), (5b) и (6b) выполняются в смысле сильных следов из  $H^{2,2}$ .
- Условия 1-периодичности (4c), (5c) и (6c) выполняются поточечно в  $\mathbb{R}_x^2 \times (0, \tau)$ ,  $\mathbb{R}_x^2 \times (0, 1)$  и  $\mathbb{R}_x^2 \times (\tau, T)$ , соответственно.

## Замечание 2.

Множество  $\mathbb{R}_x^2 \times \{0 < \bar{t} < 1\}$  называем *ударным* или *переходным слоем*. Переменная  $\bar{t}$  — это микроскопическая («очень быстрая») переменная времени.

## О доказательстве теоремы 1

Напомним:

$$\partial_t u_\varepsilon = \partial_t \Delta_x u_\varepsilon + \operatorname{div}_x (\mathbb{A}(\mathbf{x}, t) \nabla_x b(u_\varepsilon)) + K_\varepsilon^T(t) \beta(\mathbf{x}, u_\varepsilon) \quad (1a)$$

- Устанавливается равномерная по  $\varepsilon$  первая энергетическая оценка для семейства решений задачи (1) в  $\mathbb{R}_x^2 \times (0, T)$ :

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; L^2)}^2 + \|\nabla_x u_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; L^2)}^2 \leq M_0 \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]. \quad (7)$$

Вывод стандартный: основан на применении леммы Гронуолла–Беллмана.

- Устанавливается равномерная по  $\varepsilon$  вторая энергетическая оценка для семейства решений задачи (1) в  $\mathbb{R}_x^2 \times (0, T)$ :

$$\|\nabla_x u_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; L^2)}^2 + \|\Delta_x u_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; L^2)}^2 \leq M_1 \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]. \quad (8)$$

Вывод основан на оценке (7), оценке нормы  $u_\varepsilon$  в  $H^{2,2}$  через норму в  $H^{1,2}$  и норму  $\Delta_x u_\varepsilon$  в  $L^2$ , н-вах Коши, Лерэ I и Йенсена и на применении леммы Гронуолла–Беллмана.

- Из (7) и (8) на основании теоремы вложения Соболева следуют принцип максимума

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(Q_T)} \leq M_2 \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0] \quad (9)$$

и оценка в  $H^{2,2}$ :

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;H^{2,2})} \leq \sqrt{(M_0 + M_1)M_\Delta} = M_3 \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]. \quad (10)$$

Постоянные  $M_2$  и  $M_3$  от  $\varepsilon$  не зависят, то есть оценки равномерные.  $M_\Delta$  — константа из неравенства вложения

$$\|\phi\|_{H^{2,2}}^2 \leq M_\Delta (\|\phi\|_{L^2}^2 + \|\nabla_x \phi\|_{L^2}^2 + \|\Delta_x \phi\|_{L^2}^2) \\ \forall \phi \in H^{1,2} \quad \text{т.ч. } \Delta_x \phi \in L^2.$$

- Устанавливается равномерная непрерывность семейства  $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]}$ . При этом систематически используется техника, разработанная С.Н. Антонцевым и С.И. Шмарёвым (монография 2015 г., Atlantis Press):

Для всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  и для каждой пары  $(\varrho, h) \in \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+$  достаточно малых положительных параметров (т.е.

$0 < \varrho_1, \varrho_2, h \ll 1$ ), сильное решение задачи (1) удовлетворяет оценке

$$\int_0^{T-h} \int_{\Omega} (|u_\varepsilon(\mathbf{x} + \varrho, t + h) - u_\varepsilon(\mathbf{x}, t)|^2 + |\nabla_{\mathbf{x}} u_\varepsilon(\mathbf{x} + \varrho, t + h) - \nabla_{\mathbf{x}} u_\varepsilon(\mathbf{x}, t)|^2) dx dt \leq M_4(|\varrho|^2 + h) \quad (11)$$

с постоянной  $M_4$ , не зависящей от  $\varrho = (\varrho_1, \varrho_2)$ ,  $h$  и  $\varepsilon$ .

(Напомним:  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$  — куб периодичности.)

- Проводится рескейлинг (1a) на сегменте  $\{\tau \leq t \leq \tau + \varepsilon\}$ .  
Получаем ремасштабированное уравнение

$$\partial_{\bar{t}} \bar{u}_\varepsilon = \varepsilon \operatorname{div}_x (\mathbb{A}(\mathbf{x}, \tau + \varepsilon \bar{t}) \nabla_x b(\bar{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \bar{t}))) + \partial_{\bar{t}} \Delta_x \bar{u}_\varepsilon + 2K(\bar{t}) \beta(\mathbf{x}, \bar{u}_\varepsilon).$$

Для ремасштабированного уравнения устанавливаются равномерные первая и вторая энергетические оценки, равномерный принцип максимума, и ещё устанавливается равномерная оценка на  $\partial_{\bar{t}} \bar{u}$ .

