

Усреднение, спектральные проблемы, проблемы управляемости для систем интегро-дифференциальных уравнений

А.С. Шамаев

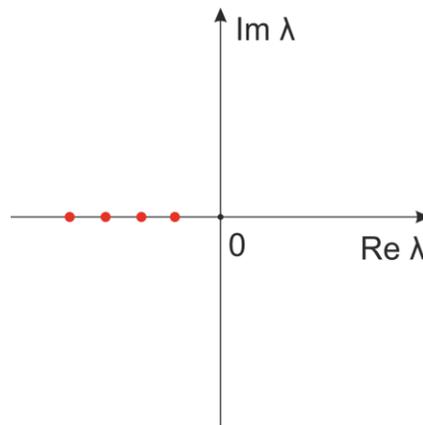
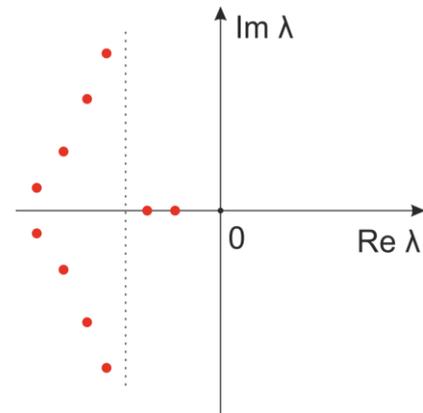
Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

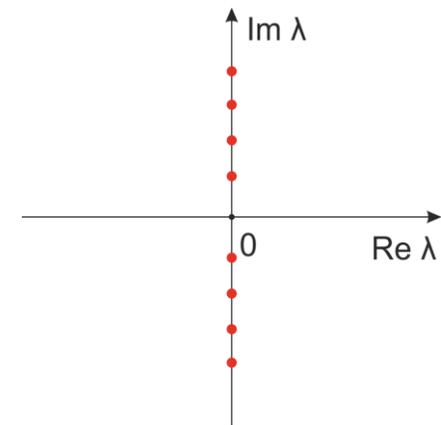
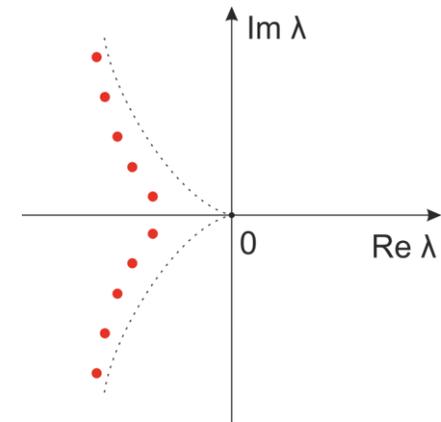
I. Уравнение Гуртина — Пипкина

$$\begin{cases} \dot{u} = \int_0^t K(t - \tau) \Delta u d\tau + f(t, x), \\ u|_{t=0} = 0 \text{ (или } u_0(x)), \end{cases}$$

Ядро свертки $\sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\lambda_k t}$



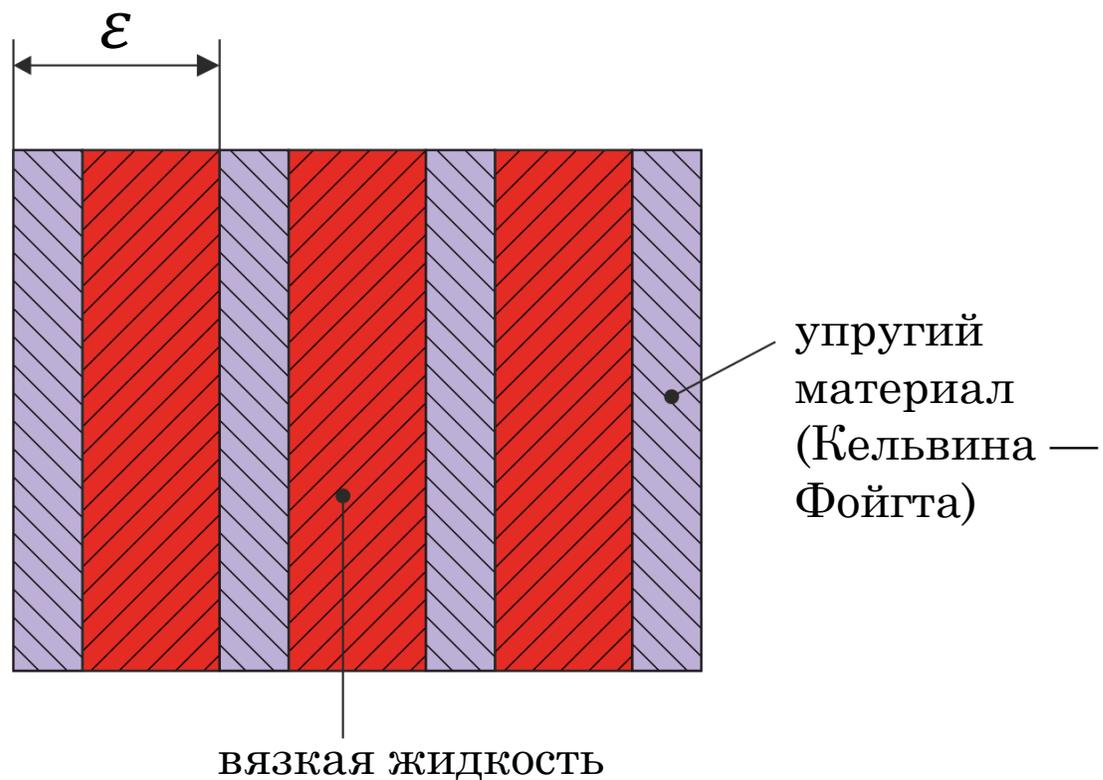
$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$