- Из полученных энергетических оценок при подходящем выборе подпоследовательности сразу следуют слабые предельные соотношения

$$u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} u \quad \text{слабо}^* \text{ в } L^\infty(0, T; H^{2,2}), \quad (2)_{w^*}$$

$$\bar{u}_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} \bar{u} \quad \text{слабо}^* \text{ в } L^\infty(0, 1; H^{2,2}). \quad (3)_{w^*}$$

- В силу свойства равномерной непрерывности семейства  $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]}$  и равномерной оценки на  $\partial_{\bar{t}} \bar{u}$  на основании теоремы Колмогорова – Рисса (версия критерия Арцела – Асколи) выводим сильные предельные соотношения

$$u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} u \quad \text{сильно в } L^2(0, T; H^{1,2}), \quad (2)_s$$

$$\bar{u}_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} \bar{u} \quad \text{сильно в } L^2(0, 1; L^2). \quad (3)_s$$

переходя, при необходимости, к подпоследовательности.

- Завершаем доказательство утверждений 1–3 теоремы 1 предельным переходом при  $\varepsilon \rightarrow 0+$  в уравнении и краевых условиях исходной задачи, более точно, в соответствующем интегральном равенстве.
- Утверждение 4 теоремы 1 (о единственности решения) сразу следует из результата о единственности сильного решения задачи (1) (при фикс.  $\varepsilon$ ), т.к. каждая из задач (4)–(6) имеет вид, аналогичный задаче (1). □

## 2. Одномерное импульсное уравнение Баренблатта–Желтова–Кочинной

Начально-краевая задача для п.п.у. Б-Ж-К с импульсным коэффициентом пьезопроводимости:

$$\partial_t u_\varepsilon = \partial_{xxt}^3 u_\varepsilon + (1 + \alpha K_\varepsilon^\tau(t)) \partial_{xx}^2 u_\varepsilon - f(u_\varepsilon), \quad (x, t) \in \Pi_T, \quad (12a)$$

$$u_\varepsilon(0, t) = u_\varepsilon(1, t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (12b)$$

$$u_\varepsilon(x, 0) = g(x), \quad x \in (0, 1). \quad (12c)$$

Здесь,

- $\Pi_T := (0, 1) \times (0, T)$  — пространственно-временной прямоугольник;
- $T = \text{const} > 0$  — произвольно фиксированный момент времени;
- $\tau$  — фиксированный момент времени,  $\tau \in (0, T)$ ;
- $\alpha = \text{const} \neq 0$  — заданный коэфф-т (необяз. положительный);

$$\partial_t u_\varepsilon = \partial_{xxt}^3 u_\varepsilon + (1 + \alpha K_\varepsilon^\tau(t)) \partial_{xx}^2 u_\varepsilon - f(u_\varepsilon) \quad (12a)$$

- $f = f(u)$  — заданная гладкая сублин. функция (источник);
- $g \in W^{2,2}(0,1) \cap W_0^{1,2}(0,1)$  — заданная начальная функция;
- $K_\varepsilon^\tau(t)$  — заданная аппроксимация дельта-функции Дирака  $\delta_{(t=\tau)}$ .

### Аппроксимация дельта-функции $\delta_{(t=\tau)}$

Носитель ядра  $K_\varepsilon^\tau = K_\varepsilon^\tau(t)$  лежит на отрезке  $\left\{ \tau - \frac{\varepsilon}{2} \leq t \leq \tau + \frac{\varepsilon}{2} \right\}$  и определён формулой

$$K_\varepsilon^\tau(t) = \frac{1}{\varepsilon} K\left(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\right), \quad t \in [0, T],$$

где  $K = K(\vartheta)$  — неотрицательная гладкая чётная функция с носителем на отрезке  $\left\{ -\frac{1}{2} \leq \vartheta \leq \frac{1}{2} \right\}$ , среднее от которой равно 1.

$$K_{\varepsilon}^{\tau}(t) = \frac{1}{\varepsilon} K\left(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\right)$$