II. Спектры и управляемость

	управление за границу	распределенное управление	
$\ddot{u} = c^2 \Delta u + \int_0^t K(t - \tau) \Delta u d\tau$	+ -	+ (+ и -)	
$\ddot{u} + \alpha \dot{u} = c^2 \Delta u + \int_0^t K(t - \tau) \Delta u d\tau$	+ -	+ (+ и -)	
$\ddot{u} + \alpha \dot{u} + \beta \Delta \dot{u} + \int_0^t K(t - \tau) \Delta u d\tau = 0$	- -	+ (+ и -)	
$\ddot{u} + \alpha \dot{u} + \beta \Delta \dot{u} + \gamma \Delta \ddot{u} + \int_0^t K(t - \tau) \Delta u d\tau = 0$	- -	+ (+ и -)	

III. Усреднение



$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma_p^\varepsilon \overset{\chi}{\supset} \sigma_p^\infty$$

Интересные эффекты

1. Появление нелокальных членов типа свертки
2. Предельный спектр при $\varepsilon \rightarrow 0$ в смысле Хаусдорфа может быть больше, чем спектр предельного оператора.
3. В некоторых случаях ядра свертки усредненного оператора могут быть немонотонными функциями.

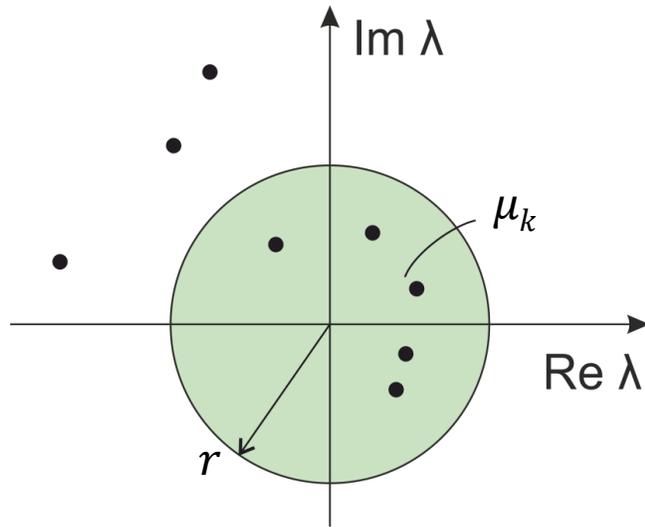
$$\rho_0 \ddot{u}_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} + f_j(x, t) \quad \text{в } \Omega \times [0, T]$$
$$\sigma_{ij} = \alpha_{ijkh} e_{kh}(\bar{u}) + \alpha_{ijkh} e_{kh}(\dot{\bar{u}}) + \gamma_{ijkh} e_{kh}(\ddot{\bar{u}}) - \underline{g_{ijkh}(t)} * e_{kh}(\bar{u})$$

Ядро свертки g_{ijkh} определяется через решение уравнений Соболевского типа

$$A(\dot{w}) = Bw,$$

A, B — операторы второго порядка.