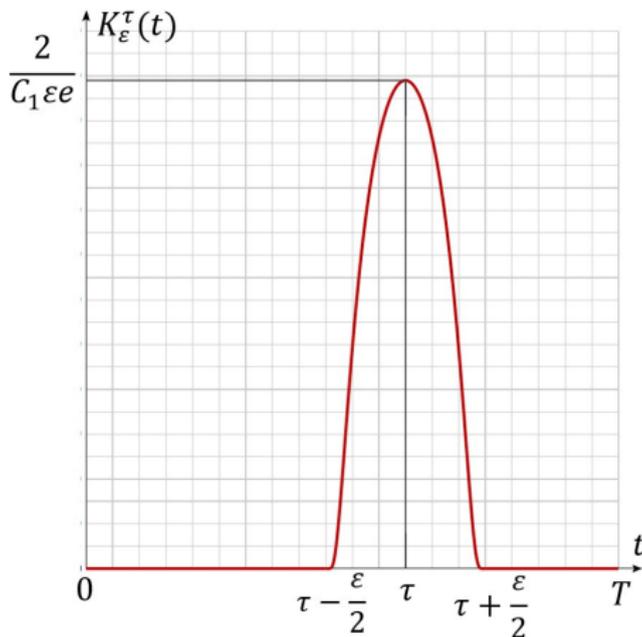


Рис.: Сглаженная функция Дирака  $K_{\varepsilon}^{\tau} = (\delta_{(t=\tau)})_{\varepsilon}$

## Об импульсных эффектах (процессах)

С механической точки зрения, поведение коэфф-та пьезопроводности, близкое к  $1 + \alpha\delta_{(t=\tau)}$ , соответствует резкому падению давления в галерее трещин в трещиновато-пористой среде (в задачах фильтрации) в окрестности момента времени  $t = \tau$ . Например, такие быстрые скачки капиллярного давления наблюдались в экспериментах для двухфазной жидкости (Schlüter S. et al., *Water Resour. Res.* **53**, 2017).

Также, доп. слагаемое  $\sim \alpha\delta_{(t=\tau)}u$  может соответствовать флуктуациям давления, связанным с «импульсной» быстрой диффузией в пористой среде (Cao Y., Liu C., *Electron. J. Differ. Equ.*, **2018**:116, 2018).

## Разрешимость задачи (12)

При каждой заданной функции  $g \in W^{2,2}(0,1) \cap W_0^{1,2}(0,1)$  задача (12) имеет единственное сильное решение при каждом фиксир.  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ .

Этот результат опять же следует из работы М. Пташник (*Applicable Analysis*, 2006).

## Основные результаты исследования

Главные результаты сформулируем в виде следующей теоремы.

### Теорема 2. (Предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0+$ .)

Пусть  $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]}$  — это семейство сильных решений задачи (12).

Тогда справедливы следующие утверждения.

#### 1. (Относит. компактность семейства $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]}$ .)

Семейство  $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]}$  относительно компактно в  $L^2(0, T; W_0^{1,2}(0, 1))$  и относительно слабо\* компактно в  $L^\infty(0, T; W^{2,2}(0, 1))$  при  $\varepsilon \rightarrow 0+$ .

Другими словами, существуют подпоследовательность из  $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]}$  и предельная функция  $u \in L^\infty(0, T; W^{2,2}(0, 1) \cap W_0^{1,2}(0, 1))$ , такие, что

$$\begin{aligned} u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} u & \text{ сильно в } L^2(0, T; W_0^{1,2}(0, 1)), \\ & \text{слабо* в } L^\infty(0, T; W^{2,2}(0, 1)). \end{aligned} \tag{13}$$

## 2. (Относительная компактность семейства ремасштабированных решений.)

Семейство ремасштабированных решений

$\{\bar{u}_\varepsilon: (0, 1) \times (0, 1) \mapsto \mathbb{R}\}_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]}$ , определённых формулой

$$\bar{u}_\varepsilon(x, \bar{t}) \stackrel{\text{def}}{=} u_\varepsilon(x, \tau + \varepsilon \bar{t}), \quad \bar{t} \in [0, 1], \quad \varepsilon > 0,$$

относительно компактно в  $L^2((0, 1) \times (0, 1))$  и относительно слабо\* компактно в  $L^\infty(-1/2, 1/2; W^{2,2}(0, 1))$ .

Другими словами, существуют последовательность в  $\{\bar{u}_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]}$  и предельная функция  $\bar{u} \in L^\infty(-1/2, 1/2; W^{2,2}(0, 1) \cap W_0^{1,2}(0, 1))$ , такие, что

$$\begin{aligned} \bar{u}_\varepsilon &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} \bar{u} && \text{сильно в } L^2((0, 1) \times (0, 1)), \\ & && \text{слабо* в } L^\infty(-1/2, 1/2; W^{2,2}(0, 1)). \end{aligned} \tag{14}$$

### 3. (Предельная модель.)

Пара функций  $(u, \bar{u})$  служит сильным решением трёх следующих задач Коши, которые нужно решать последовательно.