IV. Связь «густоты» спектра и множества показателей ядра свертки с управляемостью систем с интегральным запаздыванием



$$A^* \{ \mu_k \} = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\pi}{r} \int_0^r \frac{n(\tau)}{\tau} d\tau$$

— «густота» спектра

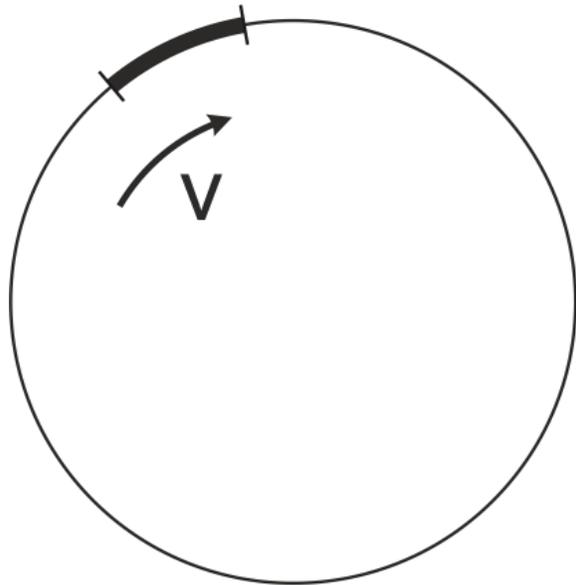
УТВ. 1.

Время быстрогодействия для управления за границу $\geq A^* \{ \mu_k \}$

УТВ. 2. $K(t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\lambda_k t}$

$A^* \{ \lambda_k \} = +\infty \rightarrow$ отсутствие управляемости распределенной силой.

V. Управление за движущийся участок области



$$\ddot{u} - c^2 u'' + c \int_0^t u'' dt = 0$$

**Статьи, посвященные исследованию спектров усредненных сред
и поведению спектров при усреднении**

1. Шамаев А.С., Шумилова В.В. Спектр одномерных колебаний в комбинированной слоистой среде, состоящей из вязкоупругого материала и вязкой сжимаемой жидкости // Известия РАН. МЖГ. 2013. Т. 1. С. 17-25.
2. Шамаев А.С., Шумилова В.В. О спектре собственных колебаний в среде из слоев упругого материала и вязкой жидкости // Доклады РАН. 2013. Т. 448, № 1. С. 43-46.
3. Шамаев А.С., Шумилова В.В. О спектре одномерных колебаний в среде из слоев упругого материала и вязкоупругого материала Кельвина-Фойгта // Журнал ВМиМФ. 2013. Т. 53, № 3. С. 282-290.
4. Шамаев А.С., Шумилова В.В. Асимптотическое поведение спектра одномерных колебаний в среде из слоев упругого материала и вязкоупругого материала Кельвина-Фойгта // Труды МИАН. 2016. Т. 295. С. 218-228.
5. Шамаев А.С., Шумилова В.В. Асимптотика спектра одномерных собственных колебаний в среде из слоев вязкоупругого материала и вязкой жидкости // Известия РАН. МЖГ. 2019. Т. 6. С. 12-24.
6. Шумилова В.В. Спектр собственных колебаний слоистой среды, состоящей из материала Кельвина-Фойгта и вязкой несжимаемой жидкости // Сиб. электр. матем. известия. 2020. Т. 17. С. 21-31.
7. Шамаев А.С., Шумилова В.В. Спектр одномерных собственных колебаний слоистой среды, состоящей из упругого материала и вязкой несжимаемой жидкости // Вестник МГУ. Сер. 1: Матем. Механика. 2020. № 4. С. 53-57.
8. Шамаев А.С., Шумилова В.В. Асимптотика спектров одномерных собственных колебаний в средах, состоящих из твердых и жидких слоев // Доклады РАН. 2020. Т. 491, № 1. С. 66-70.
9. Шамаев А.С., Шумилова В.В. Spectrum of one-dimensional eigenoscillations of a medium consisting of viscoelastic material with memory and incompressible viscous fluid // J. of Math. Sci. 2021. Vol. 257, no 5. P. 732-742.
10. Шумилова В.В. Спектр одномерных собственных колебаний двухфазных слоистых сред с периодической структурой // Труды Инст. матем. и механики УрО РАН. 2022. Т. 4, № 4. С. 250-261.
11. Шумилова В.В. Spectrum of one-dimensional eigenoscillations of two-phase layered composites // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. 2023. Т. 16, № 1. С. 35-47.

Список литературы по теории управления. Исходные работы разных авторов.