- (i) Во-первых, найти  $u = u(x, t)$  — решение *макроскопической* задачи Коши до переходного слоя:

$$u = \partial_{xxt}^3 u + \partial_{xx}^2 u - f(u), \quad (x, t) \in (0, 1) \times (0, \tau), \quad (15a)$$

$$u(x, 0) = g(x), \quad x \in (0, 1), \quad (15b)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \in (0, \tau). \quad (15c)$$

- (ii) Во-вторых, найти  $\bar{u} = \bar{u}(x, \bar{t})$  — решение *микроскопической* задачи Коши на переходном слое:

$$\partial_{\bar{t}} \bar{u} = \partial_{xx\bar{t}}^3 \bar{u} + \alpha K(\bar{t}) \partial_{xx}^2 \bar{u}, \quad (x, \bar{t}) \in (0, 1) \times (0, 1), \quad (16a)$$

$$\bar{u}(x, -1/2 + 0) = u(x, \tau - 0), \quad x \in (0, 1), \quad (16b)$$

$$\bar{u}(0, \bar{t}) = \bar{u}(1, \bar{t}) = 0, \quad \bar{t} \in (-1/2, 1/2), \quad (16c)$$

где  $u(x, \tau - 0)$  — решение задачи (15) в момент времени  $t = \tau$ .

(iii) В-третьих, найти  $u = u(x, t)$  — решение *макроскопической* задачи Коши *после* переходного слоя:

$$u = \partial_{xxt}^3 u + \partial_{xx}^2 u - f(u), \quad (x, t) \in (0, 1) \times (\tau, T), \quad (17a)$$

$$u(x, \tau + 0) = \bar{u}(x, 1/2 - 0), \quad x \in (0, 1), \quad (17b)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \in (\tau, T), \quad (17c)$$

где  $\bar{u}(x, 1/2 - 0)$  — реш. задачи (16) в момент времени  $\bar{t} = 1/2$ .

#### 4. (Единственность решения.)

Последовательность задач (15)–(17) имеет не более одного решения. Проще говоря, сильное решение  $(u, \bar{u})$ , определённое в пп. 2-3 теоремы, является единственным решением системы (15)–(17).

Доказательство [теоремы 2](#) принципиально проводится так же, как и доказательство [теоремы 1](#), но в технике есть различия существенные.

### 3. Ещё результаты для импульсных псевдопараболических уравнений

Нашим коллективом также изучены ещё ряд задач о слабых и сильных решениях псевдопараболических уравнениях:

- *I. Kuznetsov and S. Sazhenkov*, Weak solutions of impulsive pseudoparabolic equations with an infinitesimal transition layer, *Nonlinear Analysis*, 2023, vol. 228, article 113190, 20 p. (<https://doi.org/10.1016/j.na.2022.113190>)
- *S. Antontsev, I. Kuznetsov, S. Sazhenkov, and S. Shmarev*, Strong solutions of a semilinear impulsive pseudoparabolic equation with an infinitesimal initial layer, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, available online 9 September 2023, article 127751, 22 p. (<https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2023.127751>)
- *S. Antontsev, I. Kuznetsov, and S. Sazhenkov*, 1D impulsive pseudoparabolic equation with convection and absorption, *Interfacial Phenomena and Heat Transfer*, to appear.

## 4. Related Topics

Аналогичные по целям исследования были проведены также для  $p(x)$ -параболического и истинно-нелинейного ультра-параболического дифференциальных уравнений и параболического интегро-дифференциального уравнения Вольтерра:

- *S. N. Antontsev, I. V. Kuznetsov, and S. A. Sazhenkov*, A shock layer arising as the source term collapses in the  $p(x)$ -Laplacian equation, *Probl. Anal. Issues Anal.*, 2020, **9(27)**(3), 31–53. (doi:10.15393/j3.art.2020.8990)
- *I. Kuznetsov and S. Sazhenkov*, Singular limits of the quasi-linear Kolmogorov-type equation with a source term, *J. Hyperbolic Differential Equations*, 2021, **18**(4), 789–856. (doi:10.1142/S0219891621500247)
- *I. Kuznetsov and S. Sazhenkov*, The impulsive heat equation with the Volterra transition layer, *Journal of Elliptic and Parabolic Equations*, 2022, **8**(2), 959–993. (doi:10.1007/s41808-022-00182-9)