- [1] Черноусько Ф.Л. Ограниченное управление в системах с распределенными параметрами // Прикл. матем. и мех. 1992, Т. 56. №5. С. 810-826.
- [2] Акуленко Л. Д. Приведение упругой системы в заданное состояние посредством силового граничного воздействия // Прикладная математика и механика. 2000. Т. 45, №6, С. 1095-1103.
- [3] Gurtin M. E., Pipkin A. C. A General Theory of Heat Conduction With Finite Wave Speeds // Arch. Ration. Mech. Anal. 1968. № 31. P. 113-126. [4] Russell D. L. Controllability and Stabilizability Theory for Linear Partial Differential Equations: Recent Progress and Open Questions. // SIAM Review. 1978. V. 20. №4. P. 639-739.
- [5] Lagnese J. Decay of Solutions of Wave Equations in a Bounded Region with Boundary Dissipation // Journal of Differential Equations. 1983, №50. P. 163-182.
- [6] Lions J. L. Exact Controllability, Stabilization and Perturbations for Distributed Systems // SIAM Review. 1988. V. 30 №1. P. 1-68.
- [7] Ivanov S., Pandolfi L. Heat Equations with Memory: Lack of Controllability to Rest // J. Mathematical Analysis and Applications. 2009. V. 355. №1. P. 1-11.
- [8] Vlasov V. V., Rautian N. A., Shamaev A. S. Spectral Analysis and Correct Solvability of Abstract Integro-Differential Equations Arising in Thermophysics and Acoustics // Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. 2011. V. 39. P. 36-65.
- [9] Chaves-Silva F. W., Rosier L., Zuazua E. Null controllability of a system of viscoelasticity with a moving control. // Journal de Mathematiques Pures et Appliquees. 2014, V. 101 №2, P. 198-222.
- [10] Chaves-Silva F. W., Zhang X., Zuazua E. Controllability of Evolution Equations with Memory. // SIAM Journal on Control and Optimization. 2017, V. 55 №4, DOI:10.1137/151004239.
- [11] Biccarelli U., Micu U. Null-controllability Properties of the Wave Equation with a Second Order Memory Term // J. Differential Equations. 2019. № 267. P. 1376-1422.

Список литературы по управлению.

- [1] Романов И. В. О невозможности приведения плоской мембраны в состояние покоя с помощью граничных сил. // Автоматика и телемеханика. 2012, №12, С. 56-64.
- [2] Романов И. В., Шамаев А. С. О задаче точного управления системой, описываемой уравнением струны с запаздыванием. // Автоматика и телемеханика. 2013, №11, С. 49-61.

- [3] Romanov I., Shamaev A. Exact Controllability of the Distributed System, Governed by String Equation with Memory // J. Dynamical and Control Systems. 2013. V. 19. №4. P. 611-623.
- [4] Romanov I., Shamaev A. Exact Controllability of the Distributed System Governed by the Wave Equation With Memory // arXiv. doi 1503.04461.
- [5] Romanov I., Shamaev A. Non-controllability to Rest of the Two-Dimensional Distributed System Governed by the Integrodifferential Equation // J. Optimization Theory and Applications. 2016. V. 170. №3. P. 772-782.
- [6] Романов И. В., Точное управление колебаниями двумерной мембраны ограниченным силовым воздействием, приложенным к границе // Доклады Академии Наук. Теория управления. 2016, Т. 470 №1, С. 22-25.
- [7] Romanov I., Shamaev A. Some Problems of Distributed and Boundary Control for Systems with Integral Aftereffect. // Journal of Mathematical Sciences. 2018, V. 234, №4, P. 470-484.
- [8] Romanov I., Romanova A. Some Problems of Controllability of Distributed Systems Governed by Integrodifferential Equations // IFAC-PapersOnLine. 2018, V. 51, № 2, P. 132-137.
- [9] Романов И. В., Шамаев А. С. О задаче граничного управления для системы, описываемой двумерным волновым уравнением. // Изв. РАН. ТИСУ. 2019, №1, С. 109-116.
- [10] Romanov, I. V., Shamaev, A. S. Suppression of Oscillations of Thin Plate by Bounded Control Acting to the Boundary. Journal of Computer and Systems Sciences International. V. 59 (3), 371-380 (2020)
- [11] Romanova A. V., Romanov I. V. On the Problems of Controllability and Uncontrollability for Some Mechanical Systems Described by the Equations of Vibrations of Plates and Beams with Integral Memory // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2021, V. 1083, № 012041, P 1-9.
- [12] Romanov I., Shamaev A. Exact Bounded Boundary Controllability to Rest for the Two- Dimensional Wave Equation. // Journal of Optimization Theory and Applications. V. 188, (3) (2021) 925-938.
- [13] Романов И. В. Исследование управляемости для некоторых динамических систем с распределенными параметрами, описываемых интегродифференциальными уравнениями. // Известия РАН. Теория и системы управления. 2022, №3, С. 58-61.
- [14] Романов И. В., Шамаев А. С. Точное управление распределенной системой, описываемой волновым уравнением с интегральной памятью // Проблемы математического анализа. 2022, №115, С. 1-15.
- [15] Романов И. В., Шамаев А. С. Три исключительных случая в задачах граничной управляемости для моделей "наивной механики" // Подготовлен текст статьи